

С.П. Глазенап

Тригонометрия

Часть 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С11

C11 С.П. Глазенап
Тригонометрия: Часть 2 / С.П. Глазенап – М.: Книга по Требованию, 2013. –
134 с.

ISBN 978-5-458-28301-4

Автор предлагаемого учебника по тригонометрии – русский ученый профессор Сергей Павлович Глазенап [Глазенап С.П.] , астроном, инициатор создания и руководитель строительства Петербургской обсерватории. Помимо этого учебника, С. Глазенап является автором ряда значимых трудов по астрономии и математике. В данном издании излагается учение о гониометрии части тригонометрии [Тригонометрия] , в которой рассматриваются способы измерения углов. При изложении предмета автор руководствуется так называемым концентрическим методом. В начале книги предлагаются программы [Программа реальных училищ] изучения тригонометрии в реальных училищах и мужских гимназиях, утвержденные Министерством народного просвещения и действующие во время издания книги (1916 г.). Напротив каждого пункта программ указаны соответствующие параграфы учебника. Всего издание содержит 8 глав, каждая из которых в свою очередь разделена на параграфы. В первой главе рассматриваются углы [Угол] и дуги [Дуга] , во второй главе автор раскрывает понятие тригонометрических функций, уделяя внимание геометрическому изображению тригонометрических функций. Далее освещаются основные формулы гониометрии, обратные тригонометрические функции [Функция тригонометрическая обратная] , теоремы сложения, приведение многочленов к логарифмическому виду, тригонометрические уравнения. Последняя глава дает представление о составлении тригонометрических таблиц [Таблица тригонометрическая] . Приводятся примеры задач с подробным решением. В конце каждой главы предлагаются примеры, задачи и упражнения для самостоятельного решения. Текст сопровождается четкими и достаточно крупными рисунками, что для учебного издания очень важно.

ISBN 978-5-458-28301-4

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Программа Тригонометрії мужскихъ гимназій.

(Римскія цифры означаютъ часть, а арабскія § настоящей Тригонометрії).

Двонкое измѣреніе угловъ и дугъ (II, I—10).—Тригонометрическія функции и ихъ измѣненія съ измѣненіемъ дуги отъ 0 до $+\infty$ и отъ 0 до $-\infty$ (II, 11—17).—Дополнительныя дуги (II, 19).—Построеніе дугъ по данному значенію какой-либо изъ тригонометрическихъ функций (II, 25).

Соотношенія между тригонометрическими функциями одной и той же дуги меньшей 90° и обобщеніе этихъ соотношеній для любой дуги (II, 20).—Тригонометрическая функция дугъ въ 30° , 45° и 60° (II, 22).

Приведеніе тригонометрическихъ функций какихъ угодно дугъ къ тригонометрическимъ функциямъ дугъ первой четверти (II, 18, 19).—Общее выраженіе дугъ, отвѣчающихъ данному значенію тригонометрическихъ функций (II, 25).

Синусъ и косинусъ суммы двухъ дугъ для случая, когда каждая изъ этихъ дугъ больше 0, а сумма ихъ меньше 90° . Распространеніе этихъ формулъ во случаи какихъ угодно дугъ (II, 27—29).—Тангенсъ и котангенсъ суммы двухъ дугъ (II, 30).—Тригонометрическая функция разности двухъ дугъ (II, 27—29).—Тригонометрическая функция двойной и половинной дуги (II, 31, 32).

Преобразованіе суммы и разности синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ (II, 34).—Отношеніе суммы синусовъ двухъ дугъ къ ихъ разности (II, 35).

Вывѣтъ и равенства $\sin a < a - \frac{1}{3}a^3$ (II, 44). Предѣлъ отношенія $\frac{\sin a}{a}$ при a , стремящемся къ 0 (II, 45).—Разность между дугою и синусомъ ея (II, 46).—Понятіе о вычисленіи тригонометрическихъ функций (II, 47, 48).

