

**А. Дж. Мак-Коннел**

**Введение в тензорный анализ  
С приложениями к геометрии,  
механике и физике**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 50  
ББК 22  
А11

A11      **А. Дж. Мак-Коннел**  
Введение в тензорный анализ: С приложениями к геометрии, механике и физике / А. Дж. Мак-Коннел – М.: Книга по Требованию, 2013. – 412 с.

**ISBN 978-5-458-29953-4**

В большей части курсов тензорного исчисления оно излагается вместе с многомерной римановой геометрией, поэтому читателю приходится изучать сразу два предмета, из которых каждый сам по себе достаточно сложен. Для читателя, интересующегося тензорным исчислением с точки зрения его применения в других областях науки, это создаёт излишние трудности, часто даже непреодолимые. Идея книги А.Дж. Мак-Коннела, предлагаемой ныне советскому читателю, состоит в том, чтобы изложить основы тензорной алгебры и тензорного анализа на материале, уже знакомом достаточно широкому кругу лиц (научным работникам, инженерам и студентам).

**ISBN 978-5-458-29953-4**

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



§ 3. Плоскость, касательная к конусу . . . . .	112
§ 4. Полюсы и полярные плоскости относительно конуса . . . . .	114
§ 5. Каноническое уравнение конуса . . . . .	116
§ 6. Главные оси конуса . . . . .	118
§ 7. Классификация конусов . . . . .	121
Упражнения к главе VI . . . . .	122
<b>Г л а в а VII. Семейства конусов и конических сечений . . . . .</b>	<b>126</b>
§ 1. Уравнение семейства конусов с общей вершиной . . . . .	126
§ 2. Общие полярные направления семейства конусов . . . . .	127
§ 3. Каноническая форма уравнения семейства конусов . . . . .	130
§ 4. Теория элементарных делителей . . . . .	137
§ 5. Аналитические признаки . . . . .	140
Упражнения к главе VII . . . . .	142
<b>Г л а в а VIII. Центральные поверхности второго порядка . . . . .</b>	<b>145</b>
§ 1. Точечное уравнение центральной поверхности второго порядка . . . . .	145
§ 2. Таинственное уравнение поверхности второго порядка . . . . .	147
§ 3. Каноническая форма уравнения поверхности второго порядка. Главные оси . . . . .	148
§ 4. Классификация центральных поверхностей второго порядка . . . . .	150
§ 5. Софокусные поверхности второго порядка . . . . .	152
Упражнения к главе VIII . . . . .	154
<b>Г л а в а IX. Общие поверхности второго порядка . . . . .</b>	<b>157</b>
§ 1. Общее уравнение поверхности второго порядка . . . . .	157
§ 2. Центр . . . . .	159
§ 3. Приведение уравнения поверхности второго порядка . . . . .	160
Упражнения к главе IX . . . . .	163
<b>Г л а в а X. Аффинные преобразования . . . . .</b>	<b>166</b>
§ 1. Аффинные преобразования . . . . .	166
§ 2. Поверхность второго порядка, связанная с преобразованием . . . . .	168
§ 3. Чистая деформация . . . . .	170
§ 4. Конечные перемещения твердого тела . . . . .	171
§ 5. Бесконечно малые деформации . . . . .	173
Упражнения к главе X . . . . .	176

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ III	
ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ	
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ	
<b>Г л а в а XI. Криволинейные координаты . . . . .</b>	<b>179</b>
§ 1. Общие координатные системы . . . . .	179
§ 2. Тензорные поля . . . . .	182
§ 3. Линейный элемент и метрический тензор. $\varepsilon$ -объекты	184
§ 4. Угол между двумя направлениями . . . . .	187
Упражнения к главе XI . . . . .	189
<b>Г л а в а XII. Ковариантное дифференцирование . . . . .</b>	<b>191</b>
§ 1. Параллельное векторное поле. Символы Кристоффеля . . . . .	191
§ 2. Абсолютная и ковариантная производная вектора	195
§ 3. Абсолютная и ковариантная производная тензора	198
§ 4. Сохранение правил обычного дифференциального исчисления. Лемма Риччи . . . . .	200
§ 5. Дивергенция и вихрь вектора. Лапласиан . . . . .	203
§ 6. Тензор Римана—Кристоффеля. Тождества Лиме	205
Упражнения к главе XII . . . . .	208
<b>Г л а в а XIII. Кривые в пространстве . . . . .</b>	<b>210</b>
§ 1. Касательный вектор кривой . . . . .	210
§ 2. Нормальный вектор. Главная нормаль и бинормаль	211
§ 3. Формулы Френе . . . . .	213
§ 4. Уравнение прямой . . . . .	215
Упражнения к главе XIII . . . . .	216
<b>Г л а в а XIV. Внутренняя геометрия поверхности . . . . .</b>	<b>218</b>
§ 1. Криволинейные координаты на поверхности . . . . .	218
§ 2. Введение греческих индексов. Тензоры на поверхности . . . . .	220
§ 3. Элемент длины и метрический тензор . . . . .	222
§ 4. Направления на поверхности. Угол между двумя направлениями . . . . .	225
§ 5. Геодезические кривые . . . . .	228
§ 6. Преобразование символов Кристоффеля. Геодезические координаты . . . . .	233
§ 7. Параллельный перенос относительно поверхности	236

