

В.А. Фок

**Теория определения
сопротивления горных пород
по способу каротажа**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 55
ББК 26.3
В11

В11 **В.А. Фок**
Теория определения сопротивления горных пород по способу каротажа / В.А. Фок – М.: Книга по Требованию, 2021. – 66 с.

ISBN 978-5-458-48570-8

ISBN 978-5-458-48570-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



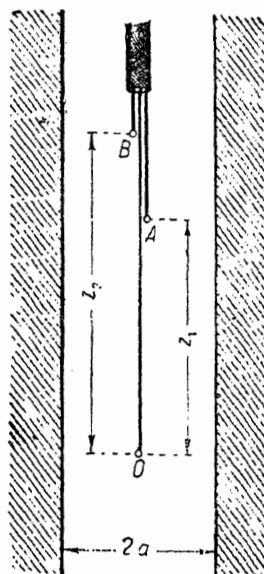
Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

А и В. Второй питающий электрод находится у поверхности земли, так что поле вокруг электрода О можно считать полем одного электрода.

Геометрические размеры установки, т. е. диаметр скважины $2a$ и расстояния $OA = z_1$ и $OB = z_2$ между питающим и измерительными электродами можно считать раз навсегда заданными. Измеряя теперь силу тока I , выходящего из О, и разность потенциалов $V = V_A - V_B$ между измерительными электродами, мы можем судить об удельном сопротивлении породы ρ , если только нам известно удельное сопротивление раствора ρ_1 и если мы можем считать породу однородной в пределах значительно больших, чем расстояние OB от питающего до дальнего измерительного электрода.

Не обращая внимания на самую скважину, положим сперва, что все три электрода расположены в самой породе. Тогда мы имеем схему одноэлектродного поля в неограниченной однородной среде. Поэтому измеряемая разность потенциалов будет равна



Черт. 1.

$$V = V_A - V_B = \frac{I\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) = \frac{I\rho}{4\pi} \frac{z_2 - z_1}{z_2 z_1} \quad (1)$$

и искомое удельное сопротивление породы ρ выразится через известные величины по формуле

$$\rho = \frac{4\pi V}{I} \frac{z_2 z_1}{z_2 - z_1} = M \frac{V}{I}, \quad (2)$$

где множитель

$$M = \frac{4\pi z_2 z_1}{z_2 - z_1} \quad (3)$$

зависит от размеров установки.

Для многих целей расчет по этой простой формуле, в которую не входит ни диаметр скважины, ни удельное сопротивление раствора, является достаточным. Действительно, для распознавания тех же самых слоев в различных скважинах, при соблюдении примерного постоянства

диаметра скважины и сопротивления раствора, не особенно важно, является ли найденное ρ истинным или условным. Но для большей уверенности в заключениях, для возможности учета упомянутых факторов желательно уточнить теорию, рассмотрев действительное распределение тока в данной схеме. Оказывается, что при наличии сопротивления породы, значительно превышающего сопротивление раствора, получаемые ρ могут быть очень далеки от истинных.

Развитие теории в этом направлении важно еще и потому, что является очень заманчивым распространить методику каротажа и на разведочные скважины при бурении на металлические руды. При этом можно ожидать случаев, когда проходимые скважиной породы будут иметь большие удельные сопротивления и дифференцировать их друг от друга можно будет, только умея верно определять ρ при больших отношениях сопротивления породы и содержащегося в скважине раствора.

Поставленная выше задача была решена по моему предложению В. А. Фоком, давшим точную математическую теорию каротажа, которая и составляет предмет этой книги.

Проф. В. Р. Бурсиан.

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД ПО СПОСОБУ КАРОТАЖА.

§ 1. Математическая формулировка задачи.

Физическая сторона задачи об определении сопротивления горных пород по способу каротажа изложена достаточно полно во вступительной статье проф. В. Р. Бурсиана, и мы можем здесь приступить непосредственно к ее математической формулировке.

Положим, что внутри бесконечного круглого цилиндра радиуса a находится среда (раствор) с удельным сопротивлением ρ_1 и электропроводностью $\sigma_1 = \frac{1}{\rho_1}$, а снаружи — вторая среда (порода) с сопротивлением ρ_2 и электропроводностью $\sigma_2 = \frac{1}{\rho_2}$. В точке O на оси цилиндра имеется точечный источник тока силы I (питающий электрод). Требуется найти потенциал во всем пространстве внутри и вне цилиндра.