Составъ и употребленіе таблицъ логарифмовъ тригонометрическихъ функций (I, 12—16 и II, 51).

Рѣшеніе простѣйшихъ тригонометрическихъ уравненій (II, 39—43).

Соотношение между элементами прямоугольного треугольника (I, 19—20).

Соотношения между элементами косоугольного треугольника (I, 24—30).

Основные случаи решения прямоугольныхъ треугольниковъ (I, 21).—Особенные случаи решения прямоугольныхъ треугольниковъ (по суммѣ или разности гипотенузы съ катетомъ и острому углу; по суммѣ или разности катетовъ и острому углу) (I, 22).

Рѣшеніе косоугольного треугольника по тремъ сторонамъ его (I, 32).—Рѣшеніе треугольника по двумъ сторонамъ и углу между ними (I, 34).—Рѣшеніе треугольника по двумъ сторонамъ и углу, лежащему противъ одной изъ нихъ. Изслѣдованіе этого рѣшенія (I, 36).—Рѣшеніе треугольника по одной изъ сторонъ и двумъ угламъ (I, 38).

Формула Мольвейде (I, 28).—Различные выражениія площади треугольника (I, 40—42).

Сокращенія, принятыя въ настоящемъ учебнику:

Километръ обозначается . . .	км	футъ обозначается . . .	ф.
метръ . . .	м	дюймъ . . .	д.
десиметръ . . .	dm	линя . . .	л.
сантиметръ . . .	cm	деситина . . .	дес.
миллиметръ . . .	mm	гектаръ . . .	гаект.
верста . . .	вер.	килограммъ . . .	килгр.
сажень . . .	саж.	часъ . . .	ч.
аршинъ . . .	арш.	минута . . .	м.
вершокъ . . .	верш.	секунда . . .	с.
квадратный метръ . . .	m ²	кубической метръ . . .	m ³
сантиметръ . . .	cm ²	сантиметръ . . .	cm ³
миллиметръ . . .	mm ²	миллиметръ . . .	mm ³
аршинъ . . .	кв. арш.	аршинъ . . .	куб. арш.
сажень . . .	кв. саж.	сажень . . .	куб. саж.

Собрание геометрическихъ формулъ, а также формулы для решения треугольниковъ дано на стр. 115—117 «Таблицъ логарифмовъ съ пятью десятичными знаками» С. Глазенапа.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	СТРАН.
Глава I. Углы и дуги	1
§ 1. Углы и ихъ алгебраическое выражение (1).—§ 2. Измѣреніе угловъ. Радианъ (3).—§ 3. Дуги и ихъ алгебраическое выражение (4).—§ 4. Измѣреніе дугъ (5).—§ 5. Измѣреніе угловъ дугами (6).—§ 6. Тригонометрический кругъ (6).—§ 7. Зависимость между угломъ, дугой и радиусомъ круга (6).—§ 8. Примѣры (7).—§ 9. Упражненія (10).—§ 10. Задачи (10).	
Глава II. Тригонометрическія функции	16
§ 11. Общее понятіе о функцияхъ (11).—§ 12. Определеніе положенія точекъ на линіи и на плоскости (12).—§ 13. Тригонометрическія функции дуги (14).—§ 14. Геометрическое изображеніе тригонометрическихъ функций (16).—§ 15. Измѣненіе значений тригонометрическихъ функций при измѣненіи дуги отъ $-\infty$ до $+\infty$ (25).—§ 16. Измѣненіе значений тригонометрическихъ функций при измѣненіи дуги отъ $-\infty$ до $+\infty$ (25).—§ 17. Графическое изображеніе измѣненій тригонометрическихъ функций (26).	
Глава III. Основныя формулы Гоніометріи	34
§ 18. Тригонометрическія функции отрицательныхъ дугъ (29).—§ 19. Формулы приведеніи тригонометрическихъ функций какої ви есть дуги къ тригонометрическимъ функциямъ дуги, заключенной между 0 и $\frac{\pi}{4}$ (30).—§ 20. Соотношенія между тригонометрическими функциями одной и той же дуги (41).—§ 21. Выраженіе пяти тригонометрическихъ функций въ зависимости отъ шестой (43).—§ 22. Вычислительные значения тригонометрическихъ функций изъ которыхъ дугъ (44).—§ 23. Иное выраженіе дугъ II-й и IV-й четвертей и ихъ тригонометрическихъ функций (46).—§ 24. Упражненія (49).	
Глава IV. Обратныя тригонометрическія функции	51
§ 25. Общее выраженіе дугъ, отвѣщающихъ давниому значенію тригонометрической функции (51).—§ 26. Обратныя круговые функции (55).—Задачи и упражненія къ § 26 (58).	