§ 8. Абсолютное и ковариантное дифференцирование тензоров на поверхности . . . . .	239
§ 9. Тензор Римана—Кристоффели. Гауссова кривизна поверхности . . . . .	242
§ 10. Геодезическая кривизна кривой на поверхности . . . . .	243
§ 11. Дифференциальные параметры Бельтрами . . . . .	247
§ 12. Теорема Грина на поверхности . . . . .	249
Упражнения к главе XIV . . . . .	251
 Г л а в а XV. Основные формулы теории поверхностей	256
§ 1. Система обозначений . . . . .	256
§ 2. Векторы, касательные к поверхности . . . . .	257
§ 3. Первая основная квадратичная форма поверхности . . . . .	258
§ 4. Вектор, нормальный к поверхности . . . . .	259
§ 5. Тензорное дифференцирование тензоров . . . . .	261
§ 6. Формулы Гаусса. Вторая основная квадратичная форма поверхности . . . . .	264
§ 7. Формулы Вейнгардтена. Третья основная квадратичная форма поверхности . . . . .	265
§ 8. Уравнения Гаусса—Кодакци . . . . .	267
Упражнения к главе XV . . . . .	270
 Г л а в а XVI. Кривые на поверхности . . . . .	273
§ 1. Уравнение кривой на поверхности . . . . .	273
§ 2. Теорема Менье . . . . .	274
§ 3. Главные кривизны. Теорема Гаусса . . . . .	276
§ 4. Линии кривизны . . . . .	277
§ 5. Асимптотические линии. Формула Эннепера . .	279
§ 6. Геодезическое кручение кривой на поверхности	281
Упражнения к главе XVI . . . . .	282
 Ч А С Т Ъ IV	
 ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА К МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ	
 Г л а в а XVII. Динамика точки . . . . .	285
§ 1. Уравнения движения . . . . .	285
§ 2. Работа и энергия. Уравнения Лагранжа второго рода . . . . .	288
§ 3. Движение точки по кривой . . . . .	292
§ 4. Движение точки по поверхности . . . . .	295

§ 5. Принцип наименьшего действия. Траектории как геодезические линии . . . . .	298
Упражнения к главе XVII . . . . .	301
 Г л а в а XVIII. Динамика твердого тела . . . . .	305
§ 1. Моменты инерции . . . . .	305
§ 2. Уравнения движения . . . . .	307
§ 3. Подвижные оси. Уравнения Эйлера . . . . .	311
§ 4. Обобщенные координаты динамической системы . . . . .	314
§ 5. Уравнения движения в обобщенных координатах . . . . .	317
§ 6. Пространство конфигураций . . . . .	320
§ 7. Кинематический линейный элемент . . . . .	321
§ 8. Траектории динамической системы в пространстве конфигураций . . . . .	323
§ 9. Принцип стационарного действия. Линейный элемент действия . . . . .	325
Упражнения к главе XVIII . . . . .	327
 Г л а в а XIX. Электричество и магнетизм . . . . .	333
§ 1. Теорема Грина . . . . .	333
§ 2. Теорема Стокса . . . . .	336
§ 3. Электростатическое поле . . . . .	338
§ 4. Диэлектрики . . . . .	340
§ 5. Магнетостатическое поле . . . . .	343
§ 6. Уравнения электромагнитного поля . . . . .	345
Упражнения к главе XIX . . . . .	349
 Г л а в а XX. Механика сплошных сред . . . . .	353
§ 1. Бесконечно малые деформации . . . . .	353
§ 2. Напряжения . . . . .	357
§ 3. Уравнения движения идеальной жидкости . . . . .	359
§ 4. Уравнения теории упругости . . . . .	362
§ 5. Движение вязкой жидкости . . . . .	364
Упражнения к главе XX . . . . .	367
 Г л а в а XXI. Специальная теория относительности . . . . .	371
§ 1. Четырехмерное многообразие . . . . .	371
§ 2. Обобщенные координаты в пространстве—времени . . . . .	372
§ 3. Принцип относительности. Интервал и фундаментальная квадратичная форма . . . . .	374

