

В. Бляшке

**Дифференциальная
геометрия и геометрические
основы теории
относительности Эйнштейна**

Том 1

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
В11

В. Бляшке
В11 Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна: Том 1 / В. Бляшке – М.: Книга по Требованию, 2017. – 332 с.

ISBN 978-5-458-30446-7

Этот курс состоит из трех частей. Первая представляет собой введение в элементарную дифференциальную геометрию, т. е. в дифференциальную геометрию инвариантов движения; вторая дает изложение новых исследований по аффинной дифференциальной геометрии; третья посвящена конформной геометрии сферы и родственным геометрическим вопросам.

ISBN 978-5-458-30446-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2017

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2017

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Курс дифференциальной геометрии проф. Бляшке, одного из крупнейших геометров нашего времени, непохож на учебник обычного типа. Он построен систематически, начиная с самых элементарных вопросов дифференциальной геометрии, и вместе с тем он вводит читателя в круг современных проблем и побуждает его к самостоятельной научной работе. Ему чужда та сухость, которая характерна для учебников, излагающих ставший традиционным материал. Он носит отпечаток творческой индивидуальности автора и его личных научных интересов.

Все эти в высшей степени ценные качества книги имеют, однако, и обратную сторону, о которой нужно сказать как для предупреждения начинающего читателя, так и для выяснения установок переводчика в его работе. Книга проф. Бляшке, в значительной степени в силу вышеотмеченных ее свойств, написана очень неровно. Более элементарные части написаны достаточно подробно, менее элементарные вопросы изложены более сжато, порой даже в стиле реферата. Местами автор сознательно жертвует строгостью в интересах красочности, местами же стремится к полноте и безупречности доказательства. Поэтому чтение этой книги целиком несомненно затруднит мало подвинутого читателя. Однако и этот последний безусловно сможет использовать эту книгу в качестве дополнения к вузовскому курсу дифференциальной геометрии, тем более, что обстоятельные литературные указания, даваемые автором, всегда позволяют обратиться к другим сводным работам, к журнальным статьям и изданиям классиков. Чрезвычайно ценно в книге Бляшке и то, что автор попутно дает много исторических справок, которые, несмотря на краткость, отличаются как правило своей четкостью.

Указанные выше особенности, естественно, усугубляют трудности, с которыми сопряжен всякий перевод. Особенное внимание я старался обращать на то, чтобы сохранить тот тон, если так можно выразиться, интимности, которым проникнута работа проф. Бляшке. Именно поэтому я должен был отказаться от тенденции буквального следования оригиналу. Я позволял себе всякие перефразировки, которые, по моему мнению, могли бы содействовать приданию русскому тексту той живости, которая характерна для немецкого подлинника. Это отнюдь не значит, что я хотел дать ходу мыслей автора какой-нибудь иной оборот, чем они имеют в его устах. Напротив, я всегда старался воспроизвести весь ход рассуждений в точности, независимо от того, казалось ли мне удачным изложение того или иного места или нет. Всюду, где мне казалось уместным дополнить изложение в целях облегчения его понимания, я делал это в сносках, оговаривая, что примечание принадлежит переводчику. Эти пояснения я делал лишь в более элементарных частях, так

как снабжать подробными разъяснениями те места, где автор сознательно переходит в тон реферата, было бы и непосильным для меня и ненужным делом.

В заключение замечу, что немало затрудняло работу переводчика то обстоятельство, что русская дифференциально-геометрическая терминология весьма мало развита и не является вполне установившейся. Это вполне естественно, так как до последнего времени на русском языке почти не было книг, специально посвященных теории поверхностей. Некоторые термины, встречающиеся у проф. Бляшке, насколько мне известно, впервые попадают на страницы русской книги. При таком положении дела я вынужден был в ряде случаев проявить свою инициативу. Я не могу поручиться за то, что здесь нет дефектов. За указание этих дефектов, а также и других недостатков моего перевода я буду очень признателен.

Август 1934 г.