Глава V. Теоремы сложения	60
§ 27. Сложение и вычитание дугъ (60).—§ 28. Тригонометрическія функции суммы или разности двухъ дугъ (теорема сложения) (64).— § 29. Обобщеніе предыдущей теоремы (64).—§ 30. Тангенсъ и ко- тangenсъ суммы и разности двухъ дугъ (62).—§ 31. Тригонометри- ческія функции двоиной дуги (69).—§ 32. Тригонометрическія функции половины дуги (71).—§ 33. Упражненія и задачи (74).	
Глава VI. Приведеніе многочленовъ къ логарифмическому виду	75
§ 34. Представление суммы и разности синусовъ и косинусовъ въ видѣ произведений (75).—§ 35. Отношеніе суммы синусовъ двухъ дугъ къ ихъ разности (76).—§ 36. Приведеніе двучлена къ логариф- мическому виду (77).—§ 37. Приведеніе многочлена къ логарифми- ческому виду (81).—§ 38. Приведеніе вещественныхъ корней квад- ратного уравненія къ логарифмическому виду (82).—Упражненія къ § 38 (83).	
Глава VII. Тригонометрическія уравненія	84
§ 39. Общая замѣтка о решеніи тригонометрическихъ уравнен- ій (84).—§ 40. Тригонометрическія уравненія съ одною неизвѣст- ною (86).—§ 41. Тригонометрическія уравненія съ двумя неизвѣст- ными (92).—§ 42. Упражненія и задачи (97).—§ 43. Трансцендент- ные уравненія (97).	
Глава VIII. Составленіе тригонометрическихъ таблицъ	99
§ 44. Всякая дуга первой четверти больше своего синуса и меньше своего тангенса; $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ (99).—§ 45. Предѣль отношенія $\frac{\sin x}{x}$ при x стремящемся къ нулю (100).—§ 46. Разность между дугою первой четверти и ея синусомъ (102).—§ 47. Составленіе таблицы синусовъ и косинусовъ угловъ отъ 30° до 45° (103).— § 48. Вычисление таблицы синусовъ и косинусовъ угловъ отъ 0° до 30° . Формулы Синисона (104).—§ 49. Повѣрка тригонометрическихъ таблицъ (106).—§ 50. Разложenie синусовъ и косинусовъ въ ряды по возрастающимъ степенямъ дуги (107).—§ 51. Логарифмы триго- нометрическихъ величинъ малыхъ угловъ (111).—§ 52. Упражненія (116).	
Отвѣты на задачи ко второй части	117

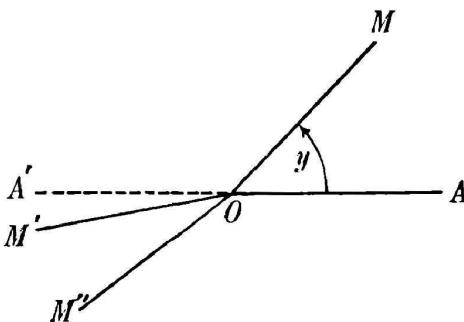
ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Углы и дуги.

