

Цингер Василий Яковлевич

Способ наименьших квадратов

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
В19

В19 **Василий Яковлевич Ц.**
Способ наименьших квадратов / Цингер Василий Яковлевич – М.: Книга по Требованию, 2023. – 109 с.

ISBN 978-5-521-29601-9

ISBN 978-5-521-29601-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ГЛАВА I.

Общая понятія. — Теорія среднихъ величинъ. — Правило арифметической среды. — Распространеніе его на случай разнородныхъ наблюденій. — Всѣ выводы. — Связь способа наименьшихъ квадратовъ съ правиломъ арифметической среды.

§ 1.

На результатъ всякаго наблюденія имѣетъ вліяніе множество случайныхъ причинъ, источниковъ которыхъ заключается или въ несовершенствѣ инструментовъ или въ другихъ подобныхъ обстоятельствахъ: поэтому всякая числовая величина, полученная помощію измѣрительныхъ снарядовъ, представляетъ большее или меньшее отклоненіе отъ истиннаго значенія искомаго количества, т. е. сопровождается извѣстною ошибкою или погрѣшностію. При современныхъ потребностяхъ точныхъ опытныхъ наукъ, гдѣ и теорія и практика достигли высокой степени совершенства, рѣдко бываетъ можно довольствоваться непосредственными данными изъ наблюденій; для полученія возможно точныхъ результатовъ должно безъ сомнѣнія употреблять всѣ возможные старанія, чтобы ослабить вліяніе погрѣшностей не только при производствѣ наблюденій, но и при вычисленіяхъ.

Изученіе способовъ наблюденій показываетъ, что погрѣшности бываютъ двоякаго рода. — Однѣ изъ нихъ при одномъ и томъ же способѣ наблюденія, т. е. при извѣстномъ положеніи инструмента и пр., отклоняютъ результатъ наблюденія постоянно въ одну и ту же сторону, т. е. постоянно увеличиваютъ или уменьшаютъ его; такого рода погрѣшности называются *постоянными*; онѣ необходимо сопровождаютъ каждый результатъ и слѣдовательно не могутъ быть уничтожены, какъ бы часто не производились такого рода наблюденія и какъ бы мы не сочетали результаты этихъ наблюденій между собою. Многія изъ постоянныхъ погрѣшностей подвергнуты точнымъ изслѣдованіямъ въ теоріи инструментовъ; другія уничтожаются разнообразными пріемами наблюденій; тѣ же, причина которыхъ совершенно неизвѣстна, могутъ быть открыты примѣненіемъ даннаго способа наблюденій къ измѣренію точно извѣстной величины, при чемъ открывается среднее значеніе постоянной погрѣшности; такимъ образомъ помощію хорошо изученныхъ и расположенныхъ способовъ наблюденій можно всегда получать результаты, освобожденные отъ постоянныхъ погрѣшностей. Совершенно другимъ характеромъ отличаются *случайныя* погрѣшности наблюденій: онѣ бываютъ то больше, то меньше, то положительны, то отрицательны, и совершенно не могутъ быть предугаданы и исключены изъ отдѣльныхъ наблюденій; взаимно этого онѣ имѣютъ свойство взаимно ослабляться при большомъ числѣ наблюденій; такъ что ихъ можно исключить при-

личнымъ сочетаніемъ наблюденій. Въ различныхъ способахъ наблюденій постоянныя погрѣшности проистекаютъ изъ весьма различныхъ источниковъ и имѣютъ различныя свойства; случайныя погрѣшности сохраняютъ напротивъ свои главныя свойства при всякаго рода наблюденіяхъ; въ Теоріи наивыгоднѣйшаго сочетанія наблюденій принимаются въ расчетъ однѣ только случайныя погрѣшности, постоянныя же считаются тщательно исключенными.

§ 2.

Точкою исхода для аналитическаго рѣшенія вопроса о наивыгоднѣйшихъ результатахъ служить возможность на основаніи свойствъ случайныхъ погрѣшностей, дѣйствительная величина которыхъ вообще неизвѣстна, судить о ихъ вѣроятной величинѣ.

