

Э. Гурса

**Курс математического
анализа**

**Т. 1. Ч. 2. Разложение в ряды.
Геометрические приложения**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э1 **Э. Гурса**
Курс математического анализа: Т. 1. Ч. 2. Разложение в ряды. Геометрические приложения / Э. Гурса – М.: Книга по Требованию, 2021. – 233 с.

ISBN 978-5-458-25176-1

По объему это руководство является одним из наиболее полных в современной мировой математической литературе. В то же время излагаемые факты выбраны не по принципу энциклопедичности, выбор проникнут одной руководящей мыслью - дать необходимый материал, на котором основывается разработка наиболее важных проблем современной науки

ISBN 978-5-458-25176-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ

Г л а в а VIII.

РЯДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

	<i>Стр.</i>
I. Признаки сходимости	9
148. Общие замечания	9
149. Ряды с положительными членами	10
150. Признаки Коши и Даламбера	11
151. Различные замечания	11
152. Применение наибольшего из пределов	13
153. Теорема Коши	14
154. Логарифмические признаки	17
155. Признак Раабе и Дюамеля	19
156. Абсолютно сходящиеся ряды	23
157. Ряды условно сходящиеся или полусходящиеся	25
158. Признак Абеля	26
II. Ряды с мнимыми членами. Кратные ряды	28
159. Определения	28
160. Умножение рядов	29
161. Двойные ряды	30
162. Кратные ряды	35
163. Обобщение теоремы Коши	36
164. Кратные ряды с переменными членами	37
III. Бесконечные произведения	38
165. Определения и общие замечания	38
166. Абсолютно сходящиеся произведения	39
167. Равномерно сходящиеся произведения	41
168. Действительные бесконечные произведения	42
169. Определитель бесконечно большого порядка	45
Упражнения	46

Г л а в а IX.

ЦЕЛЫЕ РЯДЫ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ.

I. Ряд Тейлора. Общие замечания	47
170. Ряд Тейлора	47
171. Ряды для $\ln(1+x)$ и $\ln(1+x)^m$	50
II. Целые ряды с одним переменным	54
172. Область сходимости	54
173. Непрерывность целого ряда	56
174. Последовательные производные от целого ряда	58
175. Второе доказательство	61
176. Распространение формулы Тейлора	63
177. Усиливающие функции	64
178. Подстановка ряда в ряд	67
179. Деление целых рядов	70
180. Разложение $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$	72

	<i>Стр.</i>
III. Целые ряды	73
181. Область сходимости	73
182. Свойства целых рядов	75
183. Усиливающие функции	78
IV. Неявные функции. Аналитические кривые и поверхности	80
184. Неявная функция одного переменного	80
185. Общая теорема	83
186. Формула Лагранжа	85
187. Обращение функций	87
188. Аналитические функции	87
189. Аналитические кривые	89
190. Двойные точки	91
191. Аналитические поверхности	93
V. Тригонометрические ряды. Ряды полиномов	95
192. Ряды Фурье	95
193. Исследование интеграла $\int_a^b f(x) \frac{\sin nx}{\sin x} dx$	97
194. Функции, разложимые в ряд Фурье	102
195. Примеры	105
196. Различные обобщения	106
197. Разложение непрерывной функции. Теорема Вейерштрасса	108
Упражнения	109

Г л а в а X.

ТЕОРИЯ ОГИБАЮЩИХ. ПРИКОСНОВЕНИЕ.

I. Огибающие кривые и поверхности	112
198. Разыскание огибающих	112
199. Огибающая прямой линии	116
200. Огибающая окружности	117
201. Поверхности с одним параметром	118
202. Поверхности, зависящие от двух параметров	119
203. Развертывающиеся поверхности	121
204. Дифференциальные уравнения развертывающихся поверхностей	123
205. Огибающая семейства кривых двойной кривизны	124
II. Прикосновение двух кривых. Прикосновение кривой с поверхностью	127
206. Прикосновение плоских кривых	127
207. Порядок прикосновения	129
208. Соприкасающиеся кривые	131
209. Свойства соприкасающихся кривых	133
210. Прикосновение двух пространственных кривых	134
211. Соприкасающиеся кривые	137
212. Прикосновение кривой с поверхностью	138
213. Прямые, соприкасающиеся с данной поверхностью	140
Упражнения	141

Г л а в а XI.

