А.Д. Александров

Математика, её содержание, методы и значение

Том 3

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.Д. Александров
А11 Математика, её содержание, методы и значение: Том 3 / А.Д. Александров – М.: Книга по Требованию, 2023. – 336 с.

ISBN 978-5-458-25563-9

Возникшая ещё в древности из практических потребностей, математика выросла в громадную систему разветвлённых дисциплин. Как и другие науки, она отражает законы материальной действительности и служит могучим орудием познания и покорения природы. Но свойственный математике высокий уровень абстракции делает новые её разделы сравнительно мало доступными для неспециалиста. Тот же отвлечённый характер математики порождал ещё в древности идеалистические представления о её независимости от материальной действительности.Коллектив авторов при составлении этой книги исходил из намерения ознакомить достаточно широкие круги советской интеллигенции с содержанием и методами отдельных математических дисциплин, их материальными основами и путями развития.В качестве минимума предварительных математических знаний читателя предполагается знание только курса средней школы, однако в отношении доступности материала каждый из трёх томов не является однородным. Желающие впервые познакомиться с началами высшей математики, с пользой прочтут несколько первых глав, но для полного понимания следующих глав необходимо изучение соответствующих учебников. В полном объёме книга окажется доступной в основном лишь читателям, уже имеющим некоторые навыки в применении методов математического анализа (дифференциального и интегрального исчисления). Для таких читателей представителей естественнонаучных и инженерных специальностей, учителей математики особенно существенными окажутся главы, вводящие их в более новые разделы математики.Естественно, что в рамках одной книги нельзя исчерпать всего богатства даже основных направлений математических исследований; некоторая свобода в выборе материала при этом необходима. Но в самых общих чертах эта книга должна дать представление о современном состоянии математики, её происхождении и перспективах развития в целом. Поэтому книга в известной мере рассчитана и на лиц, владеющих основной частью использованного в ней фактического материала. Она должна способствовать устранению некоторой узости перспективы, свойственной иногда некоторым нашим молодым математикам.Отдельные главы этой книги написаны разными авторами, их фамилии приведены в оглавлении. Однако как целое книга результат коллективного труда. Её общий план, отбор материала, варианты текста отдельных глав подвергались коллективному обсуждению и улучшались на основе живого обмена мнениями. Математики многих городов Советского Союза высказали на организованном институтом обсуждении ценные замечания по первоначальному варианту текста. Эти замечания и предложения были учтены авторами.

ISBN 978-5-458-25563-9

множества, которое является одним из основных простейших математических понятий и не поддается точному определению. Нижеследующие замечания имеют своей целью пояснить, что такое множество, но не претендуют на то, чтобы служить его определением.

Множеством называется собрание, совокупность, коллекция вещей, объединенных по какому-либо признаку или по какому-либо правилу. Понятие множества возникает путем абстракции. Рассматривая какую-либо совокупность предметов как множество, отвлекаются от всех связей и соотношений между различными предметами, составляющими множества, но сохраняют за предметами их индивидуальные черты. Таким образом, множество, состоящее из пяти монет, и множество, состоящее из пяти яблок, — это разные множества. С другой стороны, множество из пяти монет, расположенных по кругу, и множество из тех же монет, положенных одна на другую, — это одно и то же множество.

Приведем несколько примеров множеств. Можно говорить о множестве песчинок, составляющих кучу песка, о множестве всех планет нашей солнечной системы, о множестве всех людей, находящихся в данный момент в каком-либо доме, о множестве всех страниц этой книги. В математике тоже постоянно встречаются различные множества, например множество всех корней заданного уравнения, множество всех натуральных чисел, множество всех точек на прямой и т. д.

Математическая дисциплина, изучающая общие свойства множеств, т. е. свойства множеств, не зависящие от природы составляющих их предметов, называется *теорией множеств*. Эта дисциплина начала бурно развиваться в конце XIX и начале XX в. Основатель научной теории множеств — немецкий математик Г. Кантор.

Работы Кантора по теории множеств выросли из рассмотрения вопросов сходимости тригонометрических рядов. Это весьма обычное явление: очень часто рассмотрение конкретных математических задач ведет к построению весьма абстрактных и общих теорий. Значение таких абстрактных построений определяется тем, что они оказываются связанными не только с той конкретной задачей, из которой они выросли, но имеют приложения и в ряде других вопросов. В частности, именно так обстоит дело и с теорией множеств. Идеи и понятия теории множеств проникли буквально во все разделы математики и существенно изменили ее лицо. Поэтому нельзя получить правильного представления о современной математике, не познакомившись с элементами теории множеств. Особенно большое значение имеет теория множеств для теории функций действительного переменного.