Опытъ показываетъ, что при очень большомъ числѣ наблюденій постоянно обнаруживаются слѣдующія свойства случайныхъ погрѣшностей:

1) Для всякаго способа наблюденій существуютъ постоянныя предѣлы, далѣе которыхъ не простираются погрѣшности; эти предѣлы болѣе тѣсны для болѣе точныхъ способовъ и наоборотъ. 2) Изъ всѣхъ возможныхъ погрѣшностей чаще всего попадаютъ очень малыя, близкія къ нулю; наибольшія же, близкія къ предѣламъ, попадаютъ рѣже всѣхъ другихъ. 3) Число погрѣшностей положительныхъ и отрицательныхъ почти одинаково и онѣ приблизительно имѣютъ одинаковыя числовыя величины, группируясь, какъ сказано, преимущественно около нуля. Изъ этихъ общихъ свойствъ случайныхъ погрѣшностей можно себѣ составить нѣкоторое понятіе о ихъ вѣроятности.

Положимъ, что функція

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \varphi \varepsilon d\varepsilon$$

выражаетъ вѣроятность предположенія, что погрѣшность какого нибудь наблюденія заключается между предѣлами ε_0 и ε ; тогда

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon + d\varepsilon} \varphi \varepsilon d\varepsilon$$

будетъ вѣроятность предположенія, что погрѣшность заключается между предѣлами ε_0 и $\varepsilon + d\varepsilon$, а слѣдовательно бесконечно малая разность

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon + d\varepsilon} \varphi \varepsilon d\varepsilon - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \varphi \varepsilon d\varepsilon = \varphi \varepsilon d\varepsilon$$

будетъ означать вѣроятность предѣловъ ε и $\varepsilon + d\varepsilon$, т. е. бесконечно малую вѣроятность погрѣшности ε . Вѣроятность погрѣшности будетъ тѣмъ больше, чѣмъ большую величину имѣетъ производная $\varphi \varepsilon$; поэтому мы будемъ называть $\varphi \varepsilon$ *относительною вѣроятностію* погрѣшности ε . Если для предѣловъ интеграла возьмемъ предѣлы погрѣшностей b и a , то интегралъ обратит-

ся въ единицу, потому что погрѣшность наблюденія достовѣрно лежитъ между такими предѣлами; слѣд.

$$\int_b^a \varphi \varepsilon d\varepsilon = 1.$$

Притомъ всякія величины меньшія b и большія a , взятые для предѣловъ должны удовлетворять тому же условію; такъ что необходимо вообще

$$\int_{b-\eta}^{a+\xi} \varphi \varepsilon d\varepsilon = 1,$$

гдѣ ξ и η суть какія нибудь положительныя величины; можно слѣдовательно взять также безконечные предѣлы т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon d\varepsilon = 1$$

и это можетъ служить къ упрощенію интегрированія при частныхъ значеніяхъ $\varphi \varepsilon$.

§ 3.

Когда ошибки наблюденій имѣютъ всѣ свойства случайныхъ, тогда предѣлы возможныхъ погрѣшностей равны между собою, но съ противоположными знаками, и, называя числовую величину ихъ черезъ a , мы имѣемъ:

$$\int_{-a}^{+a} \varphi \varepsilon d\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varepsilon d\varepsilon = 1.$$

Видъ $\varphi \varepsilon$ вообще не можетъ быть опредѣленъ безъ помощи какого нибудь частнаго предположенія, потому что эта функція зависитъ отъ множества случайныхъ вліяній, не подлежащихъ изслѣдованію по причинѣ неизвѣстности или сложности ихъ; но мы можемъ выразить аналитически тѣ свойства этой функціи, которыя соответствуютъ общимъ свойствамъ случайныхъ погрѣшностей. Такимъ образомъ допущеніе равной вѣроятности положительныхъ и отрицательныхъ ошибокъ требуетъ, чтобы функція $\varphi \varepsilon$ была четная; она должна имѣть при предѣлѣ a наименьшую величину равную нулю, и, возрастая непрерывно, достигнуть при

