А. Дж. Мак-Коннел

Введение в тензорный анализ

С приложениями к геометрии, механике и физике

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 50
ББК 22
А11

А. Дж. Мак-Коннел

А11 Введение в тензорный анализ: С приложениями к геометрии, механике и физике / А. Дж. Мак-Коннел – М.: Книга по Требованию, 2013. – 412 с.

ISBN 978-5-458-29953-4

В большей части курсов тензорного исчисления оно излагается вместе с многомерной римановой геометрией, поэтому читателю приходится изучать сразу два предмета, из которых каждый сам по себе достаточно сложен. Для читателя, интересующегося тензорным исчисление с точки зрения его применения в других областях науки, это создаёт излишние трудности, часто даже непреодолимые.Идея книги А.Дж. Мак-Коннела, предлагаемой ныне советскому читателю, состоит в том, чтобы изложить основы тензорной алгебры и тензорного анализа на материале, уже знакомом достаточно широкому кругу лиц (научным работникам, инженерам и студентам).

ISBN 978-5-458-29953-4

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ЧАСТЬ III

ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЧАСТЬ IV

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА К МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

ДОПОЛНЕНИЕ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В большей части курсов тензорного исчисления оно излагается вместе с многомерной римановой геометрией, поэтому читателю приходится изучать сразу два предмета, из которых каждый сам по себе достаточно сложен. Для читателя, интересующегося тензорным исчислением с точки зрения его применения в других областях науки, это создает излишние трудности, часто даже непреодолимые.

Идея книги А. Дж. Мак-Коннела, предлагаемой ныне советскому читателю, состоит в том, чтобы изложить основы тензорной алгебры и тензорного анализа на материале, уже знакомом достаточно широкому кругу лиц (научным работникам, инженерам и студентам).

Отличительной чертой книги являются чрезвычайная ясность и достаточная простота изложения. Кроме того, почти в каждом параграфе и в каждой главе имеются упражнения для самостоятельного решения (всего 685), так что одновременно с учебником читателю предлагается и единственный в своем роде сборник задач.

Можно надеяться, что издание книги А. Дж. Мак-Коннела на русском языке будет способствовать более широкому распространению у нас тензорных методов, чем это имело место до сих пор.

Первое издание книги на английском языке вышло в 1931 г., и с тех пор она неоднократно и без изменений переиздавалась в Англии и Америке. Перевод сделан с последнего американского издания 1957 г. И. А. Вателем, Ф. И. Еретко, А. И. Кирющенко, И. А. Крассом и Н. Т. Минаевым.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Тензорное исчисление зарекомендовало себя как инструмент, особенно удобный в области общей теории относительности; оно сделалось совершенно необходимым в многомерной дифференциальной геометрии. Появилось много работ, использующих тензорное исчисление в применении к этим сложным теориям, но очень мало таких, где оно применялось бы в более простых дисциплинах. Настоящая книга написана с целью создания учебника, который дал бы студентам возможность ознакомиться с тензорными методами на раннем этапе математического образования. Лучше всего студент сможет оценить силу тензорных методов путем применения их к хорошо знакомым предметам. Поэтому дисциплины, рассматриваемые в настоящей книге, не выходят за рамки обычного университетского курса. Разумеется, книга не имеет целью дать полное изложение этих дисциплин; автор пытался дать лишь краткий, но насыщенный обзор каждой из них.

Содержание разделено на четыре части. Первая часть предназначена для того, чтобы сделать книгу независимой от других трудов в этой области, и содержит элементарное описание основных идей и системы обозначений тензорной алгебры. Вторая часть содержит применение тензорной алгебры к аналитической геометрии и, в сущности, представляет собой геометрическое толкование тензорной алгебры. Таким образом, первая половина книги не имеет дела с дифференциальными свойствами тензоров, а только с алгебраическими и только с линейными преобразованиями.

В третьей части вводится собственно тензорный анализ, а именно, теория дифференцирования тензоров. В ней проблема ковариантного дифференцирования рассматривается с геометрической точки зрения и излагается элементарная дифференциальная геометрия. Автор надеется, что эта часть будет полезной для студентов как введение в современную дифференциальную геометрию. Способ изложения был избран именно из этих соображений.

Четвертая часть содержит применение тензорных методов в динамике, теории упругости, гидродинамике и теории электромагнитного поля. Немного места уделено геометризации общей динамики. В последней главе специальная теория относительности изложена в тензорных обозначениях; автор надеется, что эта глава будет хорошим введением в более трудную общую теорию относительности.