КРИВЫЕ ДВОЙНОЙ КРИВИЗНЫ.

I. Соприкасающаяся плоскость	143
214. Определение и уравнение	143
215. Стационарная соприкасающаяся плоскость	145
216. Стационарные касательные	146

	<i>Стр.</i>
II. Кривизна и кручение. Развертки	148
217. Сферическая индикатриса	148
218. Радиус кривизны	150
219. Главная нормаль. Центр кривизны	151
220. Полярная прямая. Полярная поверхность	153
221. Кручение	153
222. Формулы Френе	157
223. Разложение координат x, y, z по степеням s	158
224. Естественное (внутреннее) уравнение кривой	160
225. Развертывающие и развертки	162
226. Винтовые линии	164
227. Кривые Бертрана	166
228. Соприкасающийся шар	167
III. Семейства прямых линий	168
229. Линейчатые поверхности	168
230. Конгруэнция. Фокальные поверхности	172
231. Конгруэнции нормалей	174
231a. Теорема Малюса	176
232. Комплексы	177
Упражнения	179

Г л а в а XII.

ПОВЕРХНОСТИ.

I. Кривизна кривых на поверхности	182
233. Основная формула. Теорема Менье	182
234. Две основные квадратичные формы	187
235. Теорема Эйлера. Индикатриса	189
236. Главные радиусы кривизны	191
II. Асимптотические линии. Линии кривизны	194
237. Асимптотические линии	194
238. Асимптотические линии линейчатых поверхностей	197
239. Сопряженные линии	198
240. Линии кривизны	200
241. Развертка поверхности	203
242. Формулы Родрига	205
243. Теорема Иоахимстала	206
244. Теорема Дюпена	207
245. Геодезическое кручение	209
246. Приложение к некоторым классам поверхностей	211
III. Соответствие между точками двух поверхностей	212
247. Сферическое представление	212
248. Наложение поверхностей	214
249. Поверхности, налагающиеся на плоскость	217
250. Геодезическая кривизна. Геодезические линии	220
251. Полная кривизна. Теорема Гаусса	222
252. Конформные преобразования	223
253. Конформное отображение плоскости на плоскость	225
254. Географические карты	226
Упражнения	228
Указатель	232

ГЛАВА VIII. РЯДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

I. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ.

148 Общие замечания. Выше (§ 5) мы имели общие условия сходимости ряда. На практике, для того чтобы узнать, является ли данный ряд сходящимся или расходящимся, всего чаще пользуются признаками менее общими, но зато более удобными для применения. Мы приведем из них лишь наиболее употребительные, которые оказываются достаточными для большинства приложений. Сначала мы сделаем несколько замечаний, которые непосредственно выводятся из самого определения сходимости:

1) Если мы умножаем все члены ряда на постоянное число a , отличное от нуля, то новый ряд сходится или расходится одновременно с первым; если первый ряд сходится и имеет суммой S , то сумма второго ряда равна aS .

2) Если мы имеем два сходящихся ряда:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots, \quad (2)$$

суммы которых, соответственно, равны S и S' , то новый ряд, получаемый их почленным сложением,

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n) + \dots, \quad (3)$$

сходится и имеет суммой $S + S'$. Аналогичный результат мы имеем, складывая почленно p сходящихся рядов.

3) Если мы изменим значения конечного числа членов ряда, то новый ряд сходится или расходится одновременно с первым, так как это изменение эквивалентно увеличению или уменьшению всех сумм S_n , начиная с достаточно большого значения n , на некоторое постоянное. В частности, ряд является сходящимся или расходящимся одновременно с рядом, который мы получаем, отбрасывая некоторое число членов начиная с первого.

