

Урусов Сергей Семенович

**О решении проблемы коня в
шахматах**

Читанные 16 октября 1865 г

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-1
ББК 84-5
С32

С32 **Сергей Семенович У.**
О решении проблемы коня в шахматах: Читанные 16 октября 1865 г / Урусов Сергей Семенович – М.: Книга по Требованию, 2023. – 39 с.

ISBN 978-5-519-78317-0

В примечании: Материал для этой статьи заимствован мной из известного сочинения К. А. Яниша: *Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs*. Jaenisch C.

ISBN 978-5-519-78317-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

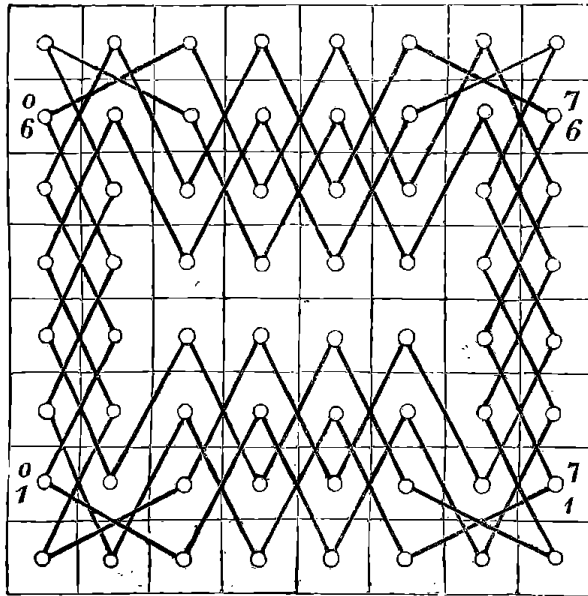
Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг — не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель — вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания — решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

$= 7$ $= 7$
 $= 1$ $= 6$: опять видимъ, что изъ восьми звеньевъ, кото-
 рыхъ надо начертить, 4 должны принадлежать $A+B$, и столько
 же $C+D$; а потому $A+B$ не > 56 , $C+D$ не < 8 . Если
 же построимъ остальные 48 звеньевъ такъ, чтобы ордината
 прибывала или убывала на 2, то получимъ, какъ показываетъ
 чертежъ 2, не одну сомкнутую цѣпь, а 4 многоугольника,
 въ 16 сторонъ каждый.

Черт. 2.



Этимъ построениемъ убѣждаемся, что значенія сказанныхъ
 суммъ, при которыхъ непрерывная цѣпь можетъ состояться,
 суть слѣдующія:

$$\begin{array}{rcl}
 A+B & = & 54, \quad C+D = 10, \\
 & = & 52, \quad \quad \quad = 12, \\
 & \cdot & \quad \quad \quad \cdot \\
 & \cdot & \quad \quad \quad \cdot \\
 & \cdot & \quad \quad \quad \cdot \\
 & = & 32, \quad \quad \quad = 32.
 \end{array}$$

Можно получить еще 11 значений посредством измѣненія y въ x , x въ y : тогда между значеніями суммъ $A+B$, $C+D$ произойдетъ перестановленіе.

Теперь для полученія всѣхъ обходовъ необходимо и достаточно произвести всѣ возможные комбинаціи между четырьмя начерченными многоугольниками, вводя послѣдовательно по два новыхъ звена. Несмыкающіяся же цѣпи получатся тогда, когда въ (4) положимъ $n=63$, и разностямъ $\frac{x_n-x_0}{y_n-y_0}$ напишемъ значенія отличныя отъ ± 2 , ± 1 , и притомъ такія, чтобы одна изъ нихъ, напр. x_n-x_0 , была четомъ, а другая — нечетомъ. Значенія суммъ $A+B$, $C+D$ будутъ тогда:

$$\begin{aligned} A+B &= 54, & C+D &= 9 \\ &= 53, & &= 10 \end{aligned}$$

Однако же, какъ будетъ показано, число рѣшеній столь велико, что произвести *всѣ* комбинаціи между многоугольниками въ дѣйствительности невозможно; для этого недостало бы и нѣсколькихъ человѣческихъ жизней. Вотъ почему способъ этотъ долженъ быть оставленъ.

