**С.П. Глазенап**

# Тригонометрия

## Часть 2

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С11

**С.П. Глазенап**
С11 Тригонометрия: Часть 2 / С.П. Глазенап – М.: Книга по Требованию, 2013. – 134 с.

**ISBN 978-5-458-28301-4**

Автор предлагаемого учебника по тригонометрии русский ученый профессор Сергей Павлович Глазенап [Глазенап С.П.] , астроном, инициатор создания и руководитель строительства Петербургской обсерватории. Помимо этого учебника, С. Глазенап является автором ряда значимых трудов по астрономии и математике. В данном издании излагается учение о гониометрии части тригонометрии [Тригонометрия] , в которой рассматриваются способы измерения углов. При изложении предмета автор руководствуется так называемым концентрическим методом. В начале книги предлагаются программы [Программа реальных училищ] изучения тригонометрии в реальных училищах и мужских гимназиях, утвержденные Министерством народного просвещения и действующие во время издания книги (1916 г.). Напротив каждого пункта программ указаны соответствующие параграфы учебника.Всего издание содержит 8 глав, каждая из которых в свою очередь разделена на параграфы. В первой главе рассматриваются углы [Угол] и дуги [Дуга] , во второй главе автор раскрывает понятие тригонометрических функций, уделяя внимание геометрическому изображению тригонометрических функций. Далее освещаются основные формулы гониометрии, обратные тригонометрические функции [Функция тригонометрическая обратная] , теоремы сложения, приведение многочленов к логарифмическому виду, тригонометрические уравнения. Последняя глава дает представление о составлении тригонометрических таблиц [Таблица тригонометрическая] . Приводятся примеры задач с подробным решением. В конце каждой главы предлагаются примеры, задачи и упражнения для самостоятельного решения. Текст сопровождается четкими и достаточно крупными рисунками, что для учебного издания очень важно.

**ISBN 978-5-458-28301-4**

# Программа Тригонометріи мужскихъ гимназіи.

(Римскія цифры означаютъ часть, а арабскія § настоящей Тригонометріи).

Двоякое измѣреніе угловъ и дугъ (II, 1—10).—Тригонометрическія функціи и ихъ измѣненія съ измѣненіемъ дуги отъ 0 до $+\infty$ и отъ 0 до $-\infty$ (II, 11—17).—Дополнительныя дуги (II, 19).—Построеніе дугъ по данному значенію какой-либо изъ тригонометрическихъ функцій (II, 25).

Соотношенія между тригонометрическими функціями одной и той же дуги меньшей 90° и обобщеніе этихъ соотношеній для любой дуги (II, 20).—Тригонометрическія функціи дугъ въ 30°, 45° и 60° (II, 22).

*Приведеніе тригонометрическихъ функцій какихъ угодно* дугъ къ тригонометрическимъ функціямъ дугъ первой четверти (II, 18, 19).—Общее выраженіе дугъ, отвѣчающихъ данному значенію тригонометрическихъ функцій (II, 25).

Синусъ и косинусъ суммы двухъ дугъ для случая, когда каждая изъ этихъ дугъ больше 0, а сумма ихъ меньше 90°. Распространеніе этихъ формулъ на случаи какихъ угодно дугъ (II, 27—29).—Тангенсъ и котангенсъ суммы двухъ дугъ (II, 30).—Тригонометрическія функціи разности двухъ дугъ (II, 27—29).—Тригонометрическія функціи двойной и половинной дуги (II, 31, 32).

Преобразованіе суммы и разности синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ (II, 34).—Отношеніе суммы синусовъ двухъ дугъ къ ихъ разности (II, 35).

Выводъ неравенства $\sin a < a < tg\, a$ (II, 44). Предѣлъ отношенія $\frac{\sin a}{a}$ при $a$, стремящемся къ 0 (II, 45).—Разность между дугою и синусомъ ея (II, 46).—Понятіе о вычисленіи тригонометрическихъ функцій (II, 47, 48).

