

Г. Вилля

Теория вихрей

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Г11

Г11 **Г. Вилля**
Теория вихрей / Г. Вилля – М.: Книга по Требованию, 2015. – 266 с.

ISBN 978-5-458-26588-1

Настоящая книга дает совершенно строгое систематическое изложение как классических, так и новейших исследований по теории вихрей.

ISBN 978-5-458-26588-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2015

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2015

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ. НАПОМИНАНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ.

В первых главах настоящей книги мы будем предполагать, что изучаем жидкости, лишенные вязкости и, в общем, несжимаемые. Взяв изучаемую жидкую массу, содержащуюся внутри замкнутой поверхности S , будем подвержена действию сил инерции, давлению, нормальным к поверхности, и действию внешних сил.

Во второй части этого труда основные результаты, относящиеся к идеальным (без вязкости) жидкостям, будут распространены на жидкости вязкие.

Общие уравнения. Пусть ρ обозначает плотность жидкости в точке (x, y, z) , X, Y, Z представляют проекции внешней силы, рассчитанной на единицу массы в данной точке, и p обозначает давление. Тогда имеем хорошо известные уравнения:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - I_x, \dots$$

где I_x, I_y, I_z — составляющие ускорения частицы.

Если взять переменные Лагранжа, следя за каждой движущейся частицей, иными словами, если изобразить движение при помощи времени t и начального положения каждой частицы $[(a, b, c)$ в момент $t_0, (x, y, z)$ в момент $t]$ при помощи уравнений:

$$x = f(a, b, c, t); \quad y = g(a, b, c, t); \quad z = h(a, b, c, t),$$

то уравнения движения, выраженные через переменные Лагранжа a, b, c, t , в силу соотношения

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}$$

и аналогичных, примут вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} = \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \frac{\partial z}{\partial a}, \dots$$

с пятью неизвестными функциями (x, y, z, p, ρ) переменных (a, b, c, t) .

Если же мы остановимся на картине скоростей во всякой точке (x, y, z) для любого момента t , то получим уравнения Эйлера:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt}, \dots$$

с пятью неизвестными функциями (u, v, w, p, ρ) переменных (x, y, z, t) . Линии тока выводятся интегрированием уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \dots$$

Уравнение неразрывности. В переменных Лагранжа уравнение неразрывности, выражающее, что масса, содержащаяся во всякой поверхности Σ , равна той, которая содержалась в первоначальной поверхности Σ_0 , имеет вид:

$$\rho \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \rho_0.$$

В переменных же Эйлера оно имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

Это предполагает, что ни в какой момент времени не происходит ни возникновения ни исчезновения массы.

Дополнительное уравнение. Это уравнение имеет вид:

$$F(\rho, p, T) = 0,$$

где T — температура в рассматриваемой точке.

Здесь мы будем предполагать, что вообще

$$\rho = \text{const.}$$

Вихрь. Вихрем скорости называется вектор, имеющий составляющими в каждой точке:

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Если вихрь равен нулю, то скорость (u, v, w) имеет потенциал. Если вихрь везде нормален к скорости, то поле скоростей обладает интегрирующим множителем.

Хорошо известна механическая интерпретация вихря. Около некоторой точки $P(x, y, z)$ вообразим маленькую жидкую сферу с центром в этой точке. Предположим, что мы мгновенно уничтожили всю внешнюю жидкость и одновременно маленькая сфера отвердела; отвердевшая сфера будет обладать мгновенным вращением, которое в точности будет равно (в пределе, когда ее радиус стремится к нулю) вектору-вихрю.

Вводя вихрь в уравнения движения, придадим им следующий вид (уравнения Эйлера):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\eta v - 2\zeta v = X - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} V^2 \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \dots$$

Предположим, что внешние силы выводятся из силовой функции $U(x, y, z, t)$ и что ρ зависит лишь от p . Положим:

$$Q = U - \int \frac{dp}{\rho}$$

(Q — потенциал ускорений).