Введем цилиндрические координаты z, r, φ причем будем считать, что ось z направлена по оси цилиндра, а источник тока лежит в начале координат (черт 2). Так как в нашей задаче имеет место аксиальная симметрия, то потенциал V не будет зависеть от угла φ , а будет зависеть только от переменных z и r

$$V = V(z, r). \quad (1)$$

Так как мы имеем дело с постоянным током в изотропной среде, то потенциал V будет удовлетворять уравнению Лапласа, которое в нашем случае напишется

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (2)$$

Кроме того, потенциал должен удовлетворять следующим условиям.

Так как в начале координат находится источник тока, то потенциал должен обращаться там в бесконечность так, чтобы было

$$V = \frac{I}{4\pi\epsilon_1 R} + \text{функция конечная}, \quad (3)$$

где $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. В самом деле, плотность тока $\vec{j}$ в первой среде связана с потенциалом V соотношением

$$\vec{j} = -\sigma_1 \text{grad } V, \quad (4)$$

и при соблюдении условия (3) интеграл от плотности тока, взятый по бесконечно-малой сфере, окружающей источник тока, будет равен полной силе тока I .

$$\begin{aligned} \int j_n dS &= -\sigma_1 \int \frac{\partial V}{\partial R} dS = \\ &= \int \frac{I}{4\pi R^2} dS = I. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее, на границе первой и второй среды потенциал V и нормальная составляющая плотности тока $\vec{j}$ должны быть непрерывны, откуда вытекают условия

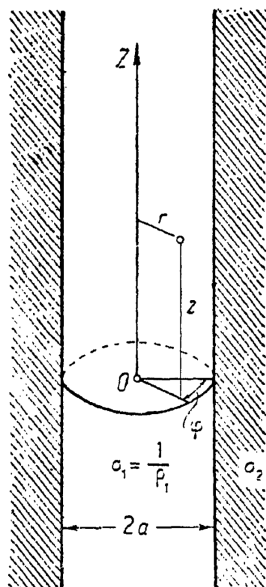
$$(V)_{r=a-0} = (V)_{r=a+0}, \quad (6)$$

$$\sigma_1 \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a-0} = \sigma_2 \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a+0}. \quad (7)$$

Наконец, потенциал должен стремиться к нулю при бесконечном удалении от источника тока:

$$V \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Уравнение Лапласа (2) и условия (3), (6), (7) и (8) определяют потенциал вполне однозначным образом.



Черт. 2.

§ 2. Решение задачи при помощи определенных интегралов.

Введем в качестве единицы длины радиус цилиндра, иначе говоря положим

$$\frac{z}{a} = z'; \quad \frac{r}{a} = r'; \quad \frac{R}{a} = R'. \quad (1)$$

Одновременно введем вместо потенциала V пропорциональную ему функцию v , представляющую отвлеченное число

$$V = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 a} v(z', r'). \quad (2)$$

Функцию v мы будем называть приведенным потенциалом.

Условия, которым должен удовлетворять приведенный потенциал, суть

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial v}{\partial r'} = 0, \quad (3)$$

$$v = \frac{1}{R'} + (\text{функция конечная}), \quad (4)$$

$$(v)_{r'=1-0} = (v)_{r'=1+0}, \quad (5)$$

$$\sigma_1 \left(\frac{\partial v}{\partial r'} \right)_{r'=1-0} = \sigma_2 \left(\frac{\partial v}{\partial r'} \right)_{r'=1+0}, \quad (6)$$

$$v \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R' \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Функцию v мы будем искать в виде интеграла Фурье относительно z' . Легко видеть, что она должна быть четной функцией от z' ; поэтому мы можем написать

$$v(z', r') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty w(r', \lambda) \cos \lambda z' d\lambda. \quad (8)$$

Новая неизвестная функция $w(r', \lambda)$ будет иметь различные аналитические выражения при $r' < 1$ и при $r' > 1$, так как вследствие (6) производная $\frac{dw}{dr'}$ не может быть непрерывной при $r' = 1$. Чтобы определить функцию $w(r', \lambda)$, посмотрим, прежде всего, какому дифференциальному уравнению она должна удовлетворять.