4) Пусть будут S — сумма сходящегося ряда, S_n — сумма $n + 1$ первых членов этого ряда, а R_n — сумма ряда, начинающегося с члена u_{n+1} ; если мы возьмем за приближенное значение S сумму S_n $n + 1$ первых членов, то ошибка, которую мы делаем, очевидно, равна R_n . Так как S_n имеет предел S , когда n неограниченно возрастает, то разность R_n стремится к нулю, и мы всегда можем взять, по крайней мере, теоретически, достаточно большое число членов, чтобы ошибка,

которую мы делаем, заменяя S через S_n , была меньше любого наперед заданного числа. Достаточно знать верхний предел R_n , чтобы оценить полученное приближение. Ясно, что на практике лишь те ряды являются пригодными для фактического вычисления, у которых R_n достаточно быстро стремится к нулю.

149. Ряды с положительными членами. Ряды, все члены которых положительны, имеют большое значение, и мы начнем с их рассмотрения. В каждом таком ряде сумма S_n возрастает вместе с n ; поэтому для того, чтобы ряд был сходящимся, достаточно, чтобы при всяком n эта сумма S_n оставалась меньшею некоторого определенного количества. Самый общий прием для решения вопроса о сходимости или расходимости ряда состоит в сравнении предложенного ряда с другим рядом, уже исследованным ранее. Этот прием основан на двух следующих предложениях:

1. Если все члены какого-нибудь знакоположительного ряда соответственно меньше или равны членам другого знакоположительного сходящегося ряда, то и первый ряд также сходящийся.

В самом деле, сумма S'_n первых n членов предложенного ряда, очевидно, меньше суммы S' второго ряда; следовательно, эта сумма S'_n имеет предел S , меньший S' .

2. Если все члены какого-нибудь знакоположительного ряда соответственно больше членов другого знакоположительного расходящегося ряда, то первый ряд также расходящийся.

В самом деле, сумма n первых членов первого ряда больше суммы n первых членов второго ряда, и, следовательно, она неограниченно возрастает вместе с n .

Можно также сравнивать два ряда другим способом, основываясь на следующей лемме. Пусть будут

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (U)$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (V)$$

два знакоположительных ряда. Если ряд (U) сходящийся, и если, начиная с некоторого указателя n , мы постоянно имеем $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$, то ряд (V) также сходящийся. Если ряд (U) расходящийся, и если, начиная с некоторого указателя n , мы постоянно имеем $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$, то ряд (V) также расходящийся.

Чтобы доказать первую часть предложения, предположим, что неравенство $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$ удовлетворяется для $n \geq p$. Так как, умножив все члены ряда на постоянный множитель, мы не изменим ни сходимости ряда, ни отношения любого члена ряда к предыдущему члену, то мы можем предположить, что $v_p < u_p$; тогда мы будем, очевидно, иметь $v_{p+1} < u_{p+1}$, затем $v_{p+2} < u_{p+2}$, и т. д. Следовательно, ряд (V) — сходящийся. Вторая часть леммы доказывается таким же способом.

Таким образом, если нам дан знакоположительный ряд, характер которого относительно его сходимости известен то, пользуясь предыдущими предложениями, мы можем сравнивать с ним другие знакополо-

жительные ряды; в зависимости от того, будем ли мы сравнивать самые члены или только отношения двух последовательных членов, мы получим два предложения, которые позволят в некоторых случаях убедиться в сходимости или расходимости этого второго ряда.