Далее положим:

$$H = Q - \frac{1}{2} V^2.$$

Тогда получаем уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2(\eta w - \zeta v) = \frac{\partial H}{\partial x}, \dots$$

Уравнения Гельмгольца. В предыдущих уравнениях требовалось — для существования входящей туда функции H — чтобы были выполнены условия интегрируемости. Написав, например:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial y},$$

имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2 \left[\frac{\partial}{\partial z} (\zeta u - \xi w) - \frac{\partial}{\partial y} (\xi v - \eta u) \right] = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} - u \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} + \\ + \xi \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \zeta \frac{\partial u}{\partial z} - \eta \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Но

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

и, стало быть,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} + \xi \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \eta \frac{\partial u}{\partial y} - \zeta \frac{\partial u}{\partial z} =$$

Уравнение неразрывности может быть написано:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{d\xi}{dt} - \xi \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \eta \frac{\partial u}{\partial y} - \zeta \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

т. е., деля на ρ ,

$$\frac{d\left(\frac{\xi}{\rho}\right)}{dt} = \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z}, \dots$$

Имеем три таких уравнения, которые носят название уравнений Гельмгольца.

Эти дифференциальные уравнения линейны относительно $\frac{\xi}{\rho}$, $\frac{\eta}{\rho}$, $\frac{\zeta}{\rho}$; если задать начальные значения $\frac{\xi_0}{\rho_0}$, $\frac{\eta_0}{\rho_0}$, $\frac{\zeta_0}{\rho_0}$, соответствующие моменту $t=t_0$, то неизвестные функции определяются единственным образом. В частности, если значения ξ_0 , η_0 , ζ_0 равны нулю, то очевидно ξ , η , ζ будут постоянно оставаться равными нулю. Это составляет теорему Лагранжа: если в некоторый момент t_0 существует потенциал скоростей, то он будет продолжать существовать во всякий момент.

Например, это будет так, когда, в предположении существования Q , жидкость в начальный момент покоилась.

[Обозначая потенциал скоростей через φ , если он существует, легко видим, что уравнения Эйлера сводятся к одному следующему:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = Q \quad \left(= U - \int \frac{dp}{\rho} \right),$$

а уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \Delta \varphi = 0,$$

или, когда речь идет о несжимаемой жидкости,

$$\Delta \varphi = 0].$$

Формулы Коши. Обобщение. Теорему Лагранжа можно также доказывать методом, принадлежащим Коши, исходя из непреобразованных уравнений Эйлера:

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{\partial x}, \dots$$

Мы будем предполагать все время существование функции Q , причем

$$p = p(\rho), \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \dots,$$

уравнения, которые выражают, что ускорения зависят только от потенциальной функции $Q(x, y, z, t)$.

Положим для краткости

$$u' = \frac{du}{dt}, \dots$$

и образуем $\frac{\partial Q}{\partial a}$; имеем:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a} = u' \frac{\partial x}{\partial a} + v' \frac{\partial y}{\partial a} + w' \frac{\partial z}{\partial a}.$$

Исключим Q , написав:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial Q}{\partial b} \right) - \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial Q}{\partial a} \right) = 0;$$

имеем:

$$\frac{D(u', x)}{D(a, b)} + \frac{D(v', y)}{D(a, b)} + \frac{D(w', z)}{D(a, b)} = 0.$$

Но очевидные формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial a} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial a} \right), \dots \\ \frac{\partial u}{\partial a} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial a} \right), \dots \end{aligned}$$

и элементарные правила дифференцирования определителей позволяют далее заключить, что

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{D(u, x)}{D(a, b)} \right] = \frac{D(u', x)}{D(a, b)}, \dots,$$

так что предшествующее уравнение просто выражает, что величина

$$\frac{D(u, x)}{D(a, b)} + \frac{D(v, y)}{D(a, b)} + \frac{D(w, z)}{D(a, b)}$$

не зависит от t .