$\varepsilon=0$ наибольшей величины. Интегралъ $\int_x^\infty \varphi \varepsilon d\varepsilon$ долженъ обращаться въ нуль для всякой величины

x , большей a ; слѣд. $\varphi \varepsilon$ принадлежитъ къ числу функцій, въ которыхъ нарушается законъ непрерывности; въ частныхъ случаяхъ можно однако допустить, что функція $\varphi \varepsilon$ непрерывна,

но такого рода, что $\int_x^\infty \varphi \varepsilon d\varepsilon$ имѣетъ при $x > a$ чрезвычайно малыя, пренебрегаемыя величины.

Вѣроятность предѣловъ $\pm \delta$ есть $\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi \varepsilon d\varepsilon$; она пропорціональна числу погрѣшностей, заклю-

чающихся между этими предѣлами; такъ какъ $\varphi \varepsilon$ должна быть четная, то

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi \varepsilon d\varepsilon = 2 \int_0^{\delta} \varphi \varepsilon d\varepsilon,$$

т. е. число ошибокъ большихъ и меньшихъ нуля одинаково. Каждый интеграль

$$\int_{-a}^{+a} F \varepsilon \varphi \varepsilon d\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} F \varepsilon \varphi \varepsilon d\varepsilon$$

можно представить подѣ видомъ

$$\sum F \varepsilon_i \varphi \varepsilon_i d\varepsilon_i$$

гдѣ знакъ суммованія распространяется по указателю i на всевозможныя значенія ε : по свойству $\varphi \varepsilon$ всѣ элементы этого интеграла для $\varepsilon > +a$ и $\varepsilon < -a$ обратятся въ нуль. Произведеніе $\varphi \varepsilon_i d\varepsilon_i$ означаетъ вѣроятность погрѣшности ε_i , т. е. можетъ быть обозначено въ видѣ дроби $\frac{m_i}{\sum m_i}$, гдѣ m_i есть число случаевъ благопріятныхъ появленію погрѣшности ε_i , а $\sum m_i$ есть постоянная сумма подобныхъ же чиселъ для каждаго значенія погрѣшности. Вслѣдствіе этого:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F \varepsilon \varphi \varepsilon d\varepsilon = \frac{\sum m_i F \varepsilon_i}{\sum m_i}$$

При безконечно большомъ числѣ s наблюденій, по закону большихъ чиселъ, каждая погрѣшность ε_i повторится число разъ, пропорціональное числу m_i ; тогда $\frac{\sum m_i F \varepsilon_i}{\sum m_i}$ обратится въ $\frac{\sum F \varepsilon_i}{s}$, гдѣ подѣ $\sum F \varepsilon_i$ разумѣется сумма функцій $F \varepsilon_i$, взятыхъ для всѣхъ тѣхъ значеній ε_i , которыя получились при наблюденіяхъ.

Интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} F \varepsilon \varphi \varepsilon d\varepsilon$ разлагаются на простѣйшія вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^n \varphi \varepsilon d\varepsilon,$$

гдѣ n есть цѣлое число: эти послѣдніе интегралы выражаютъ въ томъ же смыслѣ ариометическую среду изъ суммы n —ыхъ степеней погрѣшностей при бесконечно большомъ числѣ наблюдений; когда число наблюдений ограничено, то, какъ будетъ ниже доказано, они же представляютъ вѣроятнѣйшія величины такихъ среднихъ ариометическихъ выводовъ.