Составъ и употребленіе таблицъ логариѳмовъ тригонометрическихъ функцій (I, 12—16 и II, 51).

Рѣшеніе простѣйшихъ тригонометрическихъ уравненій (II, 39—43).

Соотношеніе между элементами прямоугольнаго треугольника (I, 19—20).

Соотношенія между элементами косоугольнаго треугольника (I, 24—30).

Основные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ (I, 21).—Особенные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ (по суммѣ или разности гипотенузы съ катетомъ и острому углу; по суммѣ или разности катетовъ и острому углу) (I, 22).

Рѣшеніе косоугольнаго треугольника по тремъ сторонамъ его (I, 32).—Рѣшеніе треугольника по двумъ сторонамъ и углу между ними (I, 34).—Рѣшеніе треугольника по двумъ сторонамъ и углу, лежащему противъ одной изъ нихъ. Изслѣдованіе этого рѣшенія (I, 36).—Рѣшеніе треугольника по одной изъ сторонъ и двумъ угламъ (I, 38).

Формула Мольвейде (I, 28).—Различныя выраженія площади треугольника (I, 40—42).

Сокращенія, принятыя въ настоящемъ учебникѣ:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Километръ | обозначается | . . km | футъ | обозначается | . . ф. |
| метръ | » | . . m | дюймъ | » | . . д. |
| дециметръ | » | . . dm | линія | » | . . л. |
| сантиметръ | » | . . cm | десятина | » | . . дес. |
| миллиметръ | | . . mm | гектаръ | » | . . гект. |
| верста | » | . . вер. | килограммъ | » | . клгр. |
| сажень | | . . саж. | часъ | » | . . ч. |
| аршинъ | » | . . арш. | минута | » | . . м. |
| вершокъ | » | . . верш. | секунда | » | . . с. |
| квадратный | метръ | . . $m^2$ | кубическій | метръ | . . $m^3$ |
| » | сантиметръ | . . $cm^2$ | » | сантиметръ | . . $cm^3$ |
| » | миллиметръ | . . $mm^2$ | » | миллиметръ | . . $mm^3$ |
| » | аршинъ | кв. арш. | » | аршинъ | куб. арш. |
| » | сажень | кв. саж. | » | сажень | куб. саж. |

Собраніе гоніометрическихъ формулъ, а также формулъ для рѣшенія треугольниковъ дано на стр. 115—117 «Таблицъ логариѳмовъ съ пятью десятичными знаками» С. Глазенапа.

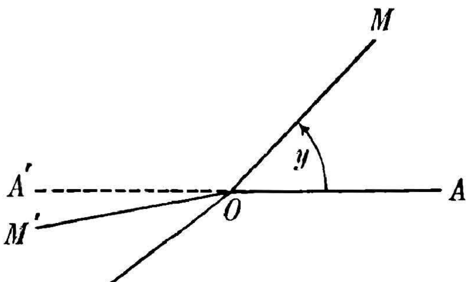
# ОГЛАВЛЕНІЕ.

# ГЛАВА ПЕРВАЯ.

## Углы и дуги.

---

**§ 1. Углы и ихъ алгебраическое выраженіе.** Углы могутъ быть образуемы вращеніемъ линіи $OM$ около нѣкоторой точки $O$. Линія $OA$, остающаяся неподвижною, называется **начальною**, или **основною**, а линія $OM$, могущая принимать всевозможныя положенія,— **образующею** или **радіусомъ-векторомъ**. Линія $OA$ называется также **основною стороною** даннаго угла, а линія $OM$— его **второю стороною.**