Но при $t = t_0$ имеем:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0,$$

и, следовательно:

$$(A) \quad \frac{D(u, x)}{D(a, b)} + \frac{D(v, y)}{D(a, b)} + \frac{D(w, z)}{D(a, b)} = \frac{\partial v_0}{\partial a} - \frac{\partial u_0}{\partial b} = 2\zeta_0.$$

Получив этот результат, вернемся к старым обозначениям посредством производных по x, y, z от (u, v, w) . Имеем такие формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}, \dots,$$

отсюда имеем:

$$\frac{D(u, x)}{D(a, b)} = - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{D(x, y)}{D(a, b)} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{D(z, x)}{D(a, b)}, \dots$$

и, следовательно,

$$2\zeta_0 = \frac{D(y, z)}{D(a, b)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{D(z, x)}{D(a, b)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ + \frac{D(x, y)}{D(a, b)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

т. е. будем иметь три следующих уравнения, из которых первые два доказываются точно так же, как и предшествующее:

$$\begin{aligned} -\xi \frac{D(y, z)}{D(b, c)} + \eta \frac{D(z, x)}{D(b, c)} + \zeta \frac{D(x, y)}{D(b, c)} &= \xi_0, \\ \xi \frac{D(y, z)}{D(c, a)} + \eta \frac{D(z, x)}{D(c, a)} + \zeta \frac{D(x, y)}{D(c, a)} &= \eta_0, \\ \xi \frac{D(y, z)}{D(a, b)} + \eta \frac{D(z, x)}{D(a, b)} + \zeta \frac{D(x, y)}{D(a, b)} &= \zeta_0. \end{aligned}$$

Будем иметь формулы более простые, если решим предыдущие уравнения относительно ξ , η , ζ и положим:

$$\Delta = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)}.$$

Получаем следующие три уравнения Коши:

$$\Delta \cdot \xi = \xi_0 \frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial x}{\partial c}, \dots$$

Так как $\Delta = \frac{\rho_0}{\rho}$, то очевидна связь между этими уравнениями Коши и уравнениями Гельмгольца, именно: уравнения Коши дают интегралы уравнений Гельмгольца, что не трудно проверить непосредственно.

В случае жидкостей ($\rho = \text{const}$) имеем $\Delta = 1$, и эти уравнения приводятся к

$$\xi = \xi_0 \frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial x}{\partial c}, \dots$$

Уравнения Коши можно истолковать иным образом. Рассмотрим выражение

$$E = u dx + v dy + w dz - (u_0 da + v_0 db + w_0 dc),$$

где t будем рассматривать как постоянное, а (x, y, z) будут функциями от (a, b, c, t) соответственно движению жидкости. Имеем:

$$E = \left(u \frac{\partial x}{\partial a} + v \frac{\partial y}{\partial a} + w \frac{\partial z}{\partial a} - u_0 \right) da + (\dots) db + (\dots) dc,$$

а уравнение (A) стр. 9 обозначает, очевидно, что E является полным дифференциалом F , т. е. существует функция $F(a, b, c, t)$ такая, что

$$E = dF(a, b, c, t).$$

В частности, при $t = t_0$ все три коэффициента в E обращаются в нули и, следовательно, при $t = t_0$, F сводится к постоянной, не зависящей от (a, b, c) .

Отсюда опять легко получить теорему Лагранжа. В самом деле:

$$E = dF.$$

Если в момент t_0 существует потенциал скоростей, т. е.

$$u_0 da + v_0 db + w_0 dc = d\varphi_0,$$

то

$$u dx + v dy + w dz = d(F + \varphi_0),$$

что означает, что $F + \varphi_0$ будет потенциалом скоростей для момента t , что и требуется доказать.

Обобщение формул Коши для случая, когда внешние силы не имеют потенциала (Friedmann, C. R. Acad. Sc. 63, 1916, p. 219). Ограничимся случаем несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) и предположим, что внешние силы не имеют потенциала (ни теорема Гельмгольца, ни теорема Лагранжа не будут существовать; именно, неконсервативные силы, вместе с трением, будут причиной несохранения вихря).

Но мы сможем заменить уравнения Коши и Гельмгольца другими, несколько отличающимися, из которых и будем исходить.