Выражение (8) будет удовлетворять уравнению Лапласа (3), если ему удовлетворяет подынтегральная функция. А так как

$$\frac{\partial^2}{\partial z'^2} \cos \lambda z' = -\lambda^2 \cos \lambda z',$$

то, по сокращении на $\cos \lambda z'$, мы получаем для w уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial w}{\partial r'} - \lambda^2 w = 0. \quad (9)$$

Введя новую переменную

$$x = \lambda r', \quad (10)$$

мы убедимся, что уравнение (9) приводится к известному дифференциальному уравнению для Бесселевых функций нулевого порядка от мнимого аргумента

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} - w = 0. \quad (11)$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$w = AI_0(x) + BK_0(x), \quad (12)$$

где $I_0(x)$ и $K_0(x)$ суть Бесселевы функции первого и второго рода,* которые могут быть представлены в виде определенных интегралов

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} e^{xu} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (13)$$

$$K_0(x) = \int_1^{\infty} e^{-xu} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}. \quad (14)$$

Из формул (13) и (14) видно, что функции $I_0(x)$ и $K_0(x)$ при больших положительных значениях x имеют следующий характер: $I_0(x)$ возрастает примерно как e^x , а $K_0(x)$, напротив, убывает, как e^{-x} . При x , стремящемся к нулю, $I_0(x)$ остается конечным (это есть целая трансцендентная

* Наиболее полное изложение теории Бесселевых функций можно найти в книге Watson, Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922, на которую нам придется неоднократно ссылаться.

функция), а $K_0(x)$ обращается в логарифмическую бесконечность.

Возвращаясь к первоначальной переменной r' , перепишем найденное решение (12) уравнения (9), причем мы должны будем считать постоянные A и B функциями от λ

$$w = A(\lambda) I_0(\lambda r') + B(\lambda) K_0(\lambda r'). \quad (15)$$

Мы уже видели, что функция w должна иметь при $r' < 1$ и при $r' > 1$ разные аналитические выражения; поэтому постоянные $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ будут иметь разные значения в этих двух областях.

Для всех значений r' , больших единицы, приведенный потенциал должен оставаться конечным, и он должен стремиться к нулю при $r' \rightarrow \infty$. Это условие будет выполнено, если w будет стремиться к нулю при возрастающих r' , для чего необходимо, чтобы постоянная A была равна нулю. Таким образом,

$$w = B(\lambda) K_0(\lambda r') \quad (r' \geq 1). \quad (16)$$

При значениях r' , меньших единицы, приведенный потенциал имеет, согласно (4), особенную точку вполне определенного вида. На основании известной формулы *

$$\frac{1}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(\lambda r') \cos \lambda z' d\lambda, \quad (17)$$

легко видеть, что этой особенной точке приведенного потенциала v соответствует член $K_0(\lambda r')$ в функции w .

Таким образом, если мы положим

$$w = A(\lambda) I_0(\lambda r') + K_0(\lambda r') \quad (r' \leq 1), \quad (18)$$

то функция v будет иметь требуемую особенную точку.

Нам остается найти значения величин $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в формулах (18) и (16). Это нетрудно сделать при помощи уравнений (5) и (6). Эти уравнения для v будут выполняться, если им будет удовлетворять функция w . Приравнявая на основании (5) выражения (16) и (18) для w при $r' = 1$, получаем

$$B(\lambda) K_0(\lambda) = A(\lambda) I_0(\lambda) + K_0(\lambda). \quad (19)$$

* Формулу эту легко доказать, если подставить в правую часть ее выражение (14) для K_0 и затем изменить порядок интегриации.

Приравнивая умноженные соответственно на σ_2 и σ_1 значения производных от (16) и (18) по r' , при $r' = 1$, будем иметь

$$\sigma_2 B(\lambda) K_0'(\lambda) = \sigma_1 [A(\lambda) I_0'(\lambda) + K_0'(\lambda)]. \quad (20)$$

Производные от Бесселевых функций нулевого порядка выражаются, как известно, через Бесселевы функции первого порядка по формулам

$$\frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x); \quad \frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x). \quad (21)$$

Вводя в уравнение (20) Бесселевы функции первого порядка, можем написать его в виде

$$-\sigma_2 B(\lambda) K_1(\lambda) = \sigma_1 [A(\lambda) I_1(\lambda) - K_1(\lambda)]. \quad (20^*)$$

Уравнения (19) и (20) или (20*) легко решаются относительно $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Если воспользоваться известным соотношением между Бесселевыми функциями.

$$x [K_0(x) I_1(x) + K_1(x) I_0(x)] = 1 \quad (22)$$

и положить для краткости

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 = \alpha, \quad (23)$$

мы получим

$$A(\lambda) = \frac{\alpha \lambda K_0(\lambda) K_1(\lambda)}{1 + \alpha \lambda K_0(\lambda) I_1(\lambda)}, \quad (24)$$

$$B(\lambda) = \frac{\alpha + 1}{1 + \alpha \lambda K_0(\lambda) I_1(\lambda)} \quad (25)$$

