

С.П. Глазенап

Тригонометрия

Часть 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С11

С11 **С.П. Глазенап**
Тригонометрия: Часть 2 / С.П. Глазенап – М.: Книга по Требованию, 2013. – 134 с.

ISBN 978-5-458-28301-4

Автор предлагаемого учебника по тригонометрии – русский ученый профессор Сергей Павлович Глазенап [Глазенап С.П.], астроном, инициатор создания и руководитель строительства Петербургской обсерватории. Помимо этого учебника, С. Глазенап является автором ряда значимых трудов по астрономии и математике. В данном издании излагается учение о гониометрии части тригонометрии [Тригонометрия], в которой рассматриваются способы измерения углов. При изложении предмета автор руководствуется так называемым концентрическим методом. В начале книги предлагаются программы [Программа реальных училищ] изучения тригонометрии в реальных училищах и мужских гимназиях, утвержденные Министерством народного просвещения и действующие во время издания книги (1916 г.). Напротив каждого пункта программ указаны соответствующие параграфы учебника. Всего издание содержит 8 глав, каждая из которых в свою очередь разделена на параграфы. В первой главе рассматриваются углы [Угол] и дуги [Дуга], во второй главе автор раскрывает понятие тригонометрических функций, уделяя внимание геометрическому изображению тригонометрических функций. Далее освещаются основные формулы гониометрии, обратные тригонометрические функции [Функция тригонометрическая обратная], теоремы сложения, приведение многочленов к логарифмическому виду, тригонометрические уравнения. Последняя глава дает представление о составлении тригонометрических таблиц [Таблица тригонометрическая]. Приводятся примеры задач с подробным решением. В конце каждой главы предлагаются примеры, задачи и упражнения для самостоятельного решения. Текст сопровождается четкими и достаточно крупными рисунками, что для учебного издания очень важно.

ISBN 978-5-458-28301-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Программа Тригонометрии мужскихъ гимназій.

(Римскія цифры означаютъ часть, а арабскія § настоящей Тригонометрии).

Двойное измѣреніе угловъ и дугъ (II, 1—10).—Тригонометрическія функціи и ихъ измѣненія съ измѣненіемъ дуги отъ 0 до $+\infty$ и отъ 0 до $-\infty$ (II, 11—17).—Дополнительныя дуги (II, 19).—Построеніе дугъ по данному значенію какой-либо изъ тригонометрическихъ функцій (II, 25).

Соотношенія между тригонометрическими функціями одной и той же дуги меньшей 90° и обобщеніе этихъ соотношеній для любой дуги (II, 20).—Тригонометрическія функціи дугъ въ 30° , 45° и 60° (II, 22).

Приведеніе тригонометрическихъ функцій какіхъ угодно дугъ къ тригонометрическимъ функціямъ дугъ первой четверти (II, 18, 19).—Общее выраженіе дугъ, отвѣчающихъ данному значенію тригонометрическихъ функцій (II, 25).

Синусъ и косинусъ суммы двухъ дугъ для случая, когда каждая изъ этихъ дугъ больше 0, а сумма ихъ меньше 90° . Распространеніе этихъ формулъ на случаи какіхъ угодно дугъ (II, 27—29).—Тангенсъ и котангенсъ суммы двухъ дугъ (II, 30).—Тригонометрическія функціи разности двухъ дугъ (II, 27—29).—Тригонометрическія функціи двойной и половинной дуги (II, 31, 32).

Преобразованіе суммы и разности синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ (II, 34).—Отношеніе суммы синусовъ двухъ дугъ къ ихъ разности (II, 35).

Выводъ и равенства $\sin a < a < \frac{1}{\cos a}$ (II, 44). Предѣлы отношенія $\frac{\sin a}{a}$ при a , стремящемся къ 0 (II, 45).—Разность между дугою и синусомъ ея (II, 46).—Понятіе о вычисленіи тригонометрическихъ функцій (II, 47, 48).

