

Э. Гурса

**Курс математического
анализа**

**Т. 2. Ч. 2. Дифференциальные
уравнения**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э1 **Э. Гурса**
Курс математического анализа: Т. 2. Ч. 2. Дифференциальные уравнения / Э.
Гурса – М.: Книга по Требованию, 2021. – 287 с.

ISBN 978-5-458-25173-0

По объему это руководство является одним из наиболее полных в современной мировой математической литературе. В то же время излагаемые факты выбраны не по принципу энциклопедичности, выбор проникнут одной руководящей мыслью - дать необходимый материал, на котором основывается разработка наиболее важных проблем современной науки.

ISBN 978-5-458-25173-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ГЛАВА XVIII.

Стр.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

I. Получение дифференциальных уравнений	9
362. Исключение постоянных	9
II. Уравнения первого порядка	12
363. Разделение переменных	12
364. Однородное уравнение	13
365. Линейные уравнения	15
366. Уравнение Бернулли	17
367. Уравнение Якоби	17
368. Уравнение Риккати	18
369. Уравнения, не разрешенные относительно y'	20
370. Уравнение Лагранжа	22
371. Уравнение Клеро	23
372. Интегрирование уравнений $F(x, y') = 0$, $F(y, y') = 0$	24
373. Интегрирующий множитель	25
374. Приложение к конформному отображению	28
375. Уравнение Эйлера	29
376. Метод, основанный на теореме Абеля	33
377. Теоремы Дарбу	34
378. Приложения	37
III. Уравнения высших порядков	39
379. Интегрирование уравнений $\frac{d^ny}{dx^n} = f(x)$	39
380. Различные случаи понижения порядка	42
381. Приложения	45
Упражнения	47

ГЛАВА XIX.

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ.

I. Исчисление пределов	51
382. Общие положения	51
383. Существование интегралов системы дифференциальных уравнений	51
384. Системы линейных уравнений	55
385. Уравнения в полных дифференциалах	56
386. Применение исчисления пределов к уравнениям в частных производных	58
387. Общий интеграл системы дифференциальных уравнений	63
II. Метод последовательных приближений. Метод Коши-Липшица	67
388. Последовательные приближения	67
389. Случай линейных уравнений	70

	<i>Стр.</i>
390. Распространение на аналитические функции	71
391. Метод Коши-Липшица	73
392. Разложение $\frac{1}{1-x}$ в ряд полиномов	79
III. Первые интегралы. Множитель	81
393. Первые интегралы	81
394. Множитель	87
395. Интегральные инварианты	89
IV. Бесконечно малые преобразования	92
396. Группы с одним параметром	92
397. Приложение к дифференциальным уравнениям	95
398. Бесконечно малые преобразования	97
Упражнения	103

Г л а в а XX.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

I. Общие свойства. Фундаментальные системы	105
399. Особые точки линейного дифференциального уравнения	105
400. Фундаментальные системы	107
401. Неоднородное линейное уравнение	111
402. Понижение порядка линейного уравнения	114
403. Аналогии с алгебраическими уравнениями	118
404. Сопряженное уравнение	119
II. Некоторые частные виды линейных уравнений	121
405. Уравнения с постоянными коэффициентами	121
406. Метод Даламбера	126
407. Линейные уравнения Эйлера	128
408. Уравнение Лапласа	129
III. Правильные интегралы. Уравнения с периодическими коэффициентами	133
409. Подстановка интегралов вокруг критической точки	133
410. Исследование общего случая	135
411. Аналитический вид интегралов	136
412. Теорема Фукса	138
413. Уравнение Гаусса	143
414. Уравнение Бесселя	145
415. Уравнения Пикара	147
416. Уравнения с периодическими коэффициентами	150
417. Характеристические показатели	152
IV. Системы линейных уравнений	154
418. Общие свойства	154
419. Сопряженные системы	158
420. Линейные системы с постоянными коэффициентами	159
421. Приведение к каноническому виду	163
422. Уравнение Якоби	164
423. Системы с периодическими коэффициентами	165
424. Приводимые системы	166
Упражнения	168

Г л а в а XXI.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

I. Особые начальные значения	172
425. Случай, когда первая производная обращается в бесконечность	172
426—427. Случай, когда значение первой производной неопределенно	173