Множество считается заданным, если относительно любого предмета можно сказать, принадлежит он множеству или не принадлежит. Иными словами, множество вполне определяется заданием всех принадлежащих ему предметов. Если множество M состоит из предметов a, b, c, ..., и только из этих предметов, то пишут

$$M = \{a, b, c, \ldots\}.$$

Предметы, составляющие какое-либо множество, принято называть его *элементами*. Тот факт, что предмет m является элементом множества M, записывается в виде

$$m \in M$$

и читается: «m принадлежит M», или «m есть элемент M». Если же предмет n не принадлежит множеству M, то пишут: $n \overline{\in} M$. Каждый предмет может служить лишь одним элементом заданного множества; иными словами, все элементы одного и того же множества отличны друг от друга.

Элементы множества M могут сами быть множествами, однако, во избежание противоречий, приходится требовать, чтобы само множество M не было одним из своих собственных элементов: $M \overline{\in} M$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством*. Например, множество всех действительных корней уравнения

$$x^2 + 1 = 0$$

есть пустое множество. Пустое множество в дальнейшем будем обозначать через θ.

Если для двух множеств M и N каждый элемент x множества M является также элементом множества N, то говорят, что M входит в N, что M есть часть N, что M есть подмножество N или что M содержится в N; это записывается в виде

$$M \subseteq N \quad \text{или} \quad N \supseteq M.$$

Например, множество $M = \{1, 2\}$ есть часть множества $N = \{1, 2, 3\}$.

Ясно, что всегда $M \subseteq M$. Удобно считать, что пустое множество есть часть любого множества.

Два множества *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов. Например, множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ и множество $M = \{1, 2\}$ между собою равны.

Определим правила *действий* над множествами.

Объединение или сумма. Пусть имеются множества M, N, P, ... Объединением или суммой этих множеств называется множество X, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из «слагаемых» M, N, P, ...

$$X = M + N + P + \ldots$$

При этом, даже если элемент x принадлежит нескольким слагаемым, то он входит в сумму X лишь один раз. Ясно, что

$$M+M=M,$$

и если $M\subseteq N$, то

$$M+N=N.$$

Пересечение. Пересечением или общей частью множеств M, N, $P, \ldots$ называется множество Y, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат одновременно всем множествам M, N, $P, \ldots$,

Ясно, что $M\cdot M=M$, и если $M\subseteq N$, то $M\cdot N=M$.

Если пересечение множеств M и N пусто: $M\cdot N=\theta$, то говорят, что эти множества *не пересекаются*.

Для обозначения операции суммы и пересечения множеств употребляют также знаки $\sum$ и $\prod$. Таким образом,

$$E=\sum E_i$$

есть сумма множеств E_i, а

$$F=\prod E_i$$

— их пересечение.

Читателю рекомендуется доказать, что сумма и пересечение множеств связаны обычным распределительным законом

$$M(N+P)=MN+MP,$$

а также законом

$$M+NP=(M+N)(M+P).$$

Разность. Разностью двух множеств M и N называется множество Z всех тех элементов из M, которые не принадлежат N:

$$Z=M-N.$$

Если $N\subseteq M$, то разность $Z=M-N$ называют также *дополнением* к множеству N относительно M.

Нетрудно показать, что всегда

$$M(N-P)=MN-MP$$

и

$$(M-N)+MN=M.$$

Таким образом, правила действий над множествами значительно отличаются от обычных правил арифметики.

Конечные и бесконечные множества. Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются конечными множествами. Если же число элементов множества неограниченно, то такое множество называется бесконечным. Например, множество всех натуральных чисел бесконечно.

Рассмотрим два каких-либо множества M и N и поставим вопрос о том, одинаково или нет количество элементов в этих множествах.

Если множество M конечно, то количество его элементов характеризуется некоторым натуральным числом — числом его элементов. В этом случае для сравнения количества элементов множеств M и N достаточно сосчитать число элементов в M, число элементов в N и сравнить полученные числа. Естественно также считать, что если одно из множеств M и N конечно, а другое бесконечно, то бесконечное множество содержит больше элементов, чем конечное.

