Т. Леви-Чивита, У. Амальди

# Курс теоретической механики

## Том 2. Часть 2

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Т11

**Т. Леви-Чивита**
Т11 Курс теоретической механики: Том 2. Часть 2 / Т. Леви-Чивита, У. Амальди – М.: Книга по Требованию, 2013. – 554 с.

**ISBN 978-5-458-34269-8**

Курс теоретической механики.
Том 2. Динамика систем с конечным числом степеней свободы. Часть 2.

**ISBN 978-5-458-34269-8**

*Глава VII*

# ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

# ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАДАЧИ

## § 1. Основные уравнения

1. При изучении динамики твердого тела мы обратимся прежде всего к основным принципам и руководящим идеям общей теории, изложенной в гл. V и VI. Эта часть динамики системы, по самой природе физических задач, рассматриваемых в ней, приводит к методам и результатам, не только интересным с теоретической точки зрения, но и имеющим важные практические приложения.

В этой главе, после установления общих уравнений, на которых основана вся динамика неизменяемых систем, мы будем рассматривать, в частности, более простые случаи, а именно твердые тела, вращающиеся вокруг некоторой оси или движущиеся параллельно неподвижной плоскости. В двух следующих главах мы рассмотрим классические вопросы, относящиеся к движению твердого тела около одной из своих точек, с приложением их к гироскопам (гл. VIII), и некоторые типичные задачи о качении (гл. IX) и закончим указанием на исследования Вольтерра о неизменяемых системах с циклическими внутренними движениями.

2. Для всякого твердого тела $S$ с какими угодно связями и при любых действующих на него силах в любой момент в течение всего времени движения, как и для всякой другой материальной системы, сохраняют свое значение оба *основных уравнения* (гл. V, п. 16):

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} + \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{M}, \tag{2}$$

где, как мы уже знаем, через $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{K}$ обозначены количество движения и результирующий момент количеств движения твердого тела *относительно какой-нибудь* точки, через $\boldsymbol{v}'$ — скорость (абсолютная) этой точки и, наконец, через $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ — результирующая сила и результирующий момент относительно той же самой точки всех внешних сил, действующих на твердое тело. Если за центр приведения вместо какой-нибудь движущейся точки принимается неподвижная точка ($\boldsymbol{v}' = 0$) или центр тяжести твердого тела ($\boldsymbol{v}'$ параллельна $\boldsymbol{Q}$), то второе основное уравнение при тех же обозначениях приводится к более простому виду

$$\frac{dK}{dt} = M. \tag{2'}$$

Но предположение о неизменяемости системы $S$ влечет за собой следствие, аналогичное указанному в статике для основных уравнений равновесия твердых тел (т. I, гл. XIII, § 2) и заключающееся в том, что *в основных уравнениях* (1) *и* (2) *или* (1), (2′) *мы имеем не только систему уравнений, необходимо выполняющихся в течение всего времени движения твердого тела, но и совокупность условий, достаточных для определения* (*при заданных начальных условиях*) *этого движения.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть различные типичные случаи движения свободного или несвободного твердого тела. Мы ограничимся здесь рассмотрением движения свободного твердого тела и движения твердого тела с неподвижной точкой или осью.

В первом случае основные уравнения (1), (2) или (1), (2′) после проектирования на оси системы координат дадут шесть скалярных уравнений, т. е. как раз столько, сколько степеней свободы имеет твердое тело.

Если же речь идет о твердом теле, закрепленном в некоторой точке $O$ и поэтому имеющем три степени свободы, то в качестве данных в этом случае будут фигурировать, как это было и в статическом случае (т. I, гл. XIII, п. 5), только прямо приложенные (т. е. активные) внешние силы, но не реакция, возникающая в неподвижной точке. Поэтому мы будем считать, что результирующий момент $\boldsymbol{M}$ внешних сил *относительно точки* $O$ известен (или, точнее, может быть выражен в функции от положения и состояния движения тела), результирующая же сила $\boldsymbol{R}$ заранее неизвестна, так как она включает в себя неизвестную реакцию в неподвижной точке. Но во втором основном уравнении, отнесенном к точке $O$, содержится только $\boldsymbol{M}$, так что, проектируя это уравнение на оси, мы получим три скалярных уравнения, достаточных для определения движения системы.