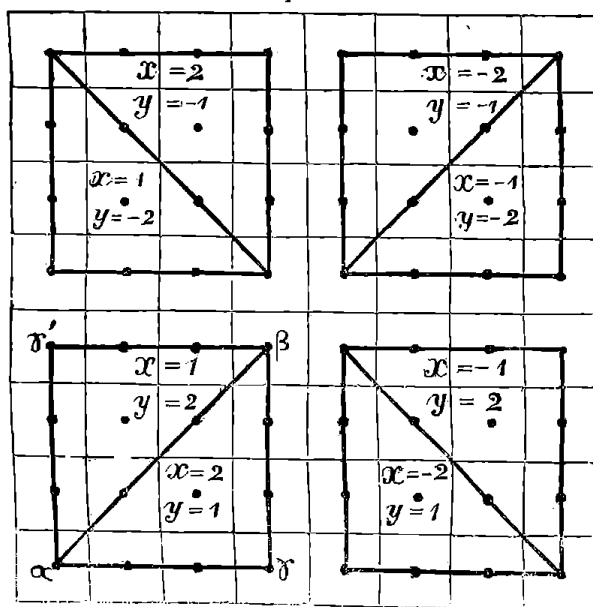
5. Уравненія движенія въ предѣлахъ шашечницы $p^2=64$.

Успѣхъ устраненія затрудненій, которыя представляетъ проблема коня, зависитъ преимущественно отъ того, какой способъ означенія будетъ принятъ для отличія одной клѣтки отъ другой. Обыкновенныя координаты рѣшительно недостигаютъ требуемой цѣли; ибо онѣ опредѣляютъ положеніе точки только относительно двухъ безконечныхъ линій: *позиція* клѣтки относительно данной шашечницы, и отношеніе клѣтки къ данной шашкѣ остаются невыразимыми. Математики показали, что при обыкновенныхъ координатахъ вопросъ о не оставленіи шашкою предѣловъ доски приводится либо къ неравенствамъ, либо къ суммованію необычайнаго количества урав-

неній. При нашей же системѣ означенія клітокъ сказанныя затрудненія вполне устраняются. Вотъ въ чемъ она состоитъ.

Раздѣлимъ шашечницу на восемь симметричныхъ треугольниковъ (чертежъ 3), и одинъ изъ нихъ, напримѣръ $\alpha\beta\gamma$, возьмемъ за *модель*, или *координату*; то есть позицію каждаго изъ остальныхъ треугольниковъ будемъ опредѣлять по отношенію его къ первообразному тр. $\alpha\beta\gamma$, и то значеніе, которое припишемъ какой нибудь точкѣ первообразнаго тр., припишемъ также и *соотвѣтствующей, симметричной* точкѣ каждаго изъ остальныхъ треугольниковъ. Эти треугольники обозначаемъ: $\alpha\beta\gamma$ чрезъ $x=2, y=1$; $\alpha\beta\gamma'$ чрезъ $x=1, y=2$, и т. д., какъ значится на чертежѣ 3.

Черт. 3.



Отношеніямъ существующимъ между треугольниками при-
своиваемъ, для сокращенія рѣчи, слѣдующія наименованія:

Отношеніе тр. $x=-2, y=-1$ къ тр. $x=2, y=1$ называемъ *діа-
метральной* симметрией;

отношеніе тр.	$x = 1$ $y = 2$	къ	$x = 2$ $y = 1$	первая діагональная сим.;
»	$x = -1$ $y = -1$	»	»	вторая діагональная »
»	$x = -2$ $y = 1$	»	»	первая прямая »
»	$x = 2$ $y = -1$	»	»	вторая прямая »
»	$x = -1$ $y = 2$	»	»	первая облическая »
»	$x = 1$ $y = -2$	»	»	вторая облическая »

Эти 8 значеній треугольника связаны между собою тою же зависимоію, которая существуетъ между Δx , Δy въ (1).

Точки первообразнаго тр., которыхъ число всегда $\frac{1}{8} p(p+2)$, въ настоящемъ же случаѣ, слѣдов., 10, перенумеровываемъ буквами $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l$, и каждой изъ нихъ присвоиваемъ такой показатель, который опредѣлялъ бы число перемѣщеній возможныхъ для коня съ обозначенной клѣтки. По образцу одного треугольника распредѣляются значенія точкамъ и въ другихъ семи треугольникахъ (чертежъ 4).

Черт. 4.

a	e	h	l	l	h	e	a
e	b	f	k	k	f	b	e
h	f	c	g	g	c	f	h
l	k	g	d	d	g	k	l
l	k	g	d	d	g	k	l
h	f	c	g	g	c	f	h
e	b	f	k	k	f	b	e
a	e	h	l	l	h	e	a

За общій членъ 64-хъ клѣтокъ шашечницы примемъ символъ $A^i_{x,y}$. Подъ A разумѣется одна изъ 10-ти буквъ, i есть указатель числа *выходовъ* (перемѣщеній), а двойной нижній указатель опредѣляетъ тотъ треугольникъ, въ которомъ находится точка A^i .