Однако, если оба множества M и N бесконечны, то путь простого счета элементов ничего не дает. Поэтому сразу возникают такие вопросы: все ли бесконечные множества имеют одинаковое количество элементов, или же существуют бесконечные множества с бо́льшим и меньшим количеством элементов? Если верно второе, то каким способом можно сравнивать между собой количество элементов в бесконечных множествах? Этими вопросами мы теперь и займемся.

Взаимно однозначное соответствие. Пусть снова M и N — два конечных множества. Как узнать, какое из этих множеств содержит больше элементов, не считая числа элементов в каждом множестве? Для этого будем составлять *пары*, объединяя в пару один элемент из M и один элемент из N. Тогда, если какому-нибудь элементу из M не найдется парного к нему элемента из N, то в M больше элементов, чем в N. Поясним это рассуждение примером.

Пусть в зале находится некоторое число людей и некоторое число стульев. Чтобы узнать, чего больше, достаточно попросить людей занять места. Если кто-нибудь остался без места, значит, людей больше, а если, скажем, все сидят и заняты все места, то людей столько же, сколько стульев. Описанный способ сравнения количества элементов во множествах имеет то преимущество перед непосредственным счетом элементов, что он без особых изменений применяется не только к конечным, но и к бесконечным множествам.

Рассмотрим множество всех натуральных чисел

$$M=\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

и множество всех четных чисел

$$N=\{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

Какое множество содержит больше элементов? На первый взгляд кажется, что первое. Однако мы можем образовать из элементов этих множеств пары, как указано ниже.

Таблица 1

M	1	2	3	4	...
N	2	4	6	8	...

Ни один элемент M и ни один элемент N не остается без пары. Правда, мы могли бы также образовать пары и так:

Таблица 2

M	1	2	3	4	5	...
N	—	2	—	4	—	...

Тогда многие элементы из M остаются без пар. С другой стороны, мы могли бы составить пары и так:

Таблица 3

M	—	1	—	2	—	3	—	...
N	2	4	6	8	10	12	14	...

Теперь многие элементы из M остаются без пар.

Таким образом, если множества A и B бесконечны, то различным способам образования пар соответствуют разные результаты. Если существует такой способ образования пар, при котором у каждого элемента A и каждого элемента B имеется парный к нему элемент, то говорят, что между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие. Например, между рассмотренными выше множествами M и N можно установить взаимно однозначное соответствие, как это видно из табл. 1.

Если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что они имеют *одинаковое* количество элементов или *равномощны*. Если же при *любом* способе образования пар некоторые элементы из A всегда остаются без пар, то говорят, что множество A содержит больше элементов, чем B, или что множество A имеет бо́льшую мощность, чем B.

Таким образом, мы получили ответ на один из поставленных выше вопросов: как сравнивать между собой количество элементов в бесконечных множествах. Однако это нисколько не приблизило нас к ответу на другой вопрос: существуют ли вообще бесконечные множества, имеющие различные мощности? Чтобы получить ответ на этот вопрос, исследуем некоторые простейшие типы бесконечных множеств.

Счетные множества. Если можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами множества A и элементами множества всех натуральных чисел

$$Z = \{1, 2, 3. \dots\},$$

то говорят, что множество A *счетно*. Иными словами, множество A счетно, если все его элементы можно занумеровать посредством натуральных чисел, т. е. записать в виде последовательности

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Табл. 1 показывает, что множество всех четных чисел счетно (верхнее число рассматривается теперь как номер соответствующего нижнего числа).

Счетные множества это, так сказать, самые маленькие из бесконечных множеств: во всяком бесконечном множестве содержится счетное подмножество.

Если два непустых конечных множества не пересекаются, то их сумма содержит больше элементов, чем каждое из слагаемых. Для бесконечных множеств это правило может и не выполняться. В самом деле, пусть $Ч$ есть множество всех четных чисел, $Н$ — множество всех нечетных чисел и Z — множество всех натуральных чисел. Как показывает табл. 4, множества $Ч$ и $Н$ счетны. Однако множество $Z = Ч + Н$ вновь счетно.

Таблица 4

$Ч$	2	4	6	8	...
$Н$	1	3	5	7	...
Z	1	2	3	4	...

Нарушение правила «целое больше части» для бесконечных множеств показывает, что свойства бесконечных множеств *качественно* отличны от свойств конечных множеств. Переход от конечного к бесконечному сопровождается в полном согласии с известным положением диалектики — качественным изменением свойств.