Составъ и употребленіе таблицъ логарифмовъ тригонометрическихъ функцій (I, 12—16 и II, 51).

Рѣшеніе простѣйшихъ тригонометрическихъ уравненій (II, 39—43).

Соотношеніе между элементами прямоугольнаго треугольника (I, 19—20).

Соотношенія между элементами косоугольнаго треугольника (I, 24—30).

Основные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ (I, 21).—Особенные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ (по суммѣ или разности гипотенузы съ катетомъ и острому углу; по суммѣ или разности катетовъ и острому углу) (I, 22).

Рѣшеніе косоугольнаго треугольника по тремъ сторонамъ его (I, 32).—Рѣшеніе треугольника по двумъ сторонамъ и углу между ними (I, 34).—Рѣшеніе треугольника по двумъ сторонамъ и углу, лежащему противъ одной изъ нихъ. Изслѣдованіе этого рѣшенія (I, 36).—Рѣшеніе треугольника по одной изъ сторонъ и двумъ угламъ (I, 38).

Формула Мольвейде (I, 28).—Различныя выраженія площади треугольника (I, 40—42).

Сокращенія, принятые въ настоящемъ учебникѣ:

Километръ обозначается . . . km	футъ обозначается . . . ф.
метръ » . . . m	дюймъ » . . . д.
дециметръ » . . . dm	линія » . . . л.
сантиметръ » . . . cm	десятина » . . . дес.
миллиметръ . . . mm	гектаръ » . . . гект.
верста » . . . вер.	килограммъ » . . . клгр.
сажень . . . саж.	часъ » . . . ч.
аршинъ » . . . арш.	минута » . . . м.
вершокъ » . . . верш.	секунда » . . . с.
квадратный метръ . . . m ²	кубическій метръ . . . m ³
» сантиметръ . . . cm ²	» сантиметръ . . . см ³
» миллиметръ . . . mm ²	» миллиметръ . . . мм ³
» аршинъ кв. арш.	» аршинъ куб. арш.
» сажень кв. саж.	» сажень куб. саж.

Собраніе гониометрическихъ формулъ, а также формулъ для рѣшенія треугольниковъ дано на стр. 115—117 «Таблицъ логарифмовъ съ пятью десятичными знаками» С. Глазенапа.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

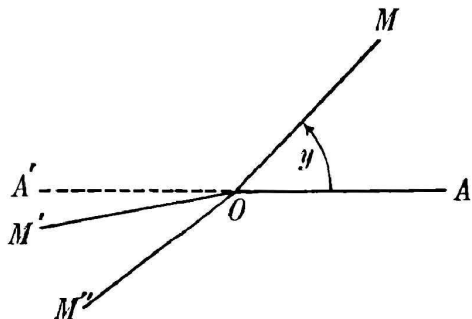
	СТРАН.
Глава I. Углы и дуги	I
§ 1. Углы и ихъ алгебраическое выраженіе (1).— § 2. Измѣреніе угловъ. Радіанъ (3).— § 3. Дуги и ихъ алгебраическое выраженіе (4).— § 4. Измѣреніе дугъ (5).— § 5. Измѣреніе угловъ дугами (5).— § 6. Тригонометрическій кругъ (6).— § 7. Зависимость между угломъ, дугою и радіусомъ круга (6).— § 8. Примеры (7).— § 9. Упражненія (10).— § 10. Задачи (10).	
Глава II. Тригонометрическія функціи	16
§ 11. Общее понятіе о функціяхъ (11).— § 12. Опредѣленіе положенія точекъ на линіи и на плоскости (12).— § 13. Тригонометрическія функціи дуги (14).— § 14. Геометрическое изображеніе тригонометрическихъ функцій (16).— § 15. Измѣненіе значеній тригонометрическихъ функцій при измѣненіи дуги въ предѣлахъ одной окружности (21).— § 16. Измѣненіе значеній тригонометрическихъ функцій при измѣненіи дуги отъ $-\infty$ до $+\infty$ (25).— § 17. Графическое изображеніе измѣненій тригонометрическихъ функцій (26).	
Глава III. Основныя формулы Гоніометріи	34
§ 18. Тригонометрическія функціи отрицательныхъ дугъ (29).— § 19. Формулы приведенія тригонометрическихъ функцій какой ни есть дуги къ тригонометрическимъ функціямъ дуги, заключенной между 0 и $\frac{\pi}{4}$ (30).— § 20. Соотношенія между тригонометрическими функціями одной и той же дуги (41).— § 21. Выраженіе пяти тригонометрическихъ функцій въ зависимости отъ шестой (43).— § 22. Вычисленіе значеній тригонометрическихъ функцій нѣкоторыхъ дугъ (44).— § 23. Иное выраженіе дугъ II-й и IV-й четвертей и ихъ тригонометрическихъ функцій (46).— § 24. Упражненія (49).	
Глава IV. Обратныя тригонометрическія функціи	51
§ 25. Общее выраженіе дугъ, отвѣчающихъ данному значенію тригонометрической функціи (51).— § 26. Обратныя круговыя функціи (55).—Задачи и упражненія къ § 26 (58).	