При такомъ означеніи, какъ символъ одной точки, такъ и символъ двухъ точекъ *одного звена* — и даже выраженіе цѣлой цѣпи, имѣетъ, по числу треугольниковъ, *восемь* и только *восемь* значеній.

Начертимъ ли звено $a^2_{1,2} \cdot f^6_{1,2}$, тогчасъ находимъ еще семь, и только семь, симметричныхъ звеньевъ: $a^2_{1,2} \cdot f^6_{2,1}$, $a^2_{1,-2} \cdot f^6_{1,-2}$, $a^2_{1,-2} \cdot f^6_{2,-1}$, $a^2_{-1,-2} \cdot f^6_{-1,-2}$, $a^2_{-1,-2} \cdot f^6_{-2,-1}$, $a^2_{-1,2} \cdot f^6_{-1,2}$, $a^2_{-1,2} \cdot f^6_{-2,1}$. При этомъ замѣчаемъ, что такъ какъ $a_{1,2} = a_{2,1}$, $b_{1,2} = b_{2,1}$, $c_{1,2} = c_{2,1}$, $d_{1,2} = d_{2,1}$, и, вообще, $a_{y,x} = a_{x,y}$, $b_{y,x} = b_{x,y}$, $c_{y,x} = c_{x,y}$, $d_{y,x} = d_{x,y}$, то имѣемъ не 8.10 клѣтокъ, а $8.10 - 16 = 64$. *Диагонально* симметричное звено получается, какъ видно изъ отношенія существующаго между ($y=1$, $x=2$) и ($y=-1$, $x=-2$), посредствомъ измѣненія $A_{y,x}$ въ $A_{-y,-x}$. *Первое диагонально* симметричное звено получается посредствомъ измѣненія $A_{y,x}$ въ $A_{x,y}$ и т. д., какъ показываетъ чертежъ 3. И такъ, ежели число *всѣхъ* звеньевъ существующихъ въ предѣлахъ данной шашечницы есть P , то различныхъ *категорій* звеньевъ будетъ непременно $\frac{P}{8}$; и на оборотъ: ежели составимъ $\frac{P}{8}$ комбинацій

$$\begin{aligned} af, eh, es, ek, bl, bg, hf, hg, hk, lc, lg, \\ lf, fk, fd, fg, kg, kd, kc, cd, gg, gd, \end{aligned} \quad (K)$$

то найдемъ $P = 8.21$.

Такихъ первообразныхъ комбинацій между $\frac{1}{8} p(p+2)$ клѣтками, какъ опредѣлилъ нѣкто Сливонсъ, всегда $\frac{1}{2} (p-1)(p-2)$. Общность этой формулы доказана Янишемъ. Эти то комбинаціи между клѣтками, будучи выражены, составляютъ уравненія движенія въ предѣлахъ данной шашечницы.

Согласимся изображать чрезъ $\Delta A^i_{y,x} = A^{i+\delta}$ возможное *перемѣщеніе*, или *звено*, $A^i_{y,x} \cdot A^{i+\delta}$, такъ что вмѣсто $a^2 \cdot f^6$ будетъ $\Delta a = f^6$: тогда, соотвѣтственно десяти клѣткамъ треугольника, всѣ перемѣщенія, возможные въ предѣлахъ 64-хъ клѣточной доски, выразятся слѣдующими десятью уравненіями:

$$\begin{aligned}
 \Delta a^2_{y,x} &= f^6_{y,x} + f^6_{x,y} \\
 \Delta f^6_{y,x} &= a^2_{y,x} + h^4_{x,y} + k^6_{x,y} + d^8_{y,x} + g^8_{y,-x} + l^4_{y,-x} \\
 \Delta h^4_{y,x} &= e^3_{x,y} + f^6_{x,y} + g^8_{y,x} + k^6_{y,-x} \\
 \Delta k^6_{y,x} &= e^3_{y,x} + f^6_{x,y} + g^8_{x,y} + d^8_{y,-x} + c^8_{y,-x} + h^4_{y,-x} \\
 \Delta e^3_{y,x} &= h^4_{x,y} + c^8_{y,x} + k^6_{y,x} \\
 \Delta l^4_{y,x} &= b^4_{y,x} + c^8_{y,x} + g^8_{y,-x} + f^6_{y,-x} \\
 \Delta b^4_{y,x} &= l^4_{y,x} + l^4_{x,y} + g^8_{y,x} + g^8_{x,y} \\
 \Delta c^8_{y,x} &= e^3_{y,x} + e^3_{x,y} + l^4_{y,x} + l^4_{x,y} + k^6_{y,-x} + k^6_{-x,y} \\
 &\quad + d^8_{y,-x} + d^8_{-x,y} \\
 \Delta g^8_{y,x} &= h^4_{y,x} + b^4_{y,x} + l^4_{y,-x} + f^6_{y,-x} + g^8_{x,-y} + d^8_{-x,-y} \\
 &\quad + g^8_{-x,y} + k^6_{x,y} \\
 \Delta d^8_{y,x} &= f^6_{y,x} + f^6_{x,y} + k^6_{y,-x} + k^6_{-x,y} + c^8_{y,-x} + c^8_{-x,y} \\
 &\quad + g^8_{-x,-y} + g^8_{-y,-x}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Каждое изъ нихъ надо понимать единообразно такъ:

1) Членъ передъ которымъ поставленъ символъ Δ есть та точка, съ которой перемѣщеніе (звено, ходъ) начинается; каждый же изъ членовъ правой части того же равенства есть та точка, на которой движеніе прекращается. Такъ что, на примѣръ, перемѣщеніе съ точки $a^2_{y,x}$, по первому изъ этихъ уравненій, возможно на f^6 , находящуюся въ *одномъ* треугольникѣ, и на f^6 —въ діагонально симметричномъ треугольникѣ. Съ $f^6_{y,x}$ возможны 6 перемѣщеній определяемыхъ вторымъ уравненіемъ (5), а для того чтобы получить сумму перемѣщеній съ $f^6_{x,y}$, надо только измѣнить въ этомъ уравненіи правый указатель въ лѣвый, и на оборотъ; такъ что

$$\Delta f^6_{x,y} = a^2_{x,y} + h^4_{y,x} + k^6_{y,x} + d^8_{x,y} + g^8_{-x,y} + l^4_{x,y}.$$

Такимъ образомъ, приписавъ указателямъ y, x членовъ лѣвыхъ частей уравненій послѣдовательно значенія $y = 1$
 $x = 2$,

$y = 1$
 $x = -2$, и т. д., и произведя соотвѣтствующія измѣненія буквъ въ номера въ правыхъ частяхъ этихъ же уравненій,

получимъ всего 80 уравненій. А такъ какъ 16 изъ нихъ, по причинѣ тождествъ $a_{y,x} = a_{x,y}$, $b_{y,x} = b_{x,y}$, $c_{y,x} = c_{x,y}$, $d_{y,x} = d_{x,y}$ совпадутъ съ другими 16-ю: то всего различныхъ уравненій заключающихся въ (5) будетъ 64.

2) Опреѣленіе числа путей, существующихъ между двумя данными клѣтками, приводится къ интегрированію въ конечныхъ разностяхъ слѣдующихъ десяти уравненій:

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= 2f_t \\ f_{t+1} &= a_t + h_t + k_t + d_t + g_t + l_t \\ h_{t+1} &= e_t + f_t + g_t + k_t \\ k_{t+1} &= e_t + f_t + g_t + d_t + c_t + h_t \\ e_{t+1} &= h_t + c_t + k_t \\ l_{t+1} &= b_t + c_t + g_t + f_t \\ b_{t+1} &= 2l_t + 2g_t \\ c_{t+1} &= 2(e_t + l_t + k_t + d_t) \\ g_{t+1} &= h_t + b_t + l_t + f_t + d_t + k_t + 2g_t \\ d_{t+1} &= 2(f_t + k_t + c_t + g_t), \end{aligned} \tag{5'}$$

гдѣ t есть число ходовъ. Это потому, что каждое изъ уравненій (5) выражаетъ, что число путей существующихъ для коня отъ члена передъ которымъ поставлено Δ , въ какое нибудь число t ходовъ, до какой ни есть клѣтки шашечницы, равняется суммѣ путей существующихъ до той же точки отъ каждаго изъ членовъ правой части равенства въ $t-1$ ходовъ.

6. Система (5) составляетъ полнѣйшее выраженіе условій движенія коня не только въ предѣлахъ шашечницы $p=8$, но и *безъ повторенія*. Объ этомъ послѣднемъ условіи будетъ говорено ниже. Теперь скажемъ только нѣсколько словъ объ интегрированіи уравненій (5'), которыхъ вполне достаточно, доколѣ условія неповторенія не существуютъ.