Наконец, если твердое тело имеет неподвижную ось, то речь будет идти о системе только с одной степенью свободы, поэтому достаточно будет только одного уравнения, чтобы выразить в функции времени единственную обобщенную координату — угол, определяющий положение тела при вращении его около оси. Таким уравнением, содержащим только приложенные силы, а не реакции, возникающие в точках закрепления оси, здесь так же, как и в статическом случае (т. I, гл. XIII, пп. 6—10), будет скалярное уравнение моментов относительно неподвижной оси.

На основании предыдущих соображений основные уравнения можно назвать *динамическими уравнениями движения твердого тела.*

**3. Оси, движущиеся как угодно в пространстве.** В динамике твердого тела согласно сказанному в п. 17 гл. V часто оказывается полезным относить основные уравнения вместо галилеевых осей к осям $Oxyz$, движущимся в пространстве по произвольному закону, в силу чего эти уравнения принимают вид (гл. V, п. 17)

$$\dot{Q} + \omega' \times Q = R, \tag{3}$$

$$\dot{K} + v' \times Q + \omega' \times K = M, \tag{4}$$

где через $\dot{Q}$, $\dot{K}$ обозначены производные по времени от $Q$ и $K$ относительно осей $Oxyz$, через $\omega'$ — угловая скорость движущихся осей относительно первоначальной галилеевой системы и, как и выше, через $v'$ — скорость центра приведения моментов. Если, как сказано в п. 17 гл. V, этот центр приведения выбирается именно в начале $O$ подвижных осей, то $v'$ и $\omega'$ будут характеристическими векторами (абсолютного) движения этих осей.

Естественно, что это движение системы отсчета $Oxyz$ будет в каждом отдельном случае задаваться таким способом, какой лучше будет подходить к рассматриваемой задаче. Здесь, в общем случае, мы можем добавить только два замечания, столь же естественные, сколь и важные.

Во-первых, если, как и в предыдущем пункте, центр приведения моментов совпадает с центром тяжести твердого тела ($v' \times Q = 0$) или если речь идет о твердом теле, закрепленном в одной точке (в этой закрепленной точке $v' = 0$), то второе основное уравнение (отнесенное к подвижным осям) примет более простой вид:

$$\dot{K} + \omega' \times Q = M. \tag{4'}$$

Во-вторых, мы будем иметь более простой и, можно сказать, более естественный закон движения системы отсчета $Oxyz$, если примем эту систему неизменно связанной с твердым телом. В этом предположении сообразно с выбором центра приведения для моментов будут сохранять также свое значение уравнения (3) и (4) или (3) и (4'); *вектор $\omega'$ будет обозначать здесь угловую скорость (абсолютную) самого твердого тела.*

Другие оси, подвижные не только в пространстве, но и в теле, будут определены в § 8 гл. VIII. Эту возможность разнообразного выбора осей в различных частных случаях мы оценим при дальнейшем изложении этой главы и в особенности в гл. VIII и IX.

## § 2. Понятие о кинетостатике неизменяемой системы

4. С технической точки зрения задача о вычислении реакций и, следовательно, *динамических давлений*, на которые мы указывали в п. 28 гл. V, приобретает наибольший интерес в случае твердого

тела или в случае более сложной материальной системы, в которую твердое тело входит как составная часть. Чтобы убедиться в этом, достаточно обратить внимание на то, насколько важно для конструктора механизмов знать давления, испытываемые деталью $C$ машины (как в условиях установившегося движения, так и при пуске в ход или при случайных перегрузках) и происходящие от связей (опор, направляющих, осей, подшипников, подпятников и др.), которые соединяют деталь $C$ с другими частями машины.

В условиях равновесия вычисление реакций выполнялось уже в элементарной статике для различных типов твердых тел со связями (т. I, гл. XIII, §§ 3, 4); уже тогда мы видели, что, пользуясь гипотезой абсолютно твердого тела, мы не в состоянии были в общем случае однозначно получить местное распределение реакций, но могли определить только характеристические элементы их совокупности, т. е. результирующую силу и результирующий момент (относительно заданного центра приведения). Тогда же было отмечено, что такой неопределенности нельзя избежать, если оставаться в рамках механики твердого тела и не обращаться к представлениям теории упругости, в которой принимаются во внимание малые деформации, возникающие в естественных твердых телах под действием внешних сил.