М. Выгодский

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ТРЕТЬЕМУ НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

Этот курс состоит пока из трех частей. Первая представляет собой введение в *элементарную* дифференциальную геометрию, т. е. в дифференциальную геометрию инвариантов движения; вторая дает изложение новых исследований по *аффинной дифференциальной геометрии*; третья посвящена *конформной геометрии сферы* и родственным геометрическим вопросам.

Дифференциальная геометрия исследует свойства кривых линий и поверхностей в их бесконечно малых частях. Основную роль в ней играет понятие *кривизны* в его различных вариантах, так что ее называют также *теорией кривизны*. В противоположность этому в алгебраической геометрии геометрические образы рассматриваются прежде всего в их целостности. Однако и дифференциальная геометрия вовсе не чуждается изучения геометрических фигур в целом, и вопросы „дифференциальной геометрии в целом“, в которых объединяются микроскопические и макроскопические свойства фигур, принадлежат к числу интереснейших, хотя и труднейших задач нашей науки.

Теория кривизны, если ее освободить от ограничения числа измерений тремя и от мероопределения Евклида, перестает быть узкой ограниченной специальной областью математики; более того, она включает в себя значительную часть теоретической физики. Лишь избранные ее вопросы предлагаются вниманию читателя в этой книге, возникшей из лекций, которые автор читал в Тюбингене и Гамбурге. Что касается самого выбора, то он обусловлен не только ходом развития дифференциальной геометрии, но и личными вкусами автора. Руководящей нитью служила ему эрлангенская программа Ф. Клейна. Особое внимание было далее уделено связи с вариационным исчислением.

Новое третье издание по сравнению с прежними содержит некоторые изменения и поправки, большинство которых имеет целью облегчить чтение книги. Так например, введена новая глава о „полосах“, служащая переходом от теории кривых к теории поверхностей. Параллельно с прежним изложением теории поверхностей я показал теперь также, как можно с помощью так называемого инвариантного дифференцирования придать формулам теории поверхностей более наглядный вид. Одну ошибку, допущенную мной во втором издании, я смог исправить благодаря указанию г. Хьельмслева (Hjelmslev). Таким образом остается по-прежнему открытым вопрос, существуют ли поверхности, разделяющие со сферой то ее свойство, что для каждой ее точки существует другая, *диаметрально противоположная*, т. е. такая, в которой вновь сходятся все геодезические линии, исходящие из первой точки.

Обработку издания принял на себя мой друг и коллега Г. Томсен. Ему, в частности, принадлежит глава об инвариантных производных и их применении к решению проблемы Бонне. Кроме того он сделал ряд дополнений, относящихся к операциям с векторами.

Корректуру любезно приняли на себя Л. Бервальд (Прага), которому я выражаю особую признательность за его самоотверженный труд, Гаак (Данциг), Келер (Гамбург) и Шатц (Иннсбрук).