Имеем уравнения движения:

$$u' = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \dots;$$

они выражают, очевидно, что

$$(u' - X) dx + (v' - Y) dy + (w' - Z) dz$$

является полным дифференциалом в момент t как для переменных (x, y, z) , так и для (a, b, c) . Рассматривая его относительно этих последних переменных и полагая:

$$A = X \frac{\partial x}{\partial a} + Y \frac{\partial y}{\partial a} + Z \frac{\partial z}{\partial a},$$

$$B = X \frac{\partial x}{\partial b} + Y \frac{\partial y}{\partial b} + Z \frac{\partial z}{\partial b},$$

$$C = X \frac{\partial x}{\partial c} + Y \frac{\partial y}{\partial c} + Z \frac{\partial z}{\partial c},$$

получаем тогда, что

$$\left(u' \frac{\partial x}{\partial a} + v' \frac{\partial y}{\partial a} + w' \frac{\partial z}{\partial a} - A \right) da + (\dots) db + (\dots) dc$$

является полным дифференциалом. То же будет иметь место, если возьмем интеграл по t :

$$da \int_{t_0}^t \left(u' \frac{\partial x}{\partial a} + v' \frac{\partial y}{\partial a} + w' \frac{\partial z}{\partial a} - A \right) dt + db(\dots) + dc(\dots).$$

Положим

$$A_1 = \int_{t_0}^t A dt, \dots,$$

и заметим, что можно написать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t u' \frac{\partial x}{\partial a} dt &= \int_{t_0}^t \frac{du}{dt} \frac{\partial x}{\partial a} dt = \int_{t_0}^t \left[\frac{d}{dt} \left(u \frac{\partial x}{\partial a} \right) - u \frac{\partial u}{\partial a} \right] dt = \\ &= u \frac{\partial x}{\partial a} - u_0 - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{\partial(u^2)}{\partial a} dt, \dots \end{aligned}$$

Следовательно, откидывая явный дифференциал

$$d \int_{t_0}^t \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) dt,$$

мы видим, что выражение

$$\left(u \frac{\partial x}{\partial a} + v \frac{\partial y}{\partial a} + w \frac{\partial z}{\partial a} - u_0 - A_1 \right) da + (\dots) db + (\dots) dc$$

является полным дифференциалом относительно a, b, c .

Но это в точности тот же результат, из которого мы исходили в предшествующем параграфе, с той лишь разницей, что u_0, v_0, w_0 теперь заменены на $u_0 + A_1, v_0 + B_1, w_0 + C_1$. Далее, полагая

$$2\xi^* = \frac{\partial C_1}{\partial b} - \frac{\partial B_1}{\partial c}, \dots$$

и применяя те же выкладки, что и раньше, приходим к формулам:

$$\frac{D(u, x)}{D(b, c)} + \frac{D(v, y)}{D(b, c)} + \frac{D(w, z)}{D(b, c)} = 2\xi_0 + 2\xi^*,$$

Отсюда вытекает, как и выше, что для $\rho = \text{const}$

$$\xi = (\xi_0 + \xi^*) \frac{\partial x}{\partial a} + (\eta_0 + \eta^*) \frac{\partial x}{\partial b} + (\zeta_0 + \zeta^*) \frac{\partial x}{\partial c}$$

— уравнения, обобщающие уравнения Коши.

По определению:

$$2\xi^* = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial C}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial c} \right) dt = \int_{t_0}^t \left[\frac{D(X, x)}{D(b, c)} + \frac{D(Y, y)}{D(b, c)} + \frac{D(Z, z)}{D(b, c)} \right] dt.$$

Для $t = t_0$ имеем $\xi_0^* = 0$, но нет никаких оснований считать, что это будет так и при $t \neq t_0$. Становится ясным, каким образом теорема Лагранжа перестает быть справедливой для жидкостей, когда внешние силы неконсервативны.