С этими значениями $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ функция $w(r', \lambda)$, входящая в выражение

$$v(z', r') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} w(r', \lambda) \cos \lambda z' d\lambda \quad (8)$$

для приведенного потенциала v , будет иметь вид

$$w(r', \lambda) = K_0(\lambda r') + \frac{\alpha \lambda K_0(\lambda) K_1(\lambda)}{1 + \alpha \lambda K_0(\lambda) I_1(\lambda)} I_0(\lambda r') \quad (26)$$

при $r' \leq 1$ (внутри цилиндра) и

$$w(r', \lambda) = \frac{\alpha + 1}{1 + \alpha \lambda K_0(\lambda) I_1(\lambda)} K_0(\lambda r') \quad (27)$$

при $r' > 1$ (вне цилиндра).

Формулы (8), (26) и (27) и дают решение поставленной задачи.

§ 3. Преобразование выражения для приведенного потенциала.

Для практического применения формула (8, § 2) неудобна тем, что подынтегральная функция содержит быстропеременный множитель $\cos \lambda z'$; наличие этого множителя делает практически невозможным применение формул квадратур к вычислению интеграла (8, § 2). Чтобы устранить это неудобство, мы преобразуем наше выражение для v , воспользовавшись следующей теоремой.

Если функция $f(\lambda)$ голоморфна и ограничена в правой полуплоскости комплексной переменной λ , то имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} f(\lambda) \cos \lambda z d\lambda = \frac{i}{z} \int_0^{\infty} [f(it) - f(-it)] e^{-tz} dt, \quad (1)$$

если только $z > 0$ и интегралы в обеих частях его имеют смысл.

Эта теорема легко доказывается интегрированием выражения

$$\int f(\lambda) e^{iz\lambda} d\lambda$$

по первому квадранту и выражения

$$\int f(\lambda) e^{-iz\lambda} d\lambda$$

по четвертому квадранту плоскости комплексной переменной λ .

Для применения этой теоремы к нашему случаю нам понадобятся формулы, связывающие Бесселевы функции от вещественного и от мнимого аргумента. Мы имеем

$$I_0(it) = J_0(t); \quad I_1(it) = iJ_1(t), \quad (2)$$

$$K_0(it) = -\frac{\pi}{2} iJ_0(t) - \frac{\pi}{2} Y_0(t), \quad (3)$$

$$K_1(it) = -\frac{\pi}{2} J_1(t) + \frac{\pi}{2} iY_1(t). \quad (3^*)$$

В этих формулах $J_0(t)$, $J_1(t)$, $Y_0(t)$ и $Y_1(t)$ суть Бесселевы функции первого и второго рода от вещественного

аргумента. Равенство (2), (3) и (3*) остаются справедливыми, если в них заменить i на $-i$.

В качестве первого применения формулированной выше теоремы преобразуем выражение (17, § 2) для $\frac{1}{K}$. Полагая в формуле (1)

$$f(\lambda) = \frac{2}{\pi} K_0(\lambda r'),$$

мы будем иметь, на основании (3),

$$\frac{i}{2} [f(it) - f(-it)] = J_0(tr')$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{r'^2 + z'^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(\lambda r') \cos \lambda z' d\lambda = \int_0^\infty J_0(tr') e^{-tz'} dt. \quad (4)$$

Чтобы применить нашу теорему к функции $w(r', \lambda)$, нужно сперва убедиться, что знаменатель в (26, § 2) и (27, § 2), т. е. выражение

$$1 + \alpha \lambda K_0(\lambda) I_1(\lambda), \quad (5)$$

не имеет корней в правой полуплоскости переменной λ . Нам достаточно исследовать корни с положительной мнимой частью, так как корни с отрицательной мнимой частью будут величинами комплексными сопряженными.

Мы исследуем сперва „большие“ корни знаменателя, т. е. те, вблизи которых справедливы асимптотические выражения для Бесселевых функций

$$K_0(\lambda) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} e^{-\lambda} \left(1 - \frac{1}{8\lambda} + \frac{9}{128\lambda^2} - \dots \right). \quad (6)$$

$$I_1(\lambda) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{\lambda} \left(1 - \frac{3}{8\lambda} + \frac{3}{128\lambda^2} - \dots \right) - \\ - \frac{i}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\lambda} \left(1 + \frac{3}{8\lambda} + \frac{3}{128\lambda^2} + \dots \right). \quad (7)$$

Эти выражения применимы, для достаточно больших $|\lambda|$, во всей верхней полуплоскости. Выражения (6) и (7)