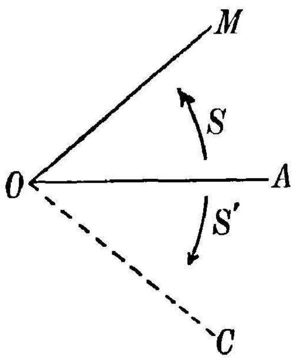

При вращеніи радіуса-вектора по направленію стрѣлки отъ начальнаго положенія $OA$, когда уголъ принимается равнымъ $0^\circ$, до спрямленія тупого угла въ положеніи $OA'$, уголъ $y$ принимаетъ послѣдовательно всевозможныя значенія отъ $0^\circ$ до $180^\circ$. Если радіусъ-векторъ перейдетъ линію $OA'$ и приметъ положенія $OM'$, $OM''$ и т. д., то уголъ, безпрерывно увеличиваясь, станетъ выступающимъ и будетъ болѣе $180^\circ$. Когда, при дальнѣйшемъ вращеніи, радіусъ-векторъ совмѣстится съ основною стороною $OA$, уголъ приметъ значеніе въ $360^\circ$, а когда онъ дойдетъ до положенія $OM$, уголъ будетъ равенъ $y + 360^\circ$, гдѣ $y$ равенъ геометрическому углу $AOM$. Затѣмъ, при дальнѣйшемъ вращеніи радіуса-вектора, уголъ продолжаетъ увеличиваться и при каждомъ новомъ совпаденіи радіуса-вектора съ $OM$ увеличится на $360^\circ$. Вообще уголъ будетъ равенъ:

| | | | |
|---|---|---|---|
| послѣ | 1-го | оборота | $A_1 = y + 360^\circ$ |
| » | 2-го | » | $A_2 = y + 360^\circ \times 2$ |
| » | 3-го | » | $A_3 = y + 360^\circ \times 3$ |
| | и т. д. | | |
| » | $n$-го | » | $A_n = y + 360^\circ \times n$ |

Такимъ образомъ выраженіе угла, одна сторона котораго направлена по $OA$, а другая по $OM$, можетъ быть представлено формулою:

$$A = 360^\circ n + y, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

гдѣ $n$ есть какое угодно цѣлое положительное число, включая и нуль, а $y$—геометрическій уголъ $AOM$ меньше $360^\circ$.




Всякій уголъ, ограниченный линіями $OA$ и $OM$, можетъ быть образованъ вращеніемъ радіуса-вектора, съ одной стороны, отъ $OA$ къ $OM$ по направленію стрѣлки $S$, съ другой же вращеніемъ въ противоположную сторону по стрѣлкѣ $S'$ отъ $OA$ къ $OC$ и далѣе до $OM$. Въ обоихъ случаяхъ абсолютное значеніе угла можетъ безгранично возрастать. Для избѣжанія неопредѣленности условились примѣнять къ угламъ правило Декарта и считать **положительными** углы, образуемые вращеніемъ радіуса-вектора **противъ часовой стрѣлки** или **справа налѣво** для наблюдателя, мысленно находящагося въ вершинѣ угла, а **отрицательными** углы, образуемые вращеніемъ радіуса-вектора въ противоположную сторону,—т. е. по часовой стрѣлкѣ или слѣва направо. На этомъ основаніи уголъ, имѣющій сторонами линіи $OA$ и $OM$ и образованный вращеніемъ линіи въ обратномъ направленіи по стрѣлкѣ $S'$, равенъ $y - 360^\circ = A'$. При второмъ оборотѣ радіуса-вектора въ отрицательномъ направленіи уголъ принимаетъ значеніе $A'' = y - 360^\circ \times 2$, при третьемъ оборотѣ въ ту же сторону $A''' = y - 360^\circ \times 3$ и вообще послѣ $m$ оборотовъ

$$A = y - 360^\circ m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

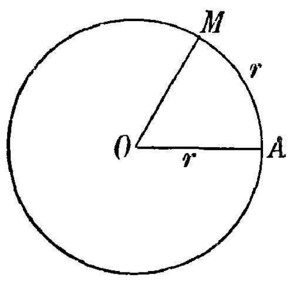
Оба выраженія (1) и (2) соединяются въ одно слѣдующее:

$$A = 360^\circ n + y, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

въ которомъ $n$ есть какое угодно цѣлое положительное или отрицательное число, включая и нуль, а $y$ — нѣкоторый уголъ меньше $360^\circ$, называемый геометрическимъ или **основнымъ.**

Итакъ, абсолютное значеніе угла можетъ измѣняться безгранично.