## ОГЛАВЛЕНИЕ

9

§ 4. Собственные координатные системы и их преобразования . . . . .	379
§ 5. Релятивистская динамика частицы . . . . .	382
§ 6. Динамика сплошной среды . . . . .	384
§ 7. Уравнения электромагнитного поля . . . . .	386
Упражнения к главе XXI . . . . .	389

## ДОПОЛНЕНИЕ

**ОРТОГОПАЛЬНЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ  
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ**

§ 1. Классические обозначения . . . . .	393
§ 2. Физические составляющие векторов и тензоров . . . . .	394
§ 3. Динамика . . . . .	396
§ 4. Теория электромагнитного поля . . . . .	397
§ 5. Теория упругости . . . . .	398
§ 6. Гидродинамика . . . . .	400
Литература . . . . .	405
Предметный указатель . . . . .	412

---

## ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В большей части курсов тензорного исчисления оно излагается вместе с многомерной римановой геометрией, поэтому читателю приходится изучать сразу два предмета, из которых каждый сам по себе достаточно сложен. Для читателя, интересующегося тензорным исчислением с точки зрения его применения в других областях науки, это создает излишние трудности, часто даже непреодолимые.

Идея книги А. Дж. Мак-Коннела, предлагаемой ныне советскому читателю, состоит в том, чтобы изложить основы тензорной алгебры и тензорного анализа на материале, уже знакомом достаточно широкому кругу лиц (научным работникам, инженерам и студентам).

Отличительной чертой книги являются чрезвычайная ясность и достаточная простота изложения. Кроме того, почти в каждом параграфе и в каждой главе имеются упражнения для самостоятельного решения (всего 685), так что одновременно с учебником читателю предлагается и единственный в своем роде сборник задач.

Можно надеяться, что издание книги А. Дж. Мак-Коннела на русском языке будет способствовать более широкому распространению у нас тензорных методов, чем это имело место до сих пор.

Первое издание книги на английском языке вышло в 1931 г., и с тех пор она неоднократно и без изменений переиздавалась в Англии и Америке. Перевод сделан с последнего американского издания 1957 г. И. А. Вателем, Ф. И. Ерепенко, А. И. Кирющенко, И. А. Крассом и Н. Т. Минаевым.

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Тензорное исчисление зарекомендовало себя как инструмент, особенно удобный в области общей теории относительности; оно сделалось совершенно необходимым в многомерной дифференциальной геометрии. Появилось много работ, использующих тензорное исчисление в применении к этим сложным теориям, но очень мало таких, где оно применялось бы в более простых дисциплинах. Настоящая книга написана с целью создания учебника, который дал бы студентам возможность ознакомиться с тензорными методами на раннем этапе математического образования. Лучше всего студент сможет оценить силу тензорных методов путем применения их к хорошо знакомым предметам. Поэтому дисциплины, рассматриваемые в настоящей книге, не выходят за рамки обычного университетского курса. Разумеется, книга не имеет целью дать полное изложение этих дисциплин; автор пытался дать лишь краткий, но насыщенный обзор каждой из них.

Содержание разделено на четыре части. Первая часть предназначена для того, чтобы сделать книгу независимой от других трудов в этой области, и содержит элементарное описание основных идей и системы обозначений тензорной алгебры. Вторая часть содержит применение тензорной алгебры к аналитической геометрии и, в сущности, представляет собой геометрическое толкование тензорной алгебры. Таким образом, первая половина книги не имеет дела с дифференциальными свойствами тензоров, а только с алгебраическими и только с линейными преобразованиями.

В третьей части вводится собственно тензорный анализ, а именно, теория дифференцирования тензоров. В ней проблема ковариантного дифференцирования

рассматривается с геометрической точки зрения и излагается элементарная дифференциальная геометрия. Автор надеется, что эта часть будет полезной для студентов как введение в современную дифференциальную геометрию. Способ изложения был избран именно из этих соображений.

Четвертая часть содержит применение тензорных методов в динамике, теории упругости, гидродинамике и теории электромагнитного поля. Немного места уделено геометризации общей динамики. В последней главе специальная теория относительности изложена в тензорных обозначениях; автор надеется, что эта глава будет хорошим введением в более трудную общую теорию относительности.