§ 1. Углы и ихъ алгебраическое выражение. Углы могутъ быть образуемы вращенiemъ линіи OM около нѣкоторой точки O . Линія OA , остающаяся неподвижною, называется **начальною**, или **основною**, а линія OM , могущая принимать всевозможныя положенія,— **образующею** или **радиусъ-векторомъ**. Линія OA называется также **основною стороною** даннаго угла, а линія OM — **его второю стороною**.

При вращеніи радиуса-вектора по направлению стрѣлки отъ начального положенія

OA , когда уголъ принимается равнымъ 0° , до спрямленія тупого угла въ положеніи OA' , уголъ y принимаетъ послѣдовательно всевозможныя значенія отъ 0° до 180° . Если радиусъ-векторъ перейдетъ линію OA' и приметъ положенія OM', OM'' и т. д., то уголъ, безпрерывно увеличиваясь, станетъ выступающимъ и будетъ болѣе 180° . Когда, при дальнѣйшемъ вращеніи, радиусъ-векторъ совмѣстится съ основною стороною OA , уголъ приметъ значение въ 360° ,



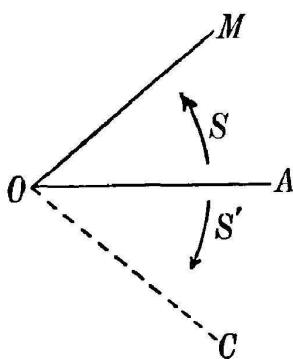
а когда онъ дойдетъ до положенія OM , уголъ будетъ равенъ $y + 360^\circ$, гдѣ y равенъ геометрическому углу AOM . Затѣмъ, при дальнѣйшемъ вращеніи радиуса-вектора, уголъ продолжаетъ увеличиваться и при каждомъ новомъ совпаденіи радиуса-вектора съ OM увеличится на 360° . Вообще уголъ будетъ равенъ:

$$\begin{aligned} \text{послѣ 1-го оборота } A_1 &= y + 360^\circ \\ \text{» 2-го } &A_2 = y + 360^\circ \times 2 \\ \text{» 3-го } &A_3 = y + 360^\circ \times 3 \\ &\quad \text{и т. д.} \\ \text{» } n\text{-го } &A_n = y + 360^\circ \times n \end{aligned}$$

Такимъ образомъ выраженіе угла, одна сторона котораго направлена по OA , а другая по OM , можетъ быть представлено формулой:

$$A = 360^\circ n + y, \dots \dots \dots \quad (1)$$

гдѣ n есть какое угодно цѣлое положительное число, включая и нуль, а y —геометрический уголъ AOM меныше 360°



Всякій уголъ, ограниченный линіями OA и OM , можетъ быть образованъ вращеніемъ радиуса-вектора, съ одной стороны, отъ OA къ OM по направленію стрѣлки S , съ другой же вращеніемъ въ противоположную сторону по стрѣлкѣ S' отъ OA къ OC и далѣе до OM . Въ обоихъ случаяхъ абсолютное значеніе угла можетъ безгранично возрастать. Для избѣженія неопределенности условились примѣнить къ угламъ правило Декарта и считать **положительными** углы, образуемые вращеніемъ радиуса-вектора **против часовой стрѣлки** или **справа налево** для наблюдателя, мысленно находящагося въ вершинѣ угла, а **отрицательными** углы, образуемые вращеніемъ радиуса-вектора въ противоположную сторону, — т. е. по часовой стрѣлкѣ или слѣв направо. На этомъ основаніи уголъ, имѣющій сторонам

лини OA и OM и образованный вращением линии въ обратномъ направлени по стрѣлкѣ S' , равенъ $y - 360^\circ = A'$. При второмъ оборотѣ радиуса-вектора въ отрицательномъ направлени уголъ принимаетъ значение $A'' = y - 360^\circ \times 2$, при третьемъ оборотѣ въ ту же сторону $A''' = y - 360^\circ \times 3$ и вообще послѣ m оборотовъ

$$A = y - 360^\circ m \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Оба выражения (1) и (2) соединяются въ одно слѣдующее:

$$A = 360^\circ n + y, \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

въ которомъ n есть какое угодно цѣлое положительное или отрицательное число, включая и нуль, а y — нѣкоторый уголъ меньше 360° , называемый геометрическимъ или **основнымъ**.