Когда функція $F\varepsilon$ четная, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F\varepsilon \varphi \varepsilon d\varepsilon = 2 \int_0^{\infty} F\varepsilon \varphi \varepsilon d\varepsilon,$$

потому что $\varphi \varepsilon$ также четная; если же $F\varepsilon$ нечетная, то $\int_{-\infty}^{+\infty} F\varepsilon \varphi \varepsilon d\varepsilon = 0$, слѣдовательно также

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^n \varphi \varepsilon d\varepsilon = 0 \text{ для нечетныхъ значеній } n.$$

Для болѣе яснаго представленія общихъ свойствъ случайныхъ погрѣшностей можно построить кривую $y = \varphi x$; абсциссы этой кривой будутъ числовыя величины погрѣшностей, а ординаты соотвѣтствующія имъ относительныя вѣроятности. Кривая имѣетъ симметричный видъ около оси y —овъ и, приближаясь по обѣ стороны къ оси x —овъ, встрѣчается съ нею при

$x = \pm a$; или, если допустимъ, что $\int_x^{\infty} \varphi \varepsilon d\varepsilon$ не обращается въ нуль, но только имѣетъ чрез-

вычайно малую величину, кривая продолжаетъ разстилаться по оси x —въ на весьма близкомъ отъ нея разстояніи и сливается съ нею въ бесконечности. Конечныя вѣроятности данныхъ предѣловъ выразятся въ такомъ случаѣ частями площади, ограниченной кривою и осью абсциссъ, и имѣющей величину равную единицѣ.

§ 4.

Помощію наблюдений опредѣляется или непосредственно самая искомая величина, или какая нибудь функція одной или нѣсколькихъ неизвѣстныхъ. Займемся прежде всего изысканіемъ наивыгоднѣйшаго способа сочетанія въ простѣйшемъ случаѣ непосредственныхъ наблюдений.

Положимъ, что для опредѣленія неизвѣстной x произведено было большое число s непосредственныхъ, однородныхъ и равнаго достоинства измѣреній и что результаты освобождены отъ постоянныхъ погрѣшностей; въ такомъ случаѣ для опредѣленія x мы имѣемъ s уравненій:

$$x = a_1, \quad x = a_2, \dots \quad x = a_i, \dots \quad x = a_s,$$

изъ которыхъ не имѣемъ причины предпочесть однихъ передъ другими; величины a разнятся между собою на случайныя погрѣшности наблюдений и потому наивыгоднѣйшее опре-

дѣленіе величины x должно быть составлено симметрично изъ величинъ a_i по такому закону, который соотвѣтствовалъ бы свойствамъ случайныхъ погрѣшностей. Подобные выводы носятъ вообще названіе среднихъ; ихъ можно охарактеризовать тѣмъ, что они опредѣляются чрезъ данныя величины a_i помощію уравненія

$$F(\xi, \xi, \dots, \xi) = F(a_1, a_2, \dots, a_s),$$

гдѣ F означаетъ нѣкоторую симметрическую функцію, а ξ есть средній выводъ, поставленный въ первой части уравненія на мѣсто всѣхъ величинъ a_i . Функція F бываетъ обыкновенно однородная; въ такомъ случаѣ первая часть уравненія обращается въ $K\xi^n$, гдѣ n есть степень однородной функціи, и средній выводъ получаетъ видъ:

$$\xi = \left[\frac{1}{K} \cdot F(a_1, a_2, \dots, a_s) \right]^{\frac{1}{n}};$$

таковы средній геометрическій выводъ

$$\xi = \sqrt[s]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_i \cdot \dots \cdot a_s}$$

и средній выводъ изъ n —ыхъ степеней:

$$\xi = \sqrt[n]{\frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_s^n}{s}}.$$

Мы видѣли выше, что изъ свойствъ случайныхъ погрѣшностей для всякой нечетной функціи $F\varepsilon$ слѣдуетъ условіе

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F\varepsilon \varphi \varepsilon d\varepsilon = 0,$$

которое распадается на простѣйшія вида:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^n \varphi \varepsilon d\varepsilon = 0,$$