Свойства вихрей. Вернемся к случаю, когда имеется потенциал ускорений. Известны определения линий тока, вихревых линий, жидких трубок или нитей (образованных линиями тока), вихревых трубок. Теорема о расхождении, примененная к вихрю, показывает, что поток вихря через замкнутую поверхность равен нулю:

$$\iiint \text{Div } \Omega d\tau = \iint (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) d\sigma = 0$$

(α, β, γ — направляющие косинусы внешней нормали) в силу равенства нулю расхождения от вихря.

Циркуляция по замкнутой линии:

$$C_L = \int_L udx + vdy + wdz.$$

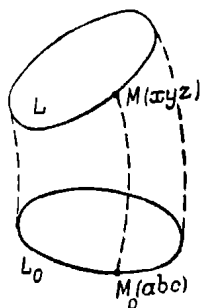


Рис. 1.

Циркуляция остается постоянной, когда меняется t (и одновременно линия L), если существует Q — потенциал ускорений. Это следствие теоремы Лагранжа, так как при указанных условиях:

$$u_0 dx + \dots - (u_0 da + \dots) = dF(a, b, c, t);$$

тогда, так как линия L замкнута (рис. 1),

$$\int_L udx + \dots = \int_{L_0} u_0 da + \dots,$$

если, по крайней мере, функция F однозначна. Последнее условие можно уточнить, сказав, что оно сводится к требованию однозначности потенциала ускорений Q . В самом деле, в момент t_0 координаты a, b, c для L_0 могут быть представлены в виде:

$$a = \varphi_1(\lambda), \quad b = \varphi_2(\lambda), \quad c = \varphi_3(\lambda),$$

где λ — параметр, который достаточно менять в пределах от λ_1 до λ_2 , чтобы получить всю линию L_0 . В момент t координаты для L являются функциями (a, b, c, t) , т. е. λ и t , вида:

$$x = \psi_1(\lambda, t), \quad y = \psi_2(\lambda, t), \quad z = \psi_3(\lambda, t),$$

и λ должно меняться от λ_1 до λ_2 , чтобы точка (x, y, z) описала L .

Тогда мы имеем:

$$C_L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(u \frac{\partial x}{\partial \lambda} + v \frac{\partial y}{\partial \lambda} + w \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) d\lambda.$$

Это есть функция t . Имеем:

$$\frac{dC_L}{dt} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \dots + u \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \dots \right) d\lambda,$$

т. е.

$$\frac{dC_L}{dt} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[Q + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] d\lambda.$$

Правая часть равна нулю, если Q принимает то же значение после обхода контура L . Следовательно, $C_L = \text{const}$, что и требуется доказать.

Применение теоремы Стокса. Проведем через линию L односвязную поверхность S , и приняв, по обычному правилу, положительное направление обхода L , имеем:

$$\int_L u dx + v dy + w dz = \int_S \left[\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) + \dots \right] d\sigma,$$

т. е.

$$C_L = \int_S \int \left(\alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta \right) d\sigma = 2 \int_S \int \Omega_n d\sigma.$$

Правая часть дает поток вихря через поверхность S или интенсивность вихрей, пронизывающих ее. Интенсивность эта равна, следовательно, циркуляции вдоль L .

Сохранение циркуляции сводится, в силу этого обстоятельства, к постоянству во времени интенсивности вихрей, пронизывающих поверхность S , когда последняя меняется как жидкая поверхность. Для замкнутой поверхности полная интенсивность (или полный поток) обращается в нуль, что мы уже знаем из теоремы о расхождении потока. Циркуляция вдоль линии, проведенной на вихревой поверхности, равна нулю, так как эта линия может быть стянута в точку непрерывной деформацией на поверхности. В самом деле, взяв за поверхность ограниченную контуром часть рассматриваемой вихревой поверхности, имеем на ней везде $\Omega_n = 0$ и, следовательно, $C_L = 0$.

Обратно, если циркуляция обращается в нуль вдоль всякой замкнутой линии, проведенной по некоторой поверхности S , то последняя будет являться вихревой поверхностью. Так как $\int_S \int \Omega_n d\sigma$ должен быть нулем на всякой части поверхности, то необходимо, чтобы $\Omega_n = 0$.