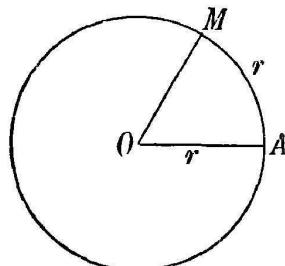
Итакъ, абсолютное значение угла можетъ измѣняться безгранично.

§ 2. Измѣреніе угловъ. Радіанъ. Углы выражаются въ градусахъ, градахъ и часахъ (§ 2, ч. I). **Градусомъ** называется $\frac{1}{90}$, **градомъ** — $\frac{1}{100}$, а **часомъ** — $\frac{1}{6}$ прямого угла. Во всѣхъ случаяхъ за единицу угловъ принимается опредѣленная часть прямого угла. Иногда за единицу угловъ принимается уголъ, стягивающий дугою, длина которой равна ея радиусу.

Центральный уголъ, стягивающий дугою, равную радиусу данного круга, называется **радіаномъ**.

Пусть $OA = r$ будетъ радиусъ нѣкотораго круга, и пусть дуга AM , стягивающая центральный уголъ AOM , равна радиусу r ; въ такомъ случаѣ $\angle AOM$ есть тотъ уголъ, который называется **радіаномъ**.

Радіанъ есть **постоянная величина**, не зависящая отъ радиуса круга. Дѣйствительно, исходя изъ извѣстнаго свойства дугъ круговъ, а именно, что дуги круга пропорціон-



нальны стягиваемыи ими центральнымъ угламъ, имѣемъ:

$$\frac{\angle AOM}{4d} = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi},$$

откуда

$$\angle AOM = \frac{4d}{2\pi} = \frac{2d}{\pi}. \dots \dots \dots \quad (4)$$

Какъ числитель, такъ и знаменатель послѣдней дроби суть величины постоянныи; слѣдовательно, и радіанъ AOM , равный отношенію двухъ постоянныхъ величинъ, является тоже постоянною величиною; радіанъ не зависитъ отъ радиуса круга.

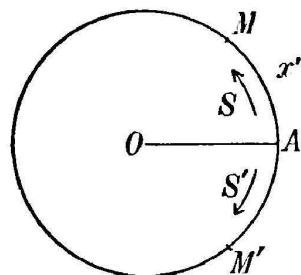
§ 3. Дуги и ихъ алгебраическое выражение. Пусть $x' = AM$ изображаетъ длину нѣкоторой дуги круга, радиусъ

котораго $OA = r$. Дуги измѣряются отъ произвольно - избранной, но постоянной, точки A и считаются, подобно угламъ, за положительныи въ одну сторону и за отрицательныи въ другую. Положительныи дуги условились считать отъ A къ M по направлению стрѣлки S , а отрицательныи — въ противоположную сторону, по направлению стрѣлки S' .

Какъ углы могутъ быть образуемы вращенiemъ радиуса вектора (§ 1), такъ дуги — движениемъ точки по окружности.

Если точка, двигаясь все время по одному направлению въ ту или другую сторону отъ точки M , описываетъ полную окружность, пройдя длину, равную $2\pi r$, то она вернется въ прежнее положеніе M ; то же самое произойдетъ при второмъ, третьемъ и т. д. оборотахъ; поэтому алгебраическое выражение дугъ, имѣющихъ начало въ точкѣ A и конецъ въ M , будетъ:

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= x' \\ V_1 &= x' + 2\pi r; \quad V_2 = x' + 2 \times 2\pi r, \text{ и т. д.} \\ V' &= x' - 2\pi r, \quad V'' = x' - 2 \times 2\pi r, \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad (5)$$



Всѣ эти выраженія могутъ быть представлены одною формулой:

$$V = 2n\pi r + x', \dots \dots \dots \quad (6)$$

гдѣ n есть какое-угодно цѣлое положительное или отрицательное число, включая и нуль, а x' есть основное значение дуги V . Придавая n какія угодно положительныя или отрицательныя значенія, мы можемъ получить дуги, абсолютное значение которыхъ больше всякой данной величины.