Докажем, что *множество всех рациональных чисел счетно*. Для этого расположим все рациональные числа в такую таблицу:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
1	2	3	4	5	6	...
0	−1	−2	−3	−4	−5	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	...
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{11}{2}$	...
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	...
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{8}{3}$	...
...	...	...	...	...	...	...

Здесь в первой строке помещены все натуральные числа в порядке их возрастания, во второй строке 0 и целые отрицательные числа в порядке их убывания, в третьей строке — положительные несократимые дроби со знаменателем 2 в порядке их возрастания, в четвертой строке — отрицательные несократимые дроби со знаменателем 2 в порядке их убывания и т. д. Ясно, что каждое рациональное число один и только один раз находится в этой таблице. Перенумеруем теперь все числа этой таблицы в том порядке, как это указано стрелками. Тогда все рациональные числа разместятся в порядке одной последовательности:

Номер места, занимаемого рациональным числом	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ...
Рациональное число	1,	2,	0,	3,	−1,	$\frac{1}{2}$,	4,	−2,	$\frac{3}{2}$, ...

Этим установлено взаимно однозначное соответствие между всеми рациональными числами и всеми натуральными числами. Поэтому множество всех рациональных чисел счетно.

Множества мощности континуума. Если можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами множества M и точками отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$, то говорят, что множество M имеет *мощность континуума*. В частности, согласно этому определению, само множество точек отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеет мощность континуума.

Из рис. 1 видно, что множество точек любого отрезка AB имеет мощность континуума. Здесь взаимно однозначное соответствие устанавливается геометрически, посредством проектирования.

Нетрудно показать, что множества точек любого интервала $a<x<b$ и всей числовой прямой $-\infty<x<+\infty$ имеют мощность континуума.

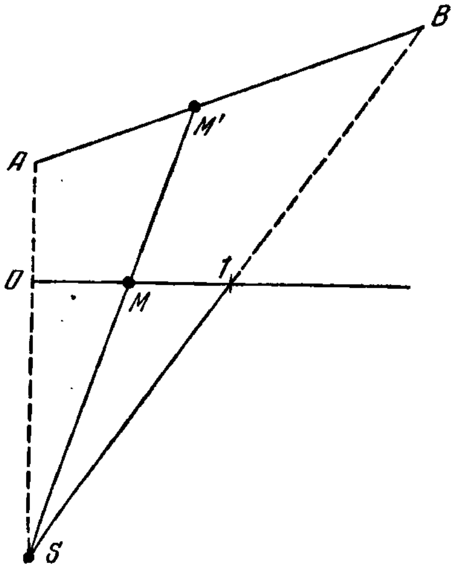

Рис. 1.

Значительно более интересен такой факт: множество точек квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ имеет мощность континуума. Таким образом, грубо говоря, в квадрате «столько же» точек, сколько и в отрезке.

§ 3. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА [1]

Развитие понятия о числе подробно изложено в главе I (том 1). Здесь мы дадим читателю беглое представление о теориях действительных чисел, которые возникли в XIX в. в связи с обоснованием основных понятий анализа.

Рациональные числа. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными свойствами рациональных чисел. Не вдаваясь в подробности, напомним эти свойства. Рациональные числа, т. е. числа вида $\frac{m}{n}$, где m и n — целые и $n \neq 0$, представляют собою множество чисел, в котором определены две операции (сложение и умножение). Эти операции подчиняются ряду законов (аксиом). В дальнейшем a, b, c, ... обозначают рациональные числа.

I. Аксиомы сложения.

1) $a+b=b+a$ (коммутативность),

2) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность),

3) уравнение

$$a+x=b$$

имеет единственное решение (существование обратной операции).

Из этих аксиом непосредственно вытекает, что имеет однозначный смысл выражение $a+b+c$, что существует рациональное число 0 (нуль), для которого $a+0=a$, и что для сложения существует обратная операция — вычитание, так что имеет смысл выражение $b-a$.

Таким образом, с алгебраической точки зрения, по отношению к операции сложения все рациональные числа образуют коммутативную группу.

---

[1] При написании этого параграфа использованы ценные консультации А. Н. Колмогорова.

II. Аксиомы умножения.

1) $ab=ba$ (коммутативность),

2) $a(bc)=(ab)c$ (ассоциативность),

3) уравнение

$$ay=b,$$

где $a\neq 0$, имеет единственное решение (существование обратной операции).