**§ 2. Измѣреніе угловъ. Радіанъ.** Углы выражаются въ градусахъ, градахъ и часахъ (§ 2, ч. I). **Градусомъ** называется $^1/_{90}$, **градомъ**—$^1/_{100}$, а **часомъ**—$^1/_6$ прямого угла. Во всѣхъ случаяхъ за единицу угловъ принимается опредѣленная часть прямого угла. Иногда за единицу угловъ принимается уголъ, стягиваемый дугою, длина которой равна ея радіусу.




Центральный уголъ, стягиваемый дугою, равною радіусу даннаго круга, называется **радіаномъ.**

Пусть $OA = r$ будетъ радіусъ нѣкотораго круга, и пусть дуга $AM$, стягивающая центральный уголъ $AOM$, равна радіусу $r$; въ такомъ случаѣ $\angle AOM$ есть тотъ уголъ, который называется радіаномъ.

Радіанъ есть **постоянная величина,** не зависящая отъ радіуса круга. Дѣйствительно, исходя изъ извѣстнаго свойства дугъ круговъ, а именно, что дуги круга пропорціональны стягиваемымъ ими центральнымъ угламъ, имѣемъ:

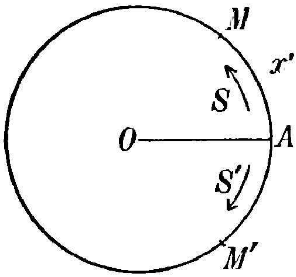
$$\frac{\angle AOM}{4d} = \frac{r}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi},$$

откуда

$$\angle AOM = \frac{4d}{2\pi} = \frac{2d}{\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Какъ числитель, такъ и знаменатель послѣдней дроби суть величины постоянныя; слѣдовательно, и радіанъ $AOM$, равный отношенію двухъ постоянныхъ величинъ, является тоже постоянною величиною; радіанъ не зависитъ отъ радіуса круга.

**§ 3. Дуги и ихъ алгебраическое выраженіе.** Пусть $x' = AM$ изображаетъ длину нѣкоторой дуги круга, радіусъ котораго $OA = r$. Дуги измѣряются отъ произвольно-избранной, но постоянной, точки $A$ и считаются, подобно угламъ, за положительныя въ одну сторону и за отрицательныя въ другую. Положительныя дуги условились считать отъ $A$ къ $M$ по направленію стрѣлки $S$, а отрицательныя—въ противоположную сторону, по направленію стрѣлки $S'$.




Какъ углы могутъ быть образуемы вращеніемъ радіуса-вектора (§ 1), такъ дуги — движеніемъ точки по окружности.

Если точка, двигаясь все время по одному направленію въ ту или другую сторону отъ точки $M$, опишетъ полную окружность, пройдя длину, равную $2\pi r$, то она вернется въ прежнее положеніе $M$; то же самое произойдетъ при второмъ, третьемъ и т. д. оборотахъ; поэтому алгебраическое выраженіе дугъ, имѣющихъ начало въ точкѣ $A$ и конецъ въ $M$, будетъ:

$$\left.\begin{array}{c} V_0 = x' \\ V_1 = x' + 2\pi r;\ V_2 = x' + 2 \times 2\pi r, \text{ и т. д.} \\ V' = x' - 2\pi r,\ V'' = x' - 2 \times 2\pi r, \text{ и т. д.} \end{array}\right\} \quad \ldots (5)$$

Всѣ эти выраженія могутъ быть представлены одною формулою:

$$V = 2n\pi r + x', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

гдѣ $n$ есть какое-угодно цѣлое положительное или отрицательное число, включая и нуль, а $x'$ есть основное значеніе дуги $V$. Придавая $n$ какія угодно положительныя или отрицательныя значенія, мы можемъ получить дуги, абсолютное значеніе которыхъ больше всякой данной величины.