В. Бляшке

Гамбург, ноябрь 1929 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие переводчика	5
Предисловие автора к третьему немецкому изданию	7
ВВЕДЕНИЕ	
ВЕКТОРЫ	
§ 1. Скалярное произведение	13
§ 2. Детерминанты и векторные произведения	16
§ 3. Полная система инвариантов любого числа точек	18
§ 4. Полная система независимых инвариантов	21
ГЛАВА ПЕРВАЯ	
ТЕОРИЯ КРИВЫХ	
§ 5. Длина дуги	24
§ 6. Касательная; соприкасающаяся плоскость	26
§ 7. Кривизна и кручение. Круг кривизны	29
§ 8. Определение инвариантов кривой	31
§ 9. Формулы Френе	36
§ 10. О знаке кручения	39
§ 11. Кинематическое истолкование формул Френе	40
§ 12. Плоские кривые. Теорема о четырех вершинах овала	42
§ 13. Центр кривизны и соприкасающийся круг	44
§ 14. Соприкасающаяся сфера	45
§ 15. Кривые Бертрана	46
§ 16. Натуральные уравнения	48
§ 17. Лемма из теории линейных дифференциальных уравнений	50
§ 18. Линии откоса	51
§ 19. Линии откоса на сфере	52
§ 20. Линии откоса на параболоиде вращения	53
§ 21. Эволюты; эвольвенты	54
§ 22. Изотропные кривые	55
§ 23. Бесквадратное представление изотропных кривых	57
§ 24. Задачи и теоремы	58
ГЛАВА ВТОРАЯ	
ЭКСТРЕМУМЫ КРИВЫХ	
§ 25. Первая вариация длины дуги	61
§ 26. Вариационная задача Радона	62
§ 27. Нахождение экстремалей нашей вариационной задачи	64
§ 28. Изопериметрия круга	67
§ 29. Доказательство Кроне и Фробениуса	68
§ 30. Доказательство Гурвица	70
§ 31. Свойства кривых постоянной кривизны	73
§ 32. Замечания и задачи	76
ГЛАВА ТРЕТЬЯ	
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПОЛОСЫ	
§ 33. Сопутствующий триедр полосы	78
§ 34. Геометрический смысл инвариантов поверхностной полосы	80
§ 35. Асимптотические полосы, полосы кривизны и геодезические полосы	83
§ 36. Вращение полосы вокруг своей кривой	81

	Стр.
37. Изгибание полосы	88
38. Параллелизм Леви-Чивита	90
39. Доказательство одной теоремы Шварца, предложенное Радоном	92
40. Задачи и теоремы	94

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

41. Первая основная форма	96
42. Вторая основная форма	99
43. Теоремы Менье и Эйлера	100
44. Главные кривизны	102
45. Гауссова Теорема egregium	104
46. Линии кривизны	105
47. Точки округления	109
48. Теорема Дюпена	110
49. Конформное отображение в пространстве	112
50. Гауссово сферическое отображение	115
51. Системы нормалей	117
52. Асимптотические линии	118
53. Асимптотические линии на линейчатых поверхностях	120
54. Сопряженные сети	122
55. Деривационные формулы Вейнгартена	124
56. Теорема Бельтрами-Эннепера о кручении асимптотических линий	126
57. Деривационные формулы Гаусса	127
58. Основные формулы Гаусса и Кодацци	128
59. Монж	130
60. Задачи и теоремы	132

ГЛАВА ПЯТАЯ

ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ НА ПОВЕРХНОСТИ

61. Инвариантные производные вдоль линий кривизны	136
62. Переход от произвольных параметров к инвариантным производным	141
63. Основные формулы теории поверхностей в инвариантной форме	148
64. Резные поверхности и поверхности каналов	153
65. Инвариантное дифференцирование по произвольному направлению	157
66. Задачи и теоремы	159

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ

67. Изгибание	161
68. Геодезическая кривизна	162
69. Геодезические линии	164
70. Геодезические полярные координаты	166
71. Геометрическая интерпретация гауссовой кривизны, обнаруживающая инвариантность ее относительно изгибания	168
72. Два различных определения геодезических кругов	169
73. Поверхности постоянной гауссовой кривизны	170
74. Отображение поверхности постоянной отрицательной кривизны на полуплоскость Пуанкаре	171
75. Изометрическое отображение поверхности с $K = -1$ самой на себя	173
76. Интеграл геодезической кривизны	177
77. Следствия из формулы Гаусса-Бонне	179
78. Кривые, огибающие геодезические линии	183
79. Первый дифференциальный параметр Бельтрами	185
80. Геометрическое применение первого дифференциального параметра Бельтрами	1 8
81. Второй дифференциальный параметр Бельтрами	190
82. Обобщенные формулы Грина	191
83. Новая формула для геодезической кривизны	192
84. Поверхности, у которых круги Дарбу замкнуты	194

	<i>Стр.</i>
§ 85. Изотермические параметры	195
§ 86. Конформное отображение	198
§ 87. Изометрическое отображение, сохраняющее линии кривизны (первый случай)	199
§ 88. Изометрическое отображение, сохраняющее линии кривизны (второй и третий случаи)	203
§ 89. Вклад Гаусса в теорию поверхностей	209
§ 90. Задачи и теоремы	210