Совершенно ясно, что аналогичные обстоятельства должны иметь место также и в динамическом случае, который мы будем теперь рассматривать; поэтому мы с самого начала ограничим задачу определения реакций, действующих на твердое тело, вычислением их результирующей силы и результирующего момента.

Легко видеть, что определение этих суммарных элементов оказывается почти непосредственным всякий раз: а) когда указаны, как в статике, активные силы; б) когда, кроме того, вполне известно движение системы.

Отметим здесь, как это уже было сделано в п. 28 гл. V, что условие а) будет всегда удовлетворено на основе прямых данных механической задачи, а условие б) включает в себя большей частью предварительное интегрирование системы дифференциальных уравнений, которое само по себе составляет более важную и, вообще говоря, более трудную задачу динамики. Однако достаточно представить себе технически наиболее простые случаи (маховики, балансиры, шатуны и т. п.), чтобы понять, как часто рассматриваемое нами движение твердого тела можно прямо считать известным.

Допустим поэтому, что оба условия, а) и б), удовлетворены, и среди внешних сил, действующих на заданное твердое тело $S$, будем различать силы прямо приложенные и реакции. Для прямо приложенных сил по предположению а) можно считать известными результирующую силу $R$ и результирующий момент $M$ относительно какой-нибудь точки $O$, которую будем предполагать совпадающей с центром тяжести или неподвижной. Для неизвестных реакций аналогичные векторы будем обозначать через $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}$.

Основные уравнения (1) и (2′) (последнее отнесено к центру приведения $O$, совпадающему с центром тяжести или неподвижному) дают непосредственно два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R} &= -R + \frac{dQ}{dt}, \\ \mathbf{M} &= -M + \frac{dK}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

которые и решают задачу.

Если из этих уравнений определить давления (прямо противоположные реакциям), то непосредственно видно, что последние складываются из статических давлений с результирующей силой $R$ и результирующим моментом $M$ и динамических давлений в собственном смысле слова с результирующей силой — $\mathbf{R}^{(d)}$ и результирующим моментом — $\mathbf{M}^{(d)}$, которые определяются равенствами

$$\mathbf{R}^{(d)} = \frac{dQ}{dt}, \quad \mathbf{M}^{(d)} = \frac{dK}{dt}, \tag{6}$$

так что имеем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R} &= -R + \mathbf{R}^{(d)}, \\ \mathbf{M} &= -M + \mathbf{M}^{(d)}. \end{aligned}\right\} \tag{5′}$$

Заметим, что сказанное до сих пор сохраняет свое значение для какой угодно материальной системы, а не только для твердого тела. Но если, как мы здесь это допускаем, речь идет о твердом теле, то оказывается более удобным для действительного определения общего характера распределения давлений принять систему отсчета, неизменно связанную с телом (с началом в центре тяжести или в закрепленной точке тела). Если, как это уже делалось несколько раз, мы выразим абсолютные производные от $Q$ и $K$ посредством производных относительно заранее выбранных осей, неизменно связанных с твердым телом, то уравнения (6) примут вид

$$\mathbf{R}^{(d)} = \dot{Q} + \omega \times Q, \quad \mathbf{M}^{(d)} = \dot{K} + \omega \times K, \tag{6′}$$

где $\omega$ обозначает угловую скорость твердого тела. Теперь, для того чтобы иметь в явной форме составляющие по подвижным осям векторов $\mathbf{R}^{(d)}$ и $\mathbf{M}^{(d)}$, мы должны только принять во внимание общие формулы (29′), (30′) из п. 15 гл. IV, учитывая при этом возможные особенности, которые могут быть в каждом отдельном случае.