**§ 4. Измѣреніе дугъ.** Дуга $V$ предыдущей формулы, именно

$$V = 2n\pi r + x',$$

выражается въ тѣхъ же линейныхъ единицахъ, что и радіусъ $r$; напримѣръ, если радіусъ $r$ выраженъ въ метрахъ, то и $x'$, а слѣдовательно и $V$, выражаются въ метрахъ.

Раздѣливъ обѣ части выраженія $V$ на $r$, мы получимъ въ частномъ отвлеченное число $v$:

$$v = \frac{V}{r} = 2n\pi + \frac{x'}{r}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

показывающее, во сколько разъ длина данной дуги больше дуги, длина которой равна радіусу.

Дуга, по длинѣ равная радіусу, стягивающая центральный уголъ, равный одному радіану, называется **дуговымъ радіаномъ.**

Положивъ $\frac{x'}{r} = x$, мы будемъ имѣть:

$$v = 2n\pi + x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Дуга $x$ считается **основною** алгебраическаго выраженія $v$: дуги $v$ и $x$ выражены въ дуговыхъ радіанахъ.

**§ 5. Измѣреніе угловъ дугами**. Углы могутъ быть также измѣряемы нѣкоторою постоянною дугою, имѣющею опредѣленную величину.

Длина спрямленной дуги, равной ея радіусу, принимается за единицу измѣренія дугъ. Уголъ, стягиваемый подобною дугою, называется радіаномъ (§ 2); мы обозначимъ его $r^{(0)}$; его значеніе равно

$$r^{(0)}=\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ{,}2958\ldots \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Пусть $y$ будетъ нѣкоторый уголъ, стягиваемый дугою $V$ при радіусѣ круга $r$; въ такомъ случаѣ:

$$\frac{y}{r^{(0)}}=\frac{V}{r}=v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Итакъ, уголъ, выраженный въ радіанахъ, равенъ длинѣ стягивающей его дуги, выраженной въ частяхъ радіуса.

**§ 6. Тригонометрическій кругъ.** Принявъ радіусъ за единицу ($r=1$), получимъ кругъ, называемый **тригонометрическимъ**; въ немъ имѣемъ:

$$\frac{y}{r^{(0)}}=v, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

т. е. уголъ, выраженный въ радіанахъ, равенъ стягивающей его дугѣ тригонометрическаго круга. Отсюда выводимъ заключеніе, что углы могутъ быть измѣряемы стягивающими ихъ дугами. Дѣйствительно, принявъ $r^{(0)}=1$, мы получимъ

$$y=v. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

На основаніи этого равенства мы можемъ замѣнять углы дугами и, обратно, дуги замѣнять углами, помня, однако, что дуги выражены въ частяхъ радіуса, а углы въ радіанахъ.

**§ 7. Зависимость между угломъ, дугою и радіусомъ даннаго круга.** Приведенное отношеніе (10), именно

$$\frac{y}{r^{(0)}}=\frac{V}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

даетъ возможность по данному углу, выраженному въ градусахъ, вычислить длину дуги даннаго радіуса $r$ и, обратно, по длинѣ дуги даннаго радіуса $r$ вычислить величину угла $y$ въ градусахъ. Мы выводимъ:

$$y=r^{(0)}\frac{V}{r}=r^{(0)}v, \quad V=\frac{y}{r^{(0)}}r \text{ и } r=\frac{V}{y}r^{(0)} \quad \ldots\ldots (14)$$