Из этих аксиом вытекает, что имеет смысл выражение abc, что существует рациональное число 1, для которого $a\cdot 1=a$ и что для рациональных чисел, отличных от 0, существует обратная операция — деление. Все рациональные числа, исключая число 0, образуют коммутативную группу по отношению к операции умножения.

III. Аксиома дистрибутивности.

1) $(a+b)c=ac+bc$.

Все аксиомы I—III показывают, что по отношению к операциям сложения и умножения рациональные числа образуют так называемое *алгебраическое поле*.

IV. Аксиомы упорядоченности.

1) Для любых двух рациональных чисел a и b имеет место одно и только одно из трех соотношений: либо $a<b$, либо $a>b$, либо $a=b$.

2) Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.

3) Если $a<b$, то $a+c<b+c$ (монотонность сложения).

4) Если $a<b$ и $c>0$, то $ac<bc$ (монотонность умножения на $c>0$).

Все эти аксиомы позволяют назвать множество рациональных чисел *упорядоченным полем*.

Кроме рациональных чисел, существуют и другие системы объектов, которые удовлетворяют этим аксиомам и, следовательно, являются упорядоченными полями.

Отметим два важных свойства рациональных чисел.

Плотность: для любых a и b, $a<b$, найдется такое c, что $a<c<b$.

Счетность: множество всех рациональных чисел счетно (см. § 2).

Об измерении величин. Недостаточность одних лишь рациональных чисел для математики проявляется уже при рассмотрении такой важной задачи, как задача об измерении величин. Мы рассмотрим ее на простейшем примере задачи об измерении длин отрезков.

Представим себе прямую, на которой отмечены определенное направление, начало отсчета (точка 0) и единица масштаба. Тогда понятно, что такое отрезок OA с концом в точке $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$ и т. д. Вообще, каждому рациональному числу a можно поставить в соответствие точку A на прямой, а именно точку с координатой

$x = a$. В таком случае число a определяет длину направленного отрезка OA. Однако при такой конструкции длина не всякого отрезка измеряется некоторым (рациональным) числом. Например, как это было известно уже древним грекам, длина диагонали квадрата со стороной, равной единице, не измеряется никаким рациональным числом. Иначе говоря, точек на прямой больше, чем рациональных точек. Естественный выход из этого положения — установление взаимно однозначного соответствия между числами и длинами, т. е. дальнейшее расширение понятия числа.

Действительные числа. Мы пришли к выводу, что одних рациональных чисел для измерения величин недостаточно и что понятие числа должно быть расширено таким образом, чтобы между числами и точками на прямой существовало взаимно однозначное соответствие. С этой целью постараемся выяснить, нельзя ли определить положение произвольной точки на прямой при помощи одних лишь рациональных точек. Аналогичная конструкция в области рациональных чисел и приведет нас к понятию действительного числа.

Пусть α — произвольная точка на прямой. Тогда все рациональные точки a можно разделить на две части: к одной части отнесем все те точки a, которые расположены левее α, а к другой — те точки a, которые находятся правее α. Что же касается самой точки α (если она случайно оказалась рациональной), то ее можно отнести к любой из частей. Такое разбиение рациональных точек принято называть *сечением*. Сечения будем считать тождественными, если совокупности рациональных точек, входящих в левые и правые части сечений, совпадают (с точностью до одной точки). Теперь нетрудно видеть, что различные точки α и β определяют разные сечения. В самом деле, так как рациональные точки расположены на прямой всюду плотно, то найдутся рациональные точки r_1 и r_2, расположенные строго между α и β. Тогда для одного сечения они попадут в его правую часть, а для другого — в левую.

Итак, каждая точка на прямой определяет сечение в области рациональных точек и разным точкам соответствуют разные сечения. Очень важно, что сечения можно определить и несколько иначе, чем это было сделано выше, и притом так, чтобы само число α не фигурировало в этом определении. Именно, будем называть сечением в области рациональных точек такое разбиение всех рациональных точек на два непустых непересекающихся множества A и B, таких, что $a < b$ для любых $a \in A$, $b \in B$. При таком определении по сечению можно однозначно восстановить ту точку (рубеж), которая производит его. Иными словами, при помощи сечений в области рациональных точек можно определить *любую* точку на прямой. Изложенная конструкция была предложена немецким математиком Р. Дедекиндом и носит название *дедекиндова сечения*.