Так как в уравнения (6′) входят $\dot{Q}$ и $\dot{K}$, то составляющие результирующей силы и результирующего момента динамических давлений выразятся через составляющие характеристических векторов $u$, $v$, $w$, $p$, $q$, $r$ и через их первые производные (а также, конечно, и через структурные постоянные $m$, $A$, $B$, $C$, $x_0$, $y_0$, $z_0$). Если это окажется возможным, то эти производные удобно исключить; вообще говоря, это удается сделать, используя дифференциальные уравнения движения. В этом случае результирующая сила и результирующий момент давлений выразятся посредством составляющих характеристических векторов движения твердого тела и активных сил [1].

Простой и особенно интересный пример приложения этих рассуждений будет изложен в § 3 при изучении вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

## § 3. Движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник и его применения

**5.** Твердое тело с неподвижной осью. Рассмотрим твердое тело $S$, вынужденное вращаться без трения вокруг неподвижной оси и находящееся под действием какой-нибудь системы сил.

Внешние силы приводятся здесь к силам, прямо приложенным (или активным), и к реакциям, возникающим в точках закрепления оси; перед нами типичная задача динамики, и мы будем предполагать, что при заданных прямо приложенных силах нам ничего заранее неизвестно о возможных реакциях и требуется определить движение тела. Так как система имеет только одну степень свободы, то достаточно получить одно уравнение, не зависящее от неизвестных реакций.

Обозначая через $\xi$ ось (неподвижную) вращения твердого тела и принимая центр $O$ приведения в какой-нибудь точке (неподвижной) оси $\xi$, мы будем иметь для нашего твердого тела два векторных уравнения (1) и (2′). Достаточно заметить, что возможные реакции приложены к точкам оси и потому их моменты относительно этой оси равны нулю, чтобы убедиться, что мы получим уравнение, определяющее движение, проектируя второе основное уравнение (2′) на ось $\xi$ или, иначе, применяя теорему о моменте количеств движения относительно оси $\xi$ (гл. V, п. 10). Обозначив через $M_\xi$ результирующий момент относительно оси $\xi$ *внешних активных сил*, получим уравнение

$$\frac{dK_\xi}{dt} = M_\xi \tag{7}$$

или, введя угол $\theta$, который достаточен для определения положения твердого тела при вращении его вокруг оси, и обозначив через $A$ момент инерции твердого тела относительно оси $\xi$ (гл. IV, п. 20),

$$A\ddot{\theta} = M_\xi. \tag{7'}$$

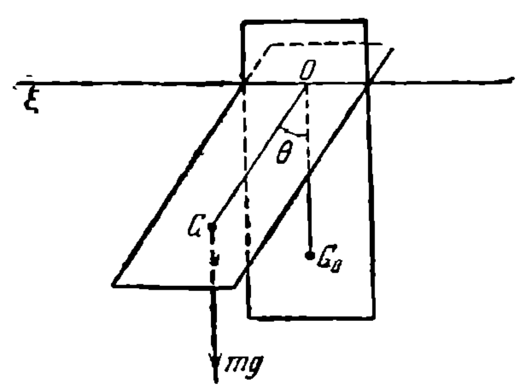
Осевой момент $M_\xi$, как и силы, прямо приложенные, от которых он происходит, можно рассматривать как известный и выраженный в функции от времени, а также от положения и от скоростей точек твердого тела, т. е. в конечном счете от $t$, $\theta$, $\dot{\theta}$. Таким образом, мы видим, что определение движения сводится к интегрированию дифференциального уравнения второго порядка, совершенно аналогичного тому, которое определяет движение материальной точки, движущейся по заданной траектории под действием силы с известной касательной составляющей $f$ (гл. I, § 1):

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s} \mid t).$$

Массе точки здесь соответствует момент инерции $A$, касательному ускорению $\ddot{s}$ — угловое ускорение $\ddot{\theta}$ и, наконец, результирующей $f$ касательных сил — результирующий момент $M_\xi$ активных сил относительно оси.

Естественно, что в особо важном случае, когда силы зависят только от положения, момент $M_\xi$ зависит только от $\theta$ (как $f$ — только от $s$) и уравнение (7′) будет интегрироваться посредством двух квадратур (гл. I, пп. 12 и 15).