150. Признаки сходимости Коши и Даламбера. Простейший ряд, которым можно воспользоваться для сравнения с ним других рядов, есть геометрическая прогрессия с знаменателем r ; эта прогрессия сходящаяся, если $r < 1$, и расходящаяся, если $r > 1$. Сравнение знакоположительного ряда с геометрической прогрессией приводит к следующему признаку сходимости, принадлежащему Коши:

Если в знакоположительном ряде количество $\sqrt[n]{u_n}$, начиная с некоторого члена, постоянно меньше некоторого определенного числа, меньшего единицы, то ряд — сходящийся; если же $\sqrt[n]{u_n}$, начиная с некоторого члена, постоянно больше единицы, то ряд — расходящийся.

В самом деле, в первом случае мы имеем $\sqrt[n]{u_n} < k < 1$, и, следовательно, $u_n < k^n$. Таким образом, начиная с некоторого члена, все дальнейшие члены ряда меньше членов геометрической прогрессии с знаменателем k , меньшим единицы. Напротив, во втором случае мы имеем $\sqrt[n]{u_n} > 1$ и $u_n > 1$; следовательно, общий член ряда не стремится к нулю.

Предыдущий признак применим всякий раз, когда $\sqrt[n]{u_n}$ стремится к пределу; в этом случае мы получаем следующее предложение:

Если, при неограниченном возрастании n , $\sqrt[n]{u_n}$ стремится к некоторому пределу l , то ряд будет сходящимся, если l меньше единицы, и расходящимся, если l больше единицы.

При $l = 1$ характер ряда остается сомнительным, за исключением того случая, когда $\sqrt[n]{u_n}$ стремится к единице, оставаясь больше ее: в этом случае ряд — расходящийся.

Точно так же, сравнивая отношение двух последовательных членов знакоположительного ряда с отношением двух последовательных членов геометрической прогрессии, мы приходим к признаку сходимости Даламбера:

Если в знакоположительном ряде, начиная с некоторого члена, отношение каждого члена к предыдущему остается меньшим некоторого определенного числа, меньшего единицы, то ряд — сходящийся. Если это отношение, начиная с некоторого члена, больше единицы, то ряд — расходящийся.

Отсюда следует, что если при неограниченном возрастании n отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится к пределу l , то ряд — сходящийся, если $l < 1$, и расходящийся, если $l > 1$. Единственный сомнительный случай — тот, когда $l = 1$; но если отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится к единице, оставаясь больше ее, то ряд — расходящийся.

151. Различные примечания. I. Признак сходимости Коши применим в более широких случаях, чем признак сходимости Даламбера. В самом деле, предположим, что, начиная с некоторого места, члены данного ряда меньше членов неко-

торой убывающей геометрической прогрессии, т. е. что при n , большем некоторого определенного числа p , общий член u_n ряда будет меньше Ar^n , где A — постоянное, и r меньше единицы. Такой ряд, по предыдущему (§ 150), будет

сходящимся. В этом случае, $\sqrt[n]{u_n} < rA^{\frac{1}{n}}$, и при неограниченном возрастании n левая часть неравенства имеет предел r . Таким образом, обозначая через k некоторое постоянное число, заключающееся между r и 1, мы будем иметь, начиная с некоторого члена, $\sqrt[n]{u_n} < k$. Следовательно, здесь всегда применим признак сходимости Коши, а между тем может случиться, что отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будет принимать значения, большие единицы, как бы далеко мы ни шли в данном ряде. Возьмем, например, ряд

$$1 + r|\sin \alpha| + r^2|\sin 2\alpha| + \dots + r^n|\sin n\alpha| + \dots,$$

где $r < 1$, и α — какое-нибудь постоянное. Мы имеем $\sqrt[n]{u_n} = r\sqrt[n]{|\sin n\alpha|} < r$, а между тем отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = r \left| \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin n\alpha} \right|$$

при неограниченном возрастании n может принимать бесконечное множество различных значений, большие единицы.