гдѣ n есть число нечетное. Если погрѣшности имѣютъ вполнѣ случайный характеръ и если число наблюдений безконечно велико, то это условіе, какъ мы видѣли, равносильно съ уравненіемъ:

$$\frac{\sum \varepsilon_i^n}{s} = 0.$$

При обыкновенныхъ обстоятельствахъ мы не имѣемъ права сдѣлать такого заключенія въ точномъ смыслѣ, но если наблюдения хорошо освобождены отъ постоянныхъ погрѣшностей и если число ихъ значительно, то естественно допустить, что $\frac{\sum \varepsilon_i^n}{s}$, если не равна нулю, то по крайней мѣрѣ имѣетъ чрезвычайно малую величину. Поэтому, называя чрезъ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_i \dots \varepsilon_s$ погрѣшности въ опредѣленіи величинъ $a_1, a_2 \dots a_i \dots a_s$, будетъ весьма вѣроятно опредѣленіе

x изъ уравненій $x - a_1 = \varepsilon_1$; $x - a_2 = \varepsilon_2$; ... $x - a_i = \varepsilon_i$; ... $x - a_s = \varepsilon_s$ подъ условіемъ что сумма нечетныхъ степеней погрѣшностей ε_i равна нулю. Называя величину x опредѣленную такимъ образомъ помощію степеней $2m - 1$ черезъ ξ_{2m-1} , получимъ для опредѣленія ξ_{2m-1} уравненіе

$$\sum \varepsilon_i^{2m-1} = \sum (\xi_{2m-1} - a_i)^{2m-1} = 0,$$

гдѣ знакъ $\sum$ распространяется на всѣ значенія i по порядку наблюденій отъ 1 до s . Въ простѣйшемъ случаѣ $m = 1$ мы имѣемъ

$$\sum (\xi_1 - a_i) = 0,$$

откуда

$$\xi_1 = \frac{\sum a_i}{s}.$$

При всякомъ другомъ значеніи m условіе $\sum \varepsilon_i^{2m-1} = 0$ приводитъ для опредѣленія ξ_{2m-1} къ чрезвычайно сложнымъ уравненіямъ высшихъ степеней и не даетъ для величины ξ_{2m-1} соответствующаго простѣйшаго средняго вывода:

$$\left[\frac{\sum a_i^{2m-1}}{s} \right]^{\frac{1}{2m-1}}$$

поэтому наивыгоднѣйшимъ результатомъ считается всегда выводъ ξ_1 , который называется *среднимъ ариѳметическимъ выводомъ* или *ариѳметическою средою*.¹ Ариѳметическая среда есть безъ сомнѣнія самое простое и самое естественное изъ всѣхъ возможныхъ сочетаній и потому издавна употреблялась для опредѣленія неизвѣстныхъ изъ многочисленныхъ непосредственныхъ данныхъ.

Погрѣшность ариѳметическаго вывода есть $\frac{\sum \varepsilon_i}{s}$; вѣроятность, чтобы она равнялась именно нулю бесконечно мала; но эта погрѣшность необходимо очень мала при большомъ числѣ хорошаго достоинства наблюденій. Чтобы показать яснѣе значеніе средняго ариѳметическаго вывода въ зависимости отъ числа и достоинства наблюденій и вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлить благонадежность его въ сравненіи съ другими выводами, опредѣляемыми изъ условій $\sum \varepsilon_i^{2m-1} = 0$; рѣшимъ слѣдующій общій вопросъ: найти вѣроятность предположенія, что сумма нечетныхъ степеней случайныхъ погрѣшностей наблюденій не превышаетъ даннаго предѣла. Этотъ важный вопросъ былъ разрѣшенъ Лапласомъ для суммы первыхъ степеней погрѣшностей; его рѣшеніе представляетъ намъ единственное и совершенно полное доказательство правила ариѳметической среды. Весьма легко обобщить анализъ Лапласа и примѣнить его къ суммѣ всякихъ нечетныхъ степеней.

§ 5.

Прежде нежели приступимъ къ разрѣшенію предложеннаго вопроса сдѣлаемъ небольшое отступленіе для того, чтобы приготовить нѣкоторыя формулы, необходимыя впоследствии.