Глава V. Теоремы сложения	60
§ 27. Сложение и вычитание дугъ (60).—§ 28. Тригонометрическія функціи суммы или разности двухъ дугъ (теорема сложения) (64).—	
§ 29. Обобщеніе предыдущей теоремы (64).—§ 30. Тангенсъ и котангенсъ суммы и разности двухъ дугъ (62).—§ 31. Тригонометрическія функціи двойной дуги (69).—§ 32. Тригонометрическія функціи половинны дуги (71).—§ 33. Упражненія и задачи (74).	
Глава VI. Приведеніе многочленовъ къ логарифмическому виду	75
§ 34. Представленіе суммы и разности синусовъ и косинусовъ въ видѣ произведеній (75).—§ 35. Отношеніе суммы синусовъ двухъ дугъ къ ихъ разности (76).—§ 36. Приведеніе двучлена къ логарифмическому виду (77).—§ 37. Приведеніе многочлена къ логарифмическому виду (81).—§ 38. Приведеніе вещественныхъ корней квадратнаго уравненія къ логарифмическому виду (82).—Упражненія къ § 38 (83).	
Глава VII. Тригонометрическія уравненія	84
§ 39. Общія замѣчанія о рѣшеніи тригонометрическихъ уравненій (84).—§ 40. Тригонометрическія уравненія съ одною неизвѣстною (86).—§ 41. Тригонометрическія уравненія съ двумя неизвѣстными (92).—§ 42. Упражненія и задачи (97).—§ 43. Трансцендентныя уравненія (97).	
Глава VIII. Составленіе тригонометрическихъ таблицъ	99
§ 44. Всякая дуга первой четверти больше своего синуса и меньше своего тангенса: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ (99).—§ 45. Предѣлы отношенія $\frac{\sin x}{x}$ при x , стремящемся къ нулю (100).—§ 46. Разность между дугою первой четверти и ея синусомъ (102).—§ 47. Составленіе таблицы синусовъ и косинусовъ угловъ отъ 30 до 45° (103).—§ 48. Вычисленіе таблицы синусовъ и косинусовъ угловъ отъ 0° до 30°. Формулы Симсона (104).—§ 49. Повѣрка тригонометрическихъ таблицъ (106).—§ 50. Разложеніе синусовъ и косинусовъ въ ряды по возрастающимъ степенямъ дуги (107).—§ 51. Логарифмы тригонометрическихъ величинъ малыхъ угловъ (111).—§ 52. Упражненія (116).	
Отвѣты на задачи во второй части	117

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Углы и дуги.

§ 1. Углы и их алгебраическое выраженіе. Углы могутъ быть образуемы вращеніемъ линіи OM около нѣкоторой точки O . Линія OA , остающаяся неподвижною, называется **начальною**, или **основною**, а линія OM , могущая принимать всевозможныя положенія, — **образующею** или **радіусомъ-векторомъ**. Линія OA называется также **основною стороною** даннаго угла, а линія OM — его **второю стороною**.