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТИ В ЦЕЛОМ

§ 91. Нензгибаемость сферы	213
§ 92. Сфера как единственная овальная поверхность постоянной средней кривизны	216
§ 93. Жесткость овальных поверхностей	217
§ 94. Опорная функция Минковского	221
§ 95. Теорема Христоффеля о замкнутой поверхности	223
§ 96. Теорема Гильберта о поверхностях постоянной отрицательной кривизны	225
§ 97. Замечания о работах Пуанкаре по вопросу о замкнутых геодезических линиях на овальной поверхности	229
§ 98. Угловые условия Эрмита	232
§ 99. Условие Якоби	234
§ 100. Теорема Бонне о диаметре овальной поверхности	237
§ 101. Наличие кратчайшего пути на овальных поверхностях	239
§ 102. Поверхности, сопряженные точки которых имеют постоянное геодезическое расстояние	243
§ 103. Теорема Каратеодори об огибающих геодезических линий на овальной поверхности	249
§ 104. Задачи и теоремы	250

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ЭКСТРЕМУМЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 105. Первая вариация площади	254
§ 106. Минимальные поверхности как поверхности сдвига	255
§ 107. Формулы Вейерштрасса	256
§ 108. Формулы Штуди	258
§ 109. Общая формула Гаусса для первой вариации площади поверхности	260
§ 110. Формула Шварца для площади минимальной поверхности	262
§ 111. Определение минимальной поверхности по заданной полосе	264
§ 112. Теорема Карлемана о круге	265
§ 113. Изопериметрия шара	266
§ 114. Влияние симметризации на величину площади	268
§ 115. Доказательство сходимости (Вильгельм Гросс)	270
§ 116. Вторая вариация поверхности	273
§ 117. Первая вариация величин H и K	275
§ 118. Задачи и теоремы	277

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ЛИНЕЙЧАТАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 119. Дуальные числа	280
§ 120. Принцип перенесения Штуди	282
§ 121. Линейчатые поверхности	286
§ 122. Особые типы линейчатых поверхностей	295
§ 123. Конгруэнции прямых	297
§ 124. Перенесение формул Гаусса-Бонне на конгруэнцию прямых	302
§ 125. Фокальные поверхности конгруэнции прямых	302
§ 126. Формулы Гамильтона и Минггея	303
§ 127. Изотропные конгруэнции прямых	305
§ 128. Взаимоотношения между изотропными конгруэнциями и минимальными поверхностями	306

§ 129. Основные формулы теории конгруенций в инвариантных производных	309
§ 130. Представление изотропных конгруенций с помощью стереографических линейных координат	312
§ 131. Дальнейшие формулы для стереографических линейных координат	316
§ 132. Связь с вейерштрассовой теорией минимальных поверхностей	317
§ 133. Замечания и задачи	318

ВВЕДЕНИЕ

ВЕКТОРЫ

§ 1. Скалярное произведение

Возьмем в пространстве декартову систему координат, оси которой расположены так, как обозначено на черт. 1. Три координаты точки x мы будем обозначать x_1, x_2, x_3 . Все рассматриваемые точки мы будем сначала предполагать действительными.

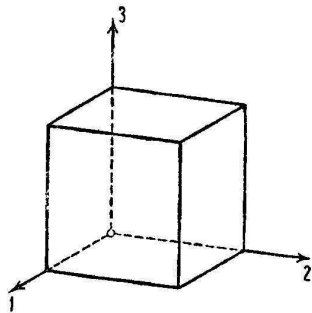
Две взятые в определенном порядке точки пространства x и y с координатами x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 определяют направленный отрезок, ведущий от x к y . Два направленных отрезка, принадлежащие парам точек x, y и $\bar{x}, \bar{y}$, тогда и только тогда имеют одно и то же направление и одну и ту же длину, когда все соответствующие друг другу разности координат равны между собой:

$$y_i - x_i = \bar{y}_i - \bar{x}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Вектором мы будем называть систему всех направленных отрезков одного и того же направления и одной и той же длины, выходящих из всех точек пространства. Так как для этих отрезков разности координат их концов всегда одни и те же, то мы можем поставить в соответствие каждому вектору эти три разности, которые мы назовем его *координатами* (иногда говорят также — *компонентами*). Каждой тройке чисел, рассматриваемой как совокупность трех координат вектора, взаимно однозначно соответствует некоторый вектор. Отличительным свойством векторов является то, что координаты их, в противоположность координатам точек, не изменяются при параллельном перенесении координатной системы. Действительно, при параллельном перенесении системы координат имеют место формулы:

$$x_i^* = x_i + a_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где x_i — старые, а x_i^* — новые координаты, величины же a_i постоянны для всего пространства. Поэтому при образовании разностей в формулах, подобных (1), величины a_i уничтожаются.



Черт. 1.

Уравнения, подобные уравнению (2), которые во всех координатах сохраняют тот же вид, мы будем сокращенно представлять в следующей форме:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad (3)$$

т. е. мы будем опускать индексы и употреблять вместо светлого шрифта — жирный. Этим обозначением мы будем пользоваться как для координат точки, так и для координат вектора. Вектор с координатами a_i будет таким образом обозначаться через $\mathbf{a}$. В формуле (3) $\mathbf{a}$, очевидно, является вектором, представляющим одновременно параллельный сдвиг всех точек. Координаты x_i точки $\mathbf{x}$ мы можем считать также координатами вектора, именно, вектора, идущего от начала координат $(0, 0, 0)$ к точке $\mathbf{x}$. Мы будем говорить также о векторе $\mathbf{x}$ этой точки, допуская при этом известную непоследовательность. Заметим, однако, что этот „вектор“ точки $\mathbf{x}$ существенно зависит от выбора начала координат и изменяется при параллельном перенесении координатной системы. Вектор в истинном смысле этого слова, который не изменяется при таком параллельном перенесении, определяется не одной, а *двумя* точками, при помощи разностей их координат. В дальнейшем, однако, мы не будем отмечать этой разницы между точками и векторами и сохраним для них одно и то же обозначение жирным шрифтом.

Если три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ связаны уравнением $c_i = a_i + b_i$ или

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (4)$$

то $\mathbf{c}$ называется *суммой* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. *Произведением* вектора $\mathbf{v}$ на число мы назовем вектор с координатами $c \cdot v_i$. Выражение

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad (5)$$

называется *скалярным произведением* двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Мы обозначаем его сокращенно символом $\mathbf{x}\mathbf{y}$. Часто мы будем пользоваться также скобками: $(\mathbf{x}\mathbf{y})$.

Квадратичную форму, принадлежащую билинейной форме (5)

$$\mathbf{x}\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad (6)$$

мы будем называть скалярным квадратом вектора $\mathbf{x}$ и писать вместо $\mathbf{x}\mathbf{x}$ также $\mathbf{x}^2$. Если мы возьмем вектор $\mathbf{y} = \mathbf{z}$, определяемый разностями координат точек $\mathbf{u}$ и $\mathbf{z}$, то для его скалярного квадрата мы напишем выражение $(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2$ или $(\mathbf{y} - \mathbf{z})(\mathbf{y} - \mathbf{z})$. Соответственно мы пользуемся для скалярного произведения двух векторов $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ и $(\mathbf{c} - \mathbf{d})$, образованных двумя парами точек $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, выражением:

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = (a_1 - b_1)(c_1 - d_1) + (a_2 - b_2)(c_2 - d_2) + (a_3 - b_3)(c_3 - d_3). \quad (7)$$

Произведя вычисления в координатах, легко убедиться в справедливости следующих правил векторных операций:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} &= \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}), \\ \mathbf{y} + \mathbf{z} &= \mathbf{z} + \mathbf{y}, \\ \mathbf{y}\mathbf{z} &= \mathbf{z}\mathbf{y}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$