Слѣдуя общепринятому обозначенію, положимъ:

$$\int_0^1 \left[\lg \left(\frac{1}{x} \right) \right]^{p-1} dx = \Gamma(p)$$

$$\int_0^1 y^{q-1} (1-y)^{p-1} dy = B(p, q);$$

опредѣленные интегралы $B(p, q)$ и $\Gamma(p)$ извѣстны подъ именемъ Эйлеровыхъ интеграловъ перваго и втораго рода. Если положимъ $\lg \frac{1}{x} = z$ въ выраженіи $\Gamma(p)$ и $y = \frac{1}{1+x}$ въ выраженіи $B(p, q)$, то найдемъ:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z} dz.$$

$$B(p, q) = \int_0^\infty x^{p-1} (1+x)^{-(p+q)} dx.$$

Разложеніе по частямъ интеграла $\Gamma(p)$ даетъ уравненіе

$$\Gamma(p) = (p-1) \cdot \Gamma(p-1).$$

Вставимъ въ $\Gamma(p)$ вмѣсто z величину uz и вмѣсто dz величину udz , получимъ

$$\int_0^\infty z^{p-1} e^{-uz} dz = \frac{\Gamma(p)}{u^p}$$

Положимъ $u = 1+x$, и замѣнимъ p суммою $p+q$, тогда выдетъ:

$$\frac{1}{(1+x)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty z^{p+q-1} e^{-(1+x)z} dz;$$

помножая это выраженіе на $x^{p-1} dx$ и интегрируя между предѣлами 0 и ∞ , найдемъ:

$$\int_0^\infty x^{p-1} (1+x)^{-(p+q)} dx = B(p, q) = \frac{1}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty z^{p+q-1} e^{-z} dz \cdot \int_0^\infty x^{p-1} e^{-zx} dx,$$

или

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)} \int_0^\infty \frac{z^{p+q-1} e^{-z} dz}{z^p},$$

откуда получаемъ наконецъ известное соотношеніе Эйлеровыхъ интеграловъ:

$$\Gamma(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Въ случаѣ $p = q = \frac{1}{2}$ эта формула, по причинѣ $\Gamma(1) = 1$, обращается въ

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = 2 \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \pi;$$

отсюда получимъ

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Поставимъ въ выраженіи $\Gamma(p)$ вмѣсто z величину t^2 и слѣд. вмѣсто dz выраженіе $2tdt$, тогда будетъ

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^\infty t^{2p-1} e^{-t^2} dt;$$

при $p = \frac{1}{2}$ это уравненіе служитъ къ опредѣленію интеграла $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ и мы имѣемъ

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ и } \int_{-\infty}^+ e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Для всѣхъ цѣлыхъ и положительныхъ величинъ p имѣемъ

$$\Gamma(p) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1),$$

слѣд. для нечетныхъ чиселъ n имѣемъ вообще

$$2 \int_0^\infty t^n e^{-t^2} dt = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{n-1}{2}$$

Интегралы $2 \int_0^\infty t^n e^{-t^2} dt$ при четномъ n будутъ зависѣть отъ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; потому что

въ этомъ случаѣ $p = \frac{n+1}{2}$ не можетъ сократиться и мы имѣемъ:

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \dots \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

и слѣд. при четномъ n имѣемъ

$$2 \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{n-3}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Такимъ образомъ при всякомъ m выходитъ:

$$2 \int_0^{\infty} t^{2m-1} e^{-t^2} dt = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1).$$

и

$$2 \int_0^{\infty} t^{2m} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \dots \frac{2m-3}{2} \cdot \frac{2m-1}{2} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Изъ уравненія

$$2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

слѣдуетъ очевидно

$$\int_0^{\infty} e^{-(t+a)^2} dt + \int_0^{\infty} e^{-(t-a)^2} dt = \sqrt{\pi};$$

отсюда

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \left(\frac{e^{2at} + e^{-2at}}{2} \right) dt = e^{a^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

и, подставивъ сюда вмѣсто a мнимую величину ai , гдѣ $i = \sqrt{-1}$, получимъ

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 2at \cdot dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}.$$

Рѣшеніе вопросовъ, зависящихъ отъ большихъ чиселъ, приводится по большей части къ интегралу

$$\int_0^t e^{-t^2} dt.$$