§ 4. Измѣреніе дугъ. Дуга V предыдущей формулы, именно

$$V = 2n\pi r + x',$$

выражается въ тѣхъ же линейныхъ единицахъ, что и радиусъ r ; напримѣрь, если радиусъ r выраженъ въ метрахъ, то и x' , а следовательно и V , выражаются въ метрахъ.

Раздѣливъ обѣ части выраженія V на r , мы получимъ въ частномъ отвлеченнное число v :

$$v = \frac{V}{r} = 2n\pi + \frac{x'}{r}, \dots \dots \dots \quad (7)$$

показывающее, во сколько разъ длина данной дуги больше дуги, длина которой равна радиусу.

Дуга, по длине равная радиусу, стягивающая центральный уголъ, равный одному радиану, называется **дуговымъ радианомъ**.

Положивъ $\frac{x'}{r} = x$, мы будемъ имѣть:

$$v = 2n\pi + x \dots \dots \dots \quad (8)$$

Дуга x считается **основною** алгебраического выраженія v : дуги v и x выражены въ дуговыхъ радианахъ.

§ 5. Измѣреніе угловъ дугами. Углы могутъ быть также измѣряемы нѣкоторою постоянною дугою, имѣющею определенную величину.

Длина спрямленной дуги, равной ея радиусу, принимается за единицу измѣренія дугъ. Уголъ, стягиваемый

подобною дугою, называется радианомъ (§ 2); мы обозначимъ его $r^{(o)}$; его значение равно

$$r^{(o)} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ,2958\dots \dots \dots \quad (9)$$

Пусть y будетъ некоторый уголъ, стягиваемый дугою V при радиусѣ круга r ; въ такомъ случаѣ:

$$\frac{y}{r^{(o)}} = \frac{V}{r} = v \dots \dots \dots \quad (10)$$

Итакъ, уголъ, выраженный въ радианахъ, равенъ длины стягивающей его дуги, выраженной въ частяхъ радиуса.

§ 6. Тригонометрическій кругъ. Принявъ радиусъ за единицу ($r = 1$), получимъ кругъ, называемый **тригонометрическимъ**; въ немъ имѣемъ:

$$\frac{y}{r^{(o)}} = v, \dots \dots \dots \quad (11)$$

т. е. уголъ, выраженный въ радианахъ, равенъ стягивающей его дугѣ тригонометрическаго круга. Отсюда выводимъ заключеніе, что углы могутъ быть измѣряемы стягивающими ихъ дугами. Дѣйствительно, принявъ $r^{(o)} = 1$, мы получимъ

$$y = v. \dots \dots \dots \quad (12)$$

На основаніи этого равенства мы можемъ замѣнить углы дугами и, обратно, дуги замѣнить углами, помня, однако, что дуги выражены въ частяхъ радиуса, а углы въ радианахъ.

§ 7. Зависимость между угломъ, дугою и радиусомъ данного круга. Приведенное отношеніе (10), именно

$$\frac{y}{r^{(o)}} = \frac{V}{r} \dots \dots \dots \quad (13)$$

даетъ возможность по данному углу, выраженному въ градусахъ, вычислить длину дуги данного радиуса r и, обратно, по длине дуги данного радиуса r вычислить величину угла y въ градусахъ. Мы выводимъ:

$$y = r^{(o)} \frac{V}{r} = r^{(o)} v, \quad V = \frac{y}{r^{(o)}} r \text{ и } r = \frac{V}{y} r^{(o)} \dots \dots \quad (14)$$