При вращеніи радіусъ-вектора по направленію стрѣлки отъ начальнаго положенія OA , когда уголъ принимается равнымъ 0° , до спрямленія тупого угла въ положеніи OA' , уголъ y принимаетъ послѣдовательно всевозможныя значенія отъ 0° до 180° . Если радіусъ-векторъ перейдетъ линію OA' и приметъ положенія OM' , OM'' и т. д., то уголъ, непрерывно увеличиваясь, станетъ выступающимъ и будетъ болѣе 180° . Когда, при дальнѣйшемъ вращеніи, радіусъ-векторъ совмѣстится съ основною стороною OA , уголъ приметъ значеніе въ 360° ,

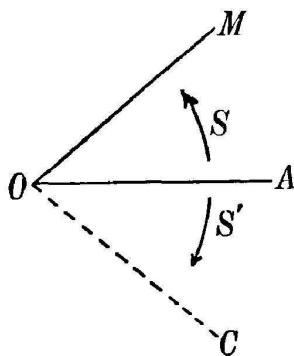
а когда онъ дойдетъ до положенія OM , уголъ будетъ равенъ $y + 360^\circ$, гдѣ y равенъ геометрическому углу AOM . Затѣмъ, при дальнѣйшемъ вращеніи радіуса-вектора, уголъ продолжаетъ увеличиваться и при каждомъ новѣмъ совпаденіи радіуса-вектора съ OM увеличится на 360° . Вообще уголъ будетъ равенъ:

$$\begin{array}{lll} \text{послѣ 1-го оборота} & A_1 = y + 360^\circ \\ \text{» 2-го} & \text{»} & A_2 = y + 360^\circ \times 2 \\ \text{» 3-го} & \text{»} & A_3 = y + 360^\circ \times 3 \\ & \text{и т. д.} & \\ \text{» } n\text{-го} & \text{»} & A_n = y + 360^\circ \times n \end{array}$$

Такимъ образомъ выраженіе угла, одна сторона котораго направлена по OA , а другая по OM , можетъ быть представлено формулою:

$$A = 360^\circ n + y, \quad (1)$$

гдѣ n есть какое угодно цѣлое положительное число, включая и нуль, а y —геометрическій уголъ AOM меньше 360°



Всякій уголъ, ограниченный линиями OA и OM , можетъ быть образованъ вращеніемъ радіуса-вектора, съ одной стороны, отъ OA къ OM по направленію стрѣлки S , съ другой же вращеніемъ въ противоположную сторону по стрѣлкѣ S' отъ OA къ OC и далѣе до OM . Въ обоихъ случаяхъ абсолютное значеніе угла можетъ безгранично возрастать. Для избѣжанія неопредѣленности условились примѣ

нять къ угламъ правило Декарта и считать **положительными** углы, образуемые вращеніемъ радіуса-вектора **против часовой стрѣлки** или **справа налѣво** для наблюдателя, мысленно находящагося въ вершинѣ угла, а **отрицательными** углы, образуемые вращеніемъ радіуса-вектора въ противоположную сторону, — т. е. по часовой стрѣлкѣ или слѣва направо. На этомъ основаніи уголъ, имѣющій сторонамъ

линии OA и OM и образованный вращениемъ линии въ обратномъ направленіи по стрѣлкѣ S' , равенъ $y - 360^\circ = A'$. При второмъ оборотѣ радіуса-вектора въ отрицательномъ направленіи уголъ принимаетъ значеніе $A'' = y - 360^\circ \times 2$, при третьемъ оборотѣ въ ту же сторону $A''' = y - 360^\circ \times 3$ и вообще послѣ m оборотовъ

$$A = y - 360^\circ m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

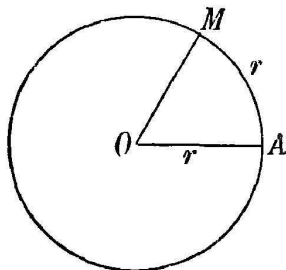
Оба выраженія (1) и (2) соединяются въ одно слѣдующее:

$$A = 360^\circ n + y, \quad \dots \dots \dots (3)$$

въ которомъ n есть какое угодно цѣлое положительное или отрицательное число, включая и нуль, а y — нѣкоторый уголъ меньше 360° , называемый геометрическимъ или **основнымъ**.