	<i>Стр.</i>
II. Исследование функций, определяемых некоторыми уравнениями первого порядка	180
428. Особые точки интегралов	180
429. Функции, определяемые дифференциальным уравнением $y' = R(x, y)$	181
430. Однозначные интегралы уравнения $y^m = R(y)$	186
431. Вывод эллиптических функций из уравнения Эйлера	192
432. Уравнения высших порядков	194
III. Особые интегралы	196
433. Особый интеграл уравнения первого порядка	196
434. Примеры; различные замечания	196
435. Геометрическое истолкование	202
436. Особые интегралы системы дифференциальных уравнений	204
Упражнения	206
Г л а в а X X I I .	
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.	
I. Линейные уравнения первого порядка	212
437. Общий способ	212
438. Геометрическое истолкование	216
439. Характеристические конгруэнции	219
II. Уравнения в полных дифференциалах	222
440. Исследование уравнения $dz = A dx + B dy$	222
441. Метод Майера	226
442. Исследование уравнения $P dx + Q dy + R dz = 0$	227
443. Скобки (u, v) и $[u, v]$	231
III. Уравнения первого порядка с тремя переменными	233
444. Полные интегралы	233
445. Метод Лагранжа и Шарпи	237
446. Задача Коши	242
447. Характеристики. Метод Коши	245
448. Вывод характеристик из полного интеграла	254
449. Распространение метода Коши на случай многих переменных	256
IV. Совместные уравнения	259
450. Однородные линейные системы	259
451. Полные системы	262
452. Обобщение теории полных интегралов	266
453. Системы в инволюции	267
454. Метод Якоби	271
V. Общее понятие об уравнениях высших порядков	272
455. Исключение произвольных функций	272
456. Общая теорема существования	276
Упражнения	280
Указатель	284

362. Исключение постоянных. Рассмотрим семейство плоских кривых, представляемое уравнением

зависящим от n произвольных постоянных. Дадим этим постоянным определенные, но произвольные, значения; последовательные производные от функции y переменного x , определяемой предыдущим уравнением, удовлетворяют соотношениям:

[illegible]

Останавливаясь на соотношении, определяющем производную n -го порядка, мы получим всего $n+1$ соотношений между $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ и постоянными $c_1, c_2, \dots, c_n$. Исключая эти постоянные, мы придем, вообще, только к одному соотношению между $x, y, y', \dots, y^{(n)}$:

Из самого происхождения этого уравнения очевидно, что всякая функция, определяемая соотношением (1), удовлетворяет уравнению (3), каковы бы ни были значения, даваемые постоянным c_i . Соотношение (1) называется *частным* интегралом дифференциального уравнения (3). Совокупность этих частных интегралов называется *общим интегралом* того же уравнения*. Пользуясь геометрическими терминами, что часто бывает удобно, мы будем также говорить, что всякая кривая, представляемая уравнением (1), есть *интегральная кривая* уравнения (3), или уравне-

* Часто *общим интегралом* дифференциального уравнения (3) называют соотношение (1), где $c_1, c_2, \dots, c_n$ имеют постоянные, но произвольные, значения. Давая этим постоянным определенные частные значения, мы получим *частный интеграл*.

(Ped.)

ние (3) есть дифференциальное уравнение семейства рассматриваемых кривых. Мы видим, что *порядок* дифференциального уравнения равен числу произвольных постоянных, от которых зависит это семейство кривых. Ясно, впрочем, что из предыдущего рассуждения никак не следует, что уравнение (3) не имеет других интегралов кроме представляемых уравнением (1); и действительно, как мы увидим несколько ниже, оно может иметь и другие интегралы.

Все предыдущее неприменимо к исключительным случаям, когда, исключая n параметров c_i из $n+1$ соотношений (1) и (2), мы приходим к нескольким различным соотношениям между $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$. Тогда можно было бы составить из них одно соотношение, не содержащее $y^{(n)}$, так что рассматриваемое семейство кривых состояло бы из интегральных кривых дифференциального уравнения, порядок которого ниже числа n . Это будет иметь место, если кривые зависят на самом деле только от $n-p$ параметров ($p > 0$); например, кривые, представляемые уравнением $F[x, y, \varphi(a, b)] = 0$, только по видимому зависят от двух произвольных параметров a и b : на самом деле они зависят только от одного переменного параметра $c = \varphi(a, b)$. Но понижение порядка дифференциального уравнения может произойти также в другом случае; например, кривые, представляемые уравнением $y^2 = 2axy + bx^2$, действительно зависят от двух различных параметров a и b , однако, эти кривые всегда удовлетворяют уравнению $y = xy'$. Причина этого лежит в том, что эти кривые распадаются на две прямых, проходящих через начало координат, каждая из которых есть интеграл уравнения $y = xy'$.