6. Физический маятник. Физическим маятником называется всякое твердое тело, свободно вращающееся вокруг горизонтальной неподвижной оси и находящееся под действием одной силы тяжести. Обозначая через $\xi$ *ось подвеса* и через $G$ — центр тяжести маятника (фиг. 1), мы будем определять положение маятника в любой момент посредством угла $\theta$ (заключенного между $-\pi$ и $\pi$), составленного полуплоскостью $\xi G$ с вертикальной полуплоскостью, проходящей через ось $\xi$ и направленной вниз, и измеряемого от этой вертикальной полуплоскости. За положительное направление отсчета угла $\theta$ берется одно из двух возможных для него направлений. Так как веса отдельных точек твердого тела в их совокупности эквивалентны полному весу $mg$, приложенному в $G$, то момент $M_\xi$ совпадает здесь с осевым моментом этого полного веса. Линия действия полного веса перпендикулярна к оси (горизонтальной) $\xi$, следовательно, абсолютная величина $M_\xi$ равна произведению из $mg$ на кратчайшее расстояние между этими двумя прямыми, т. е. $|r \sin\theta|$, если $r$ есть расстояние (постоянное) центра тяжести $G$ от оси $\xi$. Далее, если примем во внимание, что вес постоянно стремится привести центр тяжести в вертикальную полуплоскость, направленную вниз (от которой отсчитываются углы), и, следовательно, создает восстанавливающий момент, то будет ясно, что $M_\xi$ всегда должен иметь знак, противоположный знаку $\theta$, а следовательно, и $\sin\theta$, так что по величине и по знаку будем иметь



Фиг. 1

$$M_\xi = -mgr \sin\theta.$$

Отсюда, применяя уравнение (7′) предыдущего пункта, заключаем, что уравнение движения физического маятника будет

$$A\ddot{\theta} = -mgr\sin\theta. \tag{8}$$

Теперь достаточно положить

$$\frac{A}{mr} = l, \tag{9}$$

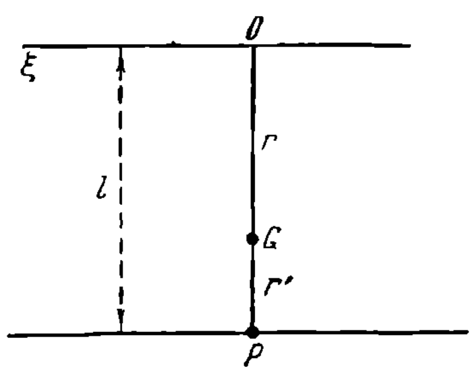
чтобы привести уравнение (8) к виду

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta, \tag{8′}$$

в котором мы узнаем уравнение, определяющее движение математического маятника длины $l$ (гл. I, п. 34).

Так как дифференциальные уравнения одинаковы, то одинаковыми будут также и интегралы (само собой разумеется, при тождественных начальных условиях), откуда и следует, что *физический маятник движется как математический маятник длиной $A/mr$.*

Наконец, этот результат можно проверить и прямо, не обращаясь к гл. I, на основании того соображения, что математический маятник является только предельным случаем тяжелого твердого тела, которое может вращаться вокруг горизонтальной оси. Для этого достаточно повторить только что изложенные рассуждения и представить себе, что маятник представляет собой материальную точку $P$ с массой $m$, соединенную с горизонтальной неподвижной осью $\xi$ посредством твердого стержня (длины $l$ и ничтожно малого веса), перпендикулярного к оси $\xi$ и свободно вращающегося вокруг нее. В этом случае имеем $A = ml^2$, $r = l$, поэтому уравнение движения (8) тотчас же принимает вид (8′); из сравнения уравнений (8) и (8′) вытекает справедливость сказанного выше.



Фиг. 2.

Длина $l$, определяемая из равенства (9), называется *приведенной длиной физического маятника.*

Обозначим через $O$ проекцию центра тяжести $G$ на ось $\xi$ и отложим на полупрямой $OG$ отрезок $OP = l$ (фиг. 2). Из только что сказанного следует, что точка $P$, принадлежащая физическому маятнику, колеблется так, как если бы она не принадлежала этому телу, а представляла собой свободно подвешенную на нити $OP$ массу $m$, т. е. математический маятник длины $OP = l$, подвешенный в точке $O$.