Интегралъ этой системы найдется по общимъ правиламъ, но этимъ не закончатся вычисленія: главная трудность будетъ въ определѣніи *произвольныхъ постоянныхъ*. Десять выраже-

ній, которыя опредѣляютъ неизвѣстныя, придется раздробить на 32 (16 четныхъ и 16 нечетныхъ) выраженія, каждое съ особой произвольной постоянной; эти постоянныя придется опредѣлять либо ощупью, либо тѣмъ способомъ, который употребилъ Янишъ для исчисленія *кратчайшихъ путей* (томъ 1, *Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs*). Этимъ общимъ очеркомъ покажемъ ограничиваемся и переходимъ къ анализу движенія безъ повторенія.

7. *Движеніе коня съ условіемъ не возвращаться на однажды тронутую клетку.*

Припомнимъ правила для дифференцированія алгебраическихъ количествъ. Пусть z^m , гдѣ m число цѣлое и положительное, данная функція: дифференціалъ ея есть, какъ извѣстно, $mz^{m-1}.dz$. Напишемъ Δz^m вмѣсто dz , и положимъ, что $\Delta z^m = z_1^{m_1} + z_2^{m_2} + \dots + z_m^{m_m}$. Подставляя это значеніе въ произведеніе $mz^{m-1}.\Delta z^m$, измѣнивъ при томъ m_1 въ $m_1 - 1$, m_m въ $m_m - 1$, получаемъ:

$$mz^{m-1} (z_1^{m_1-1} + z_2^{m_2-1} + \dots + z_m^{m_m-1}).$$

Возьмемъ теперь дифференціалъ количества между скобками, принимая, слѣдовательно, z за постоянное, и въ результатѣ, какъ прежде, замѣнимъ d характеристикой Δ ; будетъ:

$$mz^{m-1} [(m_1-1) z_1^{m_1-2} . \Delta z_1 + (m_2-1) z_2^{m_2-2} . \Delta z_2 + \dots + (m_m-1) z_m^{m_m-2} . \Delta z_m].$$

Эти самыя дѣйствія должны быть произведены надъ $A_{y,x}^i$, принимая i за дѣйствительный показатель. Если это сдѣлаемъ, то этимъ самымъ выразимъ движеніе коня въ предѣлахъ шахматницы $p = 8$ и притомъ безъ повторенія; и не только удовлетворимъ требуемымъ условіямъ, но и узнаемъ *искомое число рѣшеній*.

Согласимся изображать суммы послѣдовательныхъ станцій, то есть клетокъ на которыя можно будетъ перемѣстить коня, чрезъ $U_0, U_1, U_2 \dots U_{63}$, и пусть $U_0 = a_{1,2}^2$ начальная станція, а $U_{63} = f_{2,1}^6$ — конечная.

Если бы $a^2_{1,2}$ представляла два возможных перемещенія, то, поступивъ какъ выше объяснено, получили бы, сперва,

$$U_1 = 2a_{1,2} \cdot \Delta a^2_{1,2},$$

а потомъ, такъ какъ по первому изъ уравненій (5),

$$\Delta a^2_{1,2} = f^6_{1,2} + f^6_{2,1},$$

нашли бы:

$$U_1 = 2a_{1,2} (f^{6-1}_{1,2} + f^{6-1}_{2,1}).$$

Но по предположенію на $f^6_{2,1}$ дозволяется ступить только въ послѣдній ходъ; а потому, вычтя изъ показателей членовъ $a^2_{1,2}$, $l^4_{-2,1}$, $h^4_{1,2}$, $k^6_{1,2}$, $g^8_{-2,1}$, $d^8_{1,2}$ по единицѣ, исключимъ изъ (5) членъ $f^6_{2,1}$. Такимъ образомъ получимъ:

$$U_0 = a^{2-1}_{1,2},$$

$$U_1 = a^0_{1,2} \cdot f^{6-1}_{1,2}.$$

Сдѣлаемъ теперь нѣкоторыя замѣчанія.

1) Показатель i , въ A^i , обращающійся въ коэффициентъ, всегда опредѣляетъ число членовъ, которое должно удержать въ значеніи ΔA^i въ (5); такъ, когда имѣли $U_0 = a^2$, получили $U_1 = 2a (f^{6-1}_{1,2} + f^{6-1}_{2,1})$, два члена, когда же, по исключеніи $f^6_{2,1}$, получили $U_0 = a^1$: то и въ U_1 остался одинъ членъ.