Тем не менее полезно удержать и признак сходимости Даламбера, которым часто удобнее пользоваться, чем признаком сходимости Коши. Так, в ряде

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots$$

отношение любого члена к предыдущему, равное $\frac{x}{n+1}$, при неограниченном возрастании n имеет пределом нуль, тогда как непосредственно не видно, какие значения принимает $\sqrt[n]{u_n} = \frac{x}{1 \cdot 2 \dots n}$ при весьма больших значениях n .

II. Если, применяя одно из предыдущих правил, мы нашли, что, начиная с некоторого места, все члены ряда соответственно меньше членов убывающей геометрической прогрессии

$$A, Ar, Ar^2, \dots, Ar^n, \dots,$$

то легко найти предел погрешности, получающейся при замене суммы ряда суммой его m первых членов; эта погрешность, очевидно, меньше суммы прогрессии

$$Ar^m + Ar^{m+1} + Ar^{m+2} + \dots = \frac{Ar^m}{1-r}.$$

III. Если каждое из выражений $\sqrt[n]{u_n}$ и $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ имеет пределы, то оба эти предела необходимо равны между собою. В самом деле, рассмотрим вспомогательный ряд

$$u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots + u_nx^n \dots, \quad (4)$$

где x положительно. В этом ряде отношение любого члена к предыдущему имеет пределом lx , где l есть предел отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; следовательно, ряд (4) сходящийся, если $x < \frac{1}{l}$, и расходящийся, если $x > \frac{1}{l}$. Точно так же, если l' есть предел выражения $\sqrt[n]{u_n}$, то выражение $\sqrt[n]{u_n x^n}$ имеет пределом $l'x$, так что ряд (4) будет сходящимся, если $x < \frac{1}{l'}$, и расходящимся, если $x > \frac{1}{l'}$. Чтобы оба

эти признака сходимости не противоречили один другому, очевидно, должно быть $l=l'$; если бы, например, было $l > l'$, то всякое число x , содержащееся между $\frac{1}{l}$ и $\frac{1}{l'}$, согласно признаку сходимости Коши делало бы ряд (4) сходящимся, тогда как, согласно признаку Даламбера, то же самое число делало бы этот ряд расходящимся.

IV. Можно даже показать, что если $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится к пределу l , то $\sqrt[n]{u_n}$ также стремится к тому же самому пределу*. В самом деле, предположим, что начиная с некоторого члена, все отношения

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}, \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}, \dots, \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}}$$

содержатся между $l-\epsilon$ и $l+\epsilon$, где ϵ — некоторое положительное число, которое мы можем предположить сколь угодно малым, если только n взято достаточно большим. Мы будем иметь:

$$(l-\epsilon)^p < \frac{u_{n+p}}{u_n} < (l+\epsilon)^p,$$

или

$$\frac{1}{u_n^{n+p}} (l-\epsilon)^{n+p} < \frac{p}{n+p} < \frac{1}{u_{n+p}} < \frac{1}{u_n^{n+p}} (l+\epsilon)^{n+p}.$$

Если n будет сохранять свое значение, а p будет неограниченно возрастать, то крайние члены этого двойного неравенства будут стремиться соответственно к $l-\epsilon$ и $l+\epsilon$. Таким образом мы будем иметь при всяком достаточно большом значении m :

$$l-2\epsilon < \sqrt[m]{u_m} < l+2\epsilon^{**};$$

так как ϵ произвольно, то отсюда следует, что $\sqrt[m]{u_m}$ имеет пределом число l .

Должно заметить, что обратное предложение неверно. Возьмем, например, ряд

$$1, a, ab, a^2b, a^2b^2, \dots, a^n b^{n-1}, a^n b^n, \dots,$$

где a и b — два различных числа. При неограниченном возрастании n выражение $\sqrt[n]{u_n}$ имеет пределом ab , тогда как отношение любого члена к предыдущему попеременно равно a или b .

Предыдущее предложение может быть полезным при нахождении предела некоторых выражений, имеющих неопределенный вид. Например, из него следует, что $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$ неограниченно возрастает вместе с n , так как отношение $\frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}$ возрастает неограниченно. Точно так же можно убедиться, что $\sqrt[n]{n}$ и $\sqrt[n]{1 \cdot n}$ имеют пределами единицу.