Примеры. Прямые, проходящие через данную точку (a, b) , представляются уравнением

$$y - b = C(x - a) \quad (4)$$

и зависят от произвольного параметра C . Исключая этот параметр из предыдущего соотношения и соотношения $y' = C$, мы непосредственно приходим к дифференциальному уравнению этой системы прямых:

$$y - b = y'(x - a). \quad (5)$$

Обратно, уравнение (5) можно представить в виде:

$$\frac{y'}{y - b} = \frac{1}{x - a};$$

следовательно, всякий интеграл этого уравнения удовлетворяет соотношению

$$\text{Log}(y - b) = \text{Log}(x - a) + \text{Log } C,$$

равносильному уравнению (4).

Совокупность прямых $y = C_1x + C_2$, лежащих на плоскости, образует семейство, зависящее от двух параметров; его дифференциальное уравнение есть $y'' = 0$. Обратное предложение получается непосредственно.

Окружности, лежащие в одной плоскости,

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \quad (6)$$

образуют семейство, зависящее от трех параметров; следовательно, соответствующее дифференциальное уравнение должно быть третьего порядка. Дифференцируя трижды предыдущее соотношение, получим:

$$\left. \begin{aligned} x + yy' + A + By' &= 0, & 1 + y'^2 + y y'' + By'' &= 0, \\ 3y'y'' + y y''' + By''' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Исключая B из двух последних формул, приходим к искомому уравнению:

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0. \quad (8)$$

Единственные плоские линии, удовлетворяющие этому уравнению, суть окружности и прямые. Мы видим прежде всего, что прямые суть интегралы, так как уравнение удовлетворяется, если $y'' = 0$, и следовательно, $y''' = 0$. Предположим, что $y'' \neq 0$; мы можем представить уравнение (8) в виде:

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{3y'y''}{1+y'^2};$$

отсюда, обозначая через C_1 постоянное, не равное нулю, получим:

$$\text{Log } y'' = \frac{3}{2} \text{Log } (1 + y'^2) + \text{Log } C_1,$$

или

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = C_1.$$

Интегрируя снова, будем иметь:

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 x + C_2,$$

или

$$y' = \frac{C_1 x + C_2}{\sqrt{1 - (C_1 x + C_2)^2}}.$$

Интегрируя еще раз, получим окончательно:

$$C_1 y + C_3 = -\sqrt{1 - (C_1 x + C_2)^2};$$

это — уравнение окружности.

Пользуясь следующим методом, указанным Альфаном (Halphen), нетрудно получить дифференциальное уравнение конических сечений. Если кривая второго порядка не имеет асимптоты, параллельной оси Oy , то, решая ее уравнение относительно y , получим уравнение вида:

$$y = mx + n + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C};$$

после двух дифференцирований будем иметь:

$$y'' = \frac{AC - B^2}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{\frac{3}{2}}},$$

или

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = (AC - B^2)^{-\frac{2}{3}} (Ax^2 + 2Bx + C),$$

так что

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}$$

есть трехчлен второй степени относительно x . Следовательно, чтобы исключить коэффициенты A, B, C , достаточно его продифференцировать трижды; искомого дифференциального уравнения можно представить сокращенно в виде:

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[(y'')^{-\frac{2}{3}} \right] = 0.$$

Выполняя вычисления, мы приходим к уравнению

$$40y'''' - 45y''y'''y^{IV} + 9y'^2y^V = 0. \quad (9)$$

Таким способом мы можем получить и дифференциальное уравнение парабол.

В самом деле, для параболы мы имеем: $A = 0$, а $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ есть двучлен первой степени.

Следовательно, дифференциальное уравнение параболы в сокращенном виде есть

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[(y'')^{-\frac{2}{3}} \right] = 0,$$

или, выполняя вычисления:

$$5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0. \quad (10)$$

II. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

Всякое дифференциальное уравнение n -го порядка, которое получается от исключения постоянных, имеет бесконечное множество интегралов, зависящих от n произвольных параметров. Но совсем не очевидно, что всякое заданное дифференциальное уравнение имеет интегралы. Это — основной вопрос, которым мы займемся в следующей главе. Здесь мы сначала рассмотрим несколько простых типов дифференциальных уравнений первого порядка, интегрирование которых приводится к квадратурам. Существование их интегралов будет доказано самим способом их получения. Если с точки зрения чистой логики этот путь и можно критиковать, то, во всяком случае, он соответствует историческому порядку.