2) Какой именно членъ долженъ быть исключенъ изъ значенія ΔA^i , это всегда покажетъ тотъ членъ, который непосредственно предшествуетъ характеристикѣ Δ ; если же увидимъ по показателю $i = 2$, что требуется исключить два члена, то другой исключаемый членъ будетъ непременно находиться въ группѣ другихъ предшествующихъ характеристикъ Δ членовъ. И такъ, $a^0_{1,2}$ удерживается для того, чтобы напоминать намъ клетку, на которую перемѣщеніе не дозволяется. Изъ показателя же члена $f^{6-1}_{1,2}$ узнаемъ, что въ значеніи

$$\Delta f^6_{1,2} = a^2_{1,2} + h^4_{2,1} + k^6_{2,1} + d^8_{1,2} + g^8_{1,-2} + l^4_{1,-2}$$

должно зачеркнуть одинъ членъ, а именно $a^2_{1,2}$, потому что только $a_{1,2}$ предшествуетъ f^{6-1} въ значеніи U_1 .

3) Изъ показателей всѣхъ членовъ правой части ΔA^i вычитается по единицѣ для того, чтобы сдѣлать невозможнымъ возвращеніе на A^i чрезъ нѣсколько ходовъ. Такимъ образомъ напомнимъ:

$$\Delta f_{1,2}^5 = h_{2,1}^3 + k_{2,1}^5 + d_{1,2}^6 + g_{1,-2}^7 + l_{1,-2}^3;$$

здѣсь изъ $d_{1,2}^8$ вычтено двѣ единицы потому, что перемѣщеніе $U_{63} = f_{2,1}$ не дозволяется. Весьма полезно включать и $f_{2,1}$ въ послѣдовательныя значенія U ; а потому напомнимъ:

$$U_0 = f_{2,1} a_{1,2}, \quad U_1 = f_{2,1}^0 a_{1,2}^0 f_{1,2}^5.$$

За симъ переходимъ къ составленію значенія U_2 .

Повторивъ на U_1 вышеобъясненное двойное дѣйствіе, то есть дифференцирование $f_{1,2}^5$ и замѣненіе $df_{1,2}$ разностию $\Delta f_{1,2}^5$, найдемъ:

$$U_2 = 5f_{2,1}^0 a_{1,2}^0 f_{1,2}^4 \Delta f_{1,2}^5.$$

А такъ какъ

$$\Delta f_{1,2}^5 = h_{2,1}^3 + k_{2,1}^5 + d_{1,2}^6 + g_{1,-2}^7 + l_{1,-2}^3,$$

то

$$U_2 = 5f_{2,1}^0 a_{1,2}^0 f_{1,2}^4 (h_{2,1}^3 + k_{2,1}^5 + d_{1,2}^6 + g_{1,-2}^7 + l_{1,-2}^3).$$

Теперь, такъ какъ сумма показателей членовъ между скобками есть 24, — сумма *дозволяемыхъ перемѣщеній* въ третій ходъ есть 24; иначе сказать, новое дифференцирование и замѣненіе d значеніемъ Δ внесетъ въ сумму U_3 , сравнительно U_2 , новыхъ 24 члена, или 24 станціи. Если сдѣлаемъ это, получимъ:

$$U_3 = 5f_{2,1}^0 a_{1,2}^0 f_{1,2}^4 \{ 3h_{2,1}^2 (e_{1,2}^2 + g_{2,1}^7 + k_{-2,1}^5) + 5k_{2,1}^4 (e_{1,2}^2 + g_{1,2}^7 + d_{-2,1}^7 + c_{-2,1}^7 + h_{-2,1}^3) + 6d_{1,2}^5 (k_{1,-2}^5 + k_{-2,1}^5 + c_{1,-2}^7 + c_{-2,1}^7 + g_{-2,-1}^7 + g_{-1,-2}^7) + 7g_{1,-2}^6 (h_{1,-2}^3 + b_{1,-2}^3 + l_{1,2}^3 + g_{2,1}^7 + d_{-2,1}^7 + g_{-2,-1}^7 + k_{2,-1}^5) + 3l_{1,-2}^2 (b_{1,-2}^3 + c_{1,-2}^7 + g_{1,2}^7) \}$$

Этой суммѣ можно дать иной, простѣйшій видъ; а именно отбросивъ члены и числа, находящіеся внѣ скобокъ, и взявъ