152. Применение наибольшего из пределов. Коши представил предыдущее предложение в более общем виде. Пусть будет a_n общий член знакоположительного ряда. Рассмотрим последовательность:

$$a_1, a_2^{\frac{1}{2}}, a_3^{\frac{1}{3}}, \dots, a_n^{\frac{1}{n}}, \dots \quad (5)$$

Если члены этой последовательности не имеют верхнего предела, то общий член a_n не стремится к нулю, и данный ряд расходящийся. Предположим, что все члены последовательности (5) меньше некоторого определенного числа, и пусть будет в этом случае ω наибольший из пределов членов этой последовательности.

* Коши, Cours d'Analyse.

** При достаточно большом значении n крайние члены предыдущего неравенства будут отличаться от своих пределов менее чем на ϵ . (Ред.)

Ряд $\sum a_n$ — сходящийся, если ω меньше единицы, и расходящийся, если ω больше единицы.

Чтобы доказать первую часть предложения, обозначим через $1 - \alpha$ некоторое число, заключающееся между ω и 1. По самому определению наибольшего из пределов (§ 4), существует только конечное число членов последовательности (5), больших $1 - \alpha$; следовательно, можно найти такое целое число p , чтобы при всяком значении числа n , большем p , было $\sqrt[n]{a_n} < 1 - \alpha$; поэтому ряд $\sum a_n$ будет сходящимся. Напротив, если $\omega > 1$, то существует бесконечное множество членов последовательности (5), больших $1 + \alpha$, где $1 + \alpha$ есть какое-нибудь число, заключающееся между 1 и ω , и, следовательно, есть бесконечное множество значений указателя n , при которых a_n больше единицы: следовательно, ряд $\sum a_n$ — расходящийся. Сомнительным остается только тот случай, когда $\omega = 1$.

153. Теорема Коши. Когда $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ или $\sqrt[n]{u_n}$ стремятся к единице, но не остаются постоянно большими единицы, то при помощи признаков Даламбера и Коши нельзя узнать, будет ли данный ряд сходящимся или расходящимся. В этом случае нужно сравнивать данный ряд с другими рядами, обладающими тем же самым свойством, и характер которых известен. Следующее предложение, которое Коши вывел из рассмотрения определенных интегралов, позволяет решить вопрос о характере ряда во многих тех случаях, когда применение предыдущих признаков сходимости не приводит к определенному результату.

Пусть будет $\varphi(x)$ функция, которая, начиная с некоторого значения a переменного x , положительна, постоянно убывает и при неограниченном возрастании x стремится к нулю. Кривая $y = \varphi(x)$ имеет ось x асимптотой; определенный интеграл $\int_a^l \varphi(x) dx$ при неограниченном возрастании l может или стремиться к конечному пределу или расти неограниченно. Теорема Коши состоит в том, что ряд

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \dots + \varphi(a+n) + \dots \quad (6)$$

— сходящийся, если предыдущий интеграл стремится к пределу, и расходящийся в противном случае.

В самом деле, предположим, что x заключается между $a+p-1$ и $a+p$, где p — целое положительное число. Из двойного неравенства:

$$\varphi(a+p-1) > \varphi(x) > \varphi(a+p)$$

мы получаем, интегрируя в пределах $a+p-1$, $a+p$:

$$\varphi(a+p-1) > \int_{a+p-1}^{a+p} \varphi(x) dx > \varphi(a+p).$$

Полагаем последовательно $p=1, 2, \dots, n$ и складываем полученные неравенства; мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi(a) + \varphi(a+1) + \dots + \varphi(a+n-1) &> \int_a^{a+n} \varphi(x) dx, \\ \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \dots + \varphi(a+n) &< \int_a^{a+n} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$