Дополнение посвящено применению ортогональных криволинейных координат в математической физике; в нем система обозначений, принятая в настоящей книге, связана с системой обозначений, принятой в тех учебниках, где не используются тензорные обозначения.

Серьезным недостатком большей части книг по тензорному исчислению, которые появились к настоящему времени, является отсутствие задач и упражнений. В настоящей работе содержится большое количество их; автор надеется, что они дадут читателю необходимую тренировку в применении тензорных методов. К большей части задач даны ответы и во многих случаях даны указания к решению.

Выражаю глубокую благодарность профессору Т. Леви-Чивита, профессору А. Палатини, профессору И. Л. Сингу и доктору Джону Дагеллу за ценные советы при подготовке этой рукописи к печати.

А. Дж. Мак-Коннел

Колледж Св. Троицы,
Дублин
Апрель 1931 г.

ЧАСТЬ I
ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

ГЛАВА I
ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Индексные обозначения

Система индексных обозначений составляет столь значительную часть тензорного исчисления, что читатель, освоившись однажды с ее особенностями, сможет идти дальше самостоятельно. Поэтому мы посвятим настоящую главу только самой системе обозначений, изложив кратко ее применение лишь к теории определителей, и отложим до следующей главы собственно тензорную алгебру.

Если нам дана совокупность трех независимых переменных, то они могут быть обозначены тремя различными буквами, например x, y, z, но мы считаем более удобным обозначать переменные данной совокупности одной и той же буквой, различая их посредством индексов. Таким образом, мы можем записать три переменные в виде x_1, x_2, x_3, или в более компактной форме:

$$x_r \quad (r = 1,\ 2,\ 3). \tag{1}$$

Здесь мы написали индекс r внизу, но в равной мере мы могли бы использовать вместо этого верхний значок, так что переменные были бы записаны в виде x^1, x^2, x^3, или

$$x^r \qquad (r = 1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Понятно, что x^r не означает возведения x в r-ю степень; индекс r используется просто для того, чтобы различить три переменные. Впоследствии мы будем использовать как верхние, так и нижние индексы; в следующей главе мы припишем положению индекса специальный смысл. В дальнейшем мы увидим, что для наших переменных удобна форма записи (2), а не (1).

Однородная линейная функция переменных обычно записывается в виде

$$\sum_{m=1}^{3} a_m x^m \equiv a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3, \tag{3}$$

где a_1, a_2, a_3 — константы. Таким образом, коэффициенты линейной формы могут быть записаны в виде

$$a_r \qquad (r = 1,\ 2,\ 3).$$

Объекты, которые, подобно x^r и a_r, зависят только от одного индекса, называются *объектами первого порядка*, а отдельные буквы с индексами x^1, x^2, x^3 и a_1, a_2, a_3 называются *элементами* или *составляющими* объекта. Объекты первого порядка, имеющие три составляющие, назовем трехмерными. Имеются два типа объектов первого порядка, а именно те, у которых индекс вверху, и те, у которых индекс внизу; следовательно, все объекты первого порядка принадлежат к одному из двух типов

$$a^r,\ a_r \qquad (r = 1,\ 2,\ 3). \tag{4}$$

С другой стороны, однородная квадратичная функция трех переменных имеет вид

$$\sum_{m,\,n=1}^{3} a_{mn} x^m x^n \equiv a_{11} (x^1)^2 + a_{12} x^1 x^2 + a_{13} x^1 x^3 + a_{21} x^2 x^1 + \\ + a_{22} (x^2)^2 + a_{23} x^2 x^3 + a_{31} x^3 x^1 + a_{32} x^3 x^2 + a_{33} (x^3)^2, \tag{5}$$

где a_{mn} — константы. Мы видим, что коэффициенты квадратичной формы зависят от *двух* индексов и записываются так:

$$a_{mn} \qquad (m,\ n = 1,\ 2,\ 3).$$

Объекты, которые зависят от двух индексов, называются *объектами второго порядка*. Из того, что индексы бывают верхние и нижние, следует, что объекты второго порядка могут быть трех типов:

$$a_{rs}, \qquad a^r_s, \qquad a^{rs} \qquad (r,\ s = 1,\ 2,\ 3). \tag{6}$$

Легко видеть, что в этом случае каждый объект имеет 9 составляющих.

Аналогично можно получить *объекты третьего порядка*, которые будут зависеть от трех индексов и могут