Дополнение посвящено применению ортогональных криволинейных координат в математической физике; в нем система обозначений, принятая в настоящей книге, связана с системой обозначений, принятой в тех учебниках, где не используются тензорные обозначения.

Серьезным недостатком большей части книг по тензорному исчислению, которые появились к настоящему времени, является отсутствие задач и упражнений. В настоящей работе содержится большое количество их; автор надеется, что они дадут читателю необходимую тренировку в применении тензорных методов. К большей части задач даны ответы и во многих случаях даны указания к решению.

Выражаю глубокую благодарность профессору Т. Леви-Чивита, профессору А. Палатини, профессору И. Л. Сипгу и доктору Джону Дагеллу за ценные советы при подготовке этой рукописи к печати.

*A. Дж. Мак-Коннел*

Колледж Св. Троицы,  
Дублин  
Апрель 1931 г.

# ЧАСТЬ I

## ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

---

### ГЛАВА I

#### ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

##### § 1. Индексные обозначения

Система индексных обозначений составляет столь значительную часть тензорного исчисления, что читатель, освоившись однажды с ее особенностями, сможет идти дальше самостоятельно. Поэтому мы посвятим настоящую главу только самой системе обозначений, изложив кратко ее применение лишь к теории определителей, и отложим до следующей главы собственно тензорную алгебру.

Если нам дана совокупность трех независимых переменных, то они могут быть обозначены тремя различными буквами, например  $x, y, z$ , но мы считаем более удобным обозначать переменные данной совокупности одной и той же буквой, различая их посредством индексов. Таким образом, мы можем записать три переменные в виде  $x_1, x_2, x_3$ , или в более компактной форме:

$$x_r, \quad (r = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Здесь мы написали индекс  $r$  внизу, но в равной мере мы могли бы использовать вместо этого верхний значок, так что переменные были бы записаны в виде  $x^1, x^2, x^3$ , или

$$x^r \quad (r = 1, 2, 3). \quad (2)$$

*Понятно, что  $x^r$  не означает возведения  $x$  в  $r$ -ю степень; индекс  $r$  используется просто для того, чтобы различить три переменные.* Впоследствии мы будем использовать как верхние, так и нижние индексы; в следующей главе мы принципиальному положению индекса специальный смысл. В дальнейшем мы увидим, что для наших переменных удобна форма записи (2), а не (1).

Однородная линейная функция переменных обычно записывается в виде

$$\sum_{m=1}^3 a_m x^m \equiv a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad (3)$$

где  $a_1, a_2, a_3$  — константы. Таким образом, коэффициенты линейной формы могут быть записаны в виде

$$a_r \quad (r = 1, 2, 3).$$

Объекты, которые, подобно  $x^r$  и  $a_r$ , зависят только от одного индекса, называются *объектами первого порядка*, а отдельные буквы с индексами  $x^1, x^2, x^3$  и  $a_1, a_2, a_3$  называются *элементами* или *составляющими* объекта. Объекты первого порядка, имеющие три составляющие, назовем трехмерными. Имеются два типа объектов первого порядка, а именно те, у которых индекс вверху, и те, у которых индекс внизу; следовательно, все объекты первого порядка принадлежат к одному из двух типов

$$a^r, a_r \quad (r = 1, 2, 3). \quad (4)$$

С другой стороны, однородная квадратичная функция трех переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{m, n=1}^3 a_{mn} x^m x^n &\equiv a_{11} (x^1)^2 + a_{12} x^1 x^2 + a_{13} x^1 x^3 + a_{21} x^2 x^1 + \\ &+ a_{22} (x^2)^2 + a_{23} x^2 x^3 + a_{31} x^3 x^1 + a_{32} x^3 x^2 + a_{33} (x^3)^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $a_{mn}$  — константы. Мы видим, что коэффициенты квадратичной формы зависят от *двух* индексов и записываются так:

$$a_{mn} \quad (m, n = 1, 2, 3).$$

Объекты, которые зависят от двух индексов, называются *объектами второго порядка*. Из того, что индексы бывают верхние и нижние, следует, что объекты второго порядка могут быть трех типов:

$$a_{rs}, \quad a_r^s, \quad a^{rs} \quad (r, s = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Легко видеть, что в этом случае каждый объект имеет 9 составляющих.

Аналогично можно получить *объекты третьего порядка*, которые будут зависеть от трех индексов и могут