363. Разделение переменных. Простейшим типом дифференциального уравнения является уже изученное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad (11)$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, если независимое переменное x действительно, и — аналитическая функция, если x рассматривается как комплексное переменное. Мы видели, что это уравнение имеет бесконечное множество интегралов, которые можно представить формулой

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + C,$$

где нижний предел x_0 можно рассматривать как данное постоянное, а C обозначает произвольное постоянное. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y) \quad (12)$$

можно привести к предыдущему, рассматривая y как независимое переменное и x как известную функцию; в самом деле, из него получаем:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\varphi(y)},$$

и следовательно,

$$x = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\varphi(y)} + C.$$

Вообще, если дифференциальное уравнение первого порядка решено относительно производной от неизвестной функции, то часто бывает удобно представлять его в дифференциальном обозначении:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0; \quad (13)$$

в таком виде не предreshается вопрос о выборе независимого переменного, которым может быть как x , так и y . Если мы хотим ввести вместо x и y новые переменные u и v , то достаточно заменить в уравнении (13) x, y, dx, dy их выражениями через u, v, du, dv . Заметим также, что можно, не меняя интегралов уравнения (13), умножать или делить обе части уравнения на один и тот же множитель $\mu(x, y)$; надо только принять во внимание решения уравнения $\mu(x, y) = 0$, которые при этом могут или появиться, или исчезнуть. Оба частных случая, которыми мы только что занимались, связаны с более общим приемом *разделения переменных*. Если дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$X dx + Y dy = 0, \quad (14)$$

где X и Y зависят только, соответственно, от x и y , то говорят, что *переменные разделены*. Уравнение интегрируется в квадратурах, так как, полагая

$$U = \int_a^x X dx + \int_v^y Y dy,$$

мы можем представить это уравнение в виде $dU = 0$; его общий интеграл есть $U = C$.

Уравнение

$$X Y_1 dx + X_1 Y dy = 0, \quad (15)$$

где X и X_1 зависят только от x , а Y и Y_1 зависят только от y , можно привести к предыдущему виду, разделив обе части на $X_1 Y_1$. Заметим на этом примере, что мы отбрасываем, таким образом, решения двух уравнений: $X_1 = 0, Y_1 = 0$. В самом деле, ясно, что если $y = b$ есть решение уравнения $Y_1 = 0$, то $y = b$ есть интеграл данного уравнения, тогда как он, вообще, не содержится в общем интеграле нового уравнения.

364. Однородное уравнение. Всякое уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (16)$$

где правая часть есть однородная функция *нулевой степени*, называется *однородным уравнением*. Его можно привести к интегрируемому виду, полагая $y = ux$, так что новые переменные будут x и u ; в самом деле, мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

и уравнение (16) обращается в

$$x \frac{du}{dx} + u = f(u).$$

Переменные можно разделить, представив это уравнение в виде:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u},$$

и общий интеграл получается квадратурою:

$$x = C e^{\int \frac{du}{f(u) - u}}; \quad (17)$$

достаточно заменить в нем u через $\frac{y}{x}$, чтобы иметь уравнение интегральных кривых данного уравнения (16)*.

Общее уравнение этого семейства кривых имеет вид:

$$x = C \varphi \left(\frac{y}{x} \right),$$

где C — произвольное постоянное. Они все подобны между собою, причем начало координат есть центр подобия, а меняется только отношение подобия в самом деле, предыдущее уравнение можно получить из уравнения

$$x = \varphi \left(\frac{y}{x} \right),$$

изменяя в нем x и y , соответственно, в $\frac{x}{C}$ и $\frac{y}{C}$. Обратно, пусть будет дано какое-нибудь семейство кривых, подобных относительно начала координат, соответствующее дифференциальное уравнение будет однородным уравнением первого порядка. В этом можно было бы убедиться вычислением, но результат очевиден и непосредственно; в самом деле, касательные к различным кривым этого семейства в точках пересечения этих кривых с прямою, выходящею из начала координат, должны быть параллельны между собою, и следовательно, угловой коэффициент y' касательной должен зависеть только от отношения $\frac{y}{x}$.

К однородному виду можно привести уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f \left(\frac{ax + b + c}{a'x + b'y + c'} \right), \quad (18)$$

где a, b, c, a', b', c' — произвольные коэффициенты, а b и b' не равны

* Уравнение (16) допускает в качестве интеграла также и прямые $y = mx$, где m — корень уравнения: $m = f(m)$. Эти прямые могут заключаться в общем интеграле (как в случае уравнения $x + yy' = 0$), а могут представлять и особые интегралы ($xy'^2 = y$).