Точки $O$ и $P$ называются соответственно *центром подвеса* и *центром качаний* физического маятника, а прямая, параллельная оси $o\xi$ и проходящая через $P$, все точки которой колеблются как $P$, называется *осью качаний.*

Заметим еще, что ось качаний всегда находится на большем расстоянии от оси подвеса, чем центр тяжести. Действительно, если введем момент инерции твердого тела $A_0$ относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной $\xi$, то будем иметь (т. I, гл. X, п. 21)

$$A = A_0 + mr^2,$$

откуда на основании равенства (9) следует, что

$$l = \frac{A_0}{mr} + r,$$

а так как $A_0/mr$ всегда положительно, то имеем

$$l > r.$$

7. Теорема Гюйгенса. Предположим, что маятник устроен так, что его можно подвешивать также и за ось качаний $o$. Тогда можно показать, что *приведенной длиной опять будет* $l$, т. е. *если ось качаний становится осью подвеса, то первоначальная ось подвеса становится осью качаний.*

Чтобы доказать это свойство, вычислим приведенную длину $l'$ нашего маятника при втором расположении. Будем иметь

$$l' = \frac{A'}{mr'} = r' + \frac{A_0}{mr'},$$

где $A'$ означает момент инерции относительно новой оси подвеса $o$ и $r'$ — расстояние $G$ от $o$; достаточно принять во внимание очевидное тождество $l = r + r'$, чтобы придать этой формуле вид

$$l' = l - r + \frac{A_0}{m(l - r)}.$$

Но из выражения для $l$ предыдущего пункта следует, что

$$l - r = \frac{A_0}{mr}$$

или

$$-r + \frac{A_0}{m(l - r)} = 0.$$

Следовательно,

$$l' = l,$$

как мы и утверждали.

Обратно, *если маятник колеблется одинаково при любой из двух параллельных осей подвеса* (расположенных в одной и той же плоскости, но с противоположных сторон и на различном расстоянии от центра тяжести), т. е. *если приведенные длины* $l$ и $l'$ *совпадают, то их общая величина будет равна расстоянию между обеими осями* (теорема Гюйгенса).

Действительно, из соотношений

$$l = r + \frac{A_0}{mr}, \qquad l' = r' + \frac{A_0}{mr'}, \qquad l = l'$$

следует, что

$$(l - r) r = (l - r') r',$$

или

$$l (r - r') = r^2 - r'^2.$$

А так как, по предположению, расстояния $r$ и $r'$ двух осей от центра тяжести различны, то мы можем обе части равенства разделить на $r - r'$, после чего получим $l = r + r'$, что и требовалось доказать.

8. Экспериментальное определение ускорения $g$ силы тяжести. На теореме Гюйгенса основывается применение физического маятника для экспериментального определения ускорения силы тяжести. Для этого употребляется так называемый *оборотный маятник*. Он представляет собой физический маятник, с которым соединены две параллельные оси (ребра призм), содержащие в своей плоскости и на различном расстоянии от них центр тяжести маятника; кроме того, оси расположены так, что маятник может качаться около каждой из них совершенно одинаково. В силу предыдущей теоремы расстояние $l$ между обеими осями равно длине математического изохронного маятника, так что продолжительность $T$ одного простого качания при малых амплитудах будет приблизительно выражаться (гл. I, п. 38) так:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Так как $l$ и $T$ легко измеряются опытным путем ($l$ — посредством катетометра, $T$ — путем измерения продолжительности достаточно большого числа качаний), то предыдущая формула может служить для определения $g$.

9. Опытное определение моментов инерции. Второе приложение теоремы Гюйгенса состоит в практическом определении моментов инерции твердых тел.

Если нужно определить момент инерции твердого тела относительно данной оси $\xi$, то для этого достаточно заставить его качаться около этой оси.

Обозначая через $m'$ массу тела, через $r'$ — расстояние его центра тяжести $G'$ от оси, через $A$ — искомый момент инерции, через $T'$ — продолжительность одного размаха, будем иметь

$$T' = \pi \sqrt{\frac{A}{m'r'g}};$$

отсюда можно получить величину $A$, если, кроме $T'$, известны $m'$ и $r'$.