Итакъ, абсолютное значеніе угла можетъ измѣняться безгранично.

§ 2. Измѣреніе угловъ. Радіанъ. Углы выражаются въ градусахъ, градахъ и часахъ (§ 2, ч. I). **Градусомъ** называется $\frac{1}{90}$, **градомъ**— $\frac{1}{100}$, а **часомъ**— $\frac{1}{6}$ прямого угла. Во всѣхъ случаяхъ за единицу угловъ принимается опредѣленная часть прямого угла. Иногда за единицу угловъ принимается уголъ, стягиваемый дугою, длина которой равна ея радіусу.



Центральный уголъ, стягиваемый дугою, равною радіусу даннаго круга, называется **радіаномъ**.

Пусть $OA = r$ будетъ радіусъ нѣкотораго круга, и пусть дуга AM , стягивающая центральный уголъ AOM , равна радіусу r ; въ такомъ случаѣ $\angle AOM$ есть тотъ уголъ, который называется радіаномъ.

Радіанъ есть **постоянная величина**, не зависящая отъ радіуса круга. Дѣйствительно, исходя изъ извѣстнаго свойства дугъ круговъ, а именно, что дуги круга пропорціо-

нальны стягиваемымъ ими центральнымъ угламъ, имѣемъ:

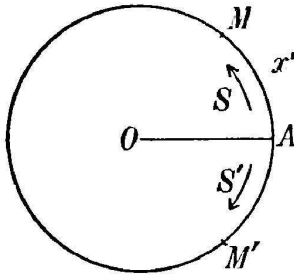
$$\frac{\angle AOM}{4d} = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi},$$

откуда

$$\angle AOM = \frac{4d}{2\pi} = \frac{2d}{\pi} \dots \dots \dots (4)$$

Какъ числитель, такъ и знаменатель послѣдней дроби суть величины постоянныя; слѣдовательно, и радіантъ AOM , равный отношенію двухъ постоянныхъ величинъ, является тоже постоянною величиною; радіантъ не зависитъ отъ радіуса круга.

§ 3. Дуги и ихъ алгебраическое выраженіе. Пусть $x' = AM$ изображаетъ длину нѣкоторой дуги круга, радіусъ котораго $OA = r$. Дуги измѣряются отъ произвольно-избранной, но постоянной, точки A и считаются, подобно угламъ, за положительныя въ одну сторону и за отрицательныя въ другую. Положительныя дуги условились считать отъ A къ M по направленію стрѣлки S , а отрицательныя—въ противоположную сторону, по направленію стрѣлки S' .



Какъ углы могутъ быть образуемы вращеніемъ радіуса-вектора (§ 1), такъ дуги—движеніемъ точки по окружности.

Если точка, двигаясь все время по одному направленію въ ту или другую сторону отъ точки M , опишетъ полную окружность, пройдя длину, равную $2\pi r$, то она вернется въ прежнее положеніе M ; то же самое произойдетъ при второмъ, третьемъ и т. д. оборотахъ; поэтому алгебраическое выраженіе дугъ, имѣющихъ начало въ точкѣ A и конецъ въ M , будетъ:

$$\left. \begin{array}{l} V_0 = x' \\ V_1 = x' + 2\pi r; \quad V_2 = x' + 2 \times 2\pi r, \text{ и т. д.} \\ V' = x' - 2\pi r, \quad V'' = x' - 2 \times 2\pi r, \text{ и т. д.} \end{array} \right\} \dots \dots (5)$$

Всѣ эти выраженія могутъ быть представлены одною формулою:

$$V = 2\pi r + x', \dots \dots \dots (6)$$

гдѣ n есть какое-угодно цѣлое положительное или отрицательное число, включая и нуль, а x' есть основное значеніе дуги V . Придавая n какія угодно положительныя или отрицательныя значенія, мы можемъ получить дуги, абсолютное значеніе которыхъ больше всякой данной величины.

§ 4. Измѣреніе дугъ. Дуга V предыдущей формулы, именно

$$V = 2\pi r + x',$$

выражается въ тѣхъ же линейныхъ единицахъ, что и радіусъ r ; на примѣръ, если радіусъ r выраженъ въ метрахъ, то и x' , а слѣдовательно и V , выражаются въ метрахъ.

Раздѣливъ обѣ части выраженія V на r , мы получимъ въ частномъ отвѣченое число v :

$$v = \frac{V}{r} = 2\pi + \frac{x'}{r}, \dots \dots \dots (7)$$

показывающее, во сколько разъ длина данной дуги больше дуги, длина которой равна радіусу.

Дуга, по длинѣ равная радіусу, стягивающая центральный уголъ, равный одному радіану, называется **дуговымъ радіаномъ**.

Положивъ $\frac{x'}{r} = x$, мы будемъ имѣть:

$$v = 2\pi + x \dots \dots \dots (8)$$

Дуга x считается **основною** алгебраическаго выраженія v ; дуги v и x выражены въ дуговыхъ радіанахъ.

§ 5. Измѣреніе угловъ дугами. Углы могутъ быть также измѣряемы нѣкоторою постоянною дугою, имѣющею опредѣленную величину.

Длина спрямленной дуги, равной ея радіусу, принимается за единицу измѣренія дугъ. Уголъ, стягиваемый

подобною дугою, называется радіаномъ (§ 2); мы обозначимъ его $r^{(0)}$; его значеніе равно

$$r^{(0)} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ, 2958... \quad (9)$$

Пусть y будетъ нѣкоторый уголъ, стягиваемый дугою V при радіусѣ круга r ; въ такомъ случаѣ:

$$\frac{y}{r^{(0)}} = \frac{V}{r} = v \quad (10)$$

Итакъ, уголъ, выраженный въ радіанахъ, равенъ длинѣ стягивающей его дуги, выраженной въ частяхъ радіуса.

§ 6. Тригонометрическій кругъ. Принявъ радіусъ за единицу ($r = 1$), получимъ кругъ, называемый **тригонометрическимъ**; въ немъ имѣемъ:

$$\frac{y}{r^{(0)}} = v, \quad (11)$$

т. е. уголъ, выраженный въ радіанахъ, равенъ стягивающей его дугѣ тригонометрическаго круга. Отсюда выводимъ заключеніе, что углы могутъ быть измѣряемы стягивающими ихъ дугами. Дѣйствительно, принявъ $r^{(0)} = 1$, мы получимъ

$$y = v. \quad (12)$$

На основаніи этого равенства мы можемъ замѣнять углы дугами и, обратно, дуги замѣнять углами, помня, однако, что дуги выражены въ частяхъ радіуса, а углы въ радіанахъ.

§ 7. Зависимость между угломъ, дугою и радіусомъ даннаго круга. Приведенное отношеніе (10), именно

$$\frac{y}{r^{(0)}} = \frac{V}{r} \quad (13)$$

даетъ возможность по данному углу, выраженному въ градусахъ, вычислить длину дуги даннаго радіуса r и, обратно, по длинѣ дуги даннаго радіуса r вычислить величину угла y въ градусахъ. Мы выводимъ:

$$y = r^{(0)} \frac{V}{r} = r^{(0)} v, \quad V = \frac{y}{r^{(0)}} r \text{ и } r = \frac{V}{y} r^{(0)} \quad (14)$$