И. И. Привалов

Субгармонические функции

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
И11

И. И. Привалов
И11 Субгармонические функции / И. И. Привалов – М.: Книга по Требованию, 2021. – 199 с.

ISBN 978-5-458-26183-8

ISBN 978-5-458-26183-8

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ЧАСТЬ II

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

ЧАСТЬ I

МЕТОД МАКСИМУМА И ГАРМОНИЧЕСКОЙ МАЖОРАНТЫ

ВВЕДЕНИЕ

Субгармонические функции были введены в анализ Гартогсом (Hartogs) [4] [1]) и Ф. Риссом (F. Riesz) [27], однако их идея уже заложена в методе „выметания" Пуанкаре (Poincaré). Они представляют собою распространение на случай многих переменных выпуклых функций одного переменного. После того как теория субгармонических функций достаточно развилась, естественно возник вопрос о приложении их как более общего класса функций к теории аналитических функций одного комплексного переменного. Этот новый методологический подход к проблемам теории функций комплексного переменного, в основании которого лежат свойства субгармонических функций, с одной стороны, дает упрощение доказательств и объясняет ряд положений, на первый взгляд не связанных друг с другом; с другой стороны, позволяет формулировать ряд принципов в наиболее общем виде для широкого класса субгармонических функций. В целях дальнейших приложений теории субгармонических функций к аналитическим функциям одного комплексного переменного мы изложим предварительно некоторые вопросы гармонических функций от двух независимых переменных.

§ 1. Связь между функциями гармоническими и аналитическими

n° 1. *Функция $P(x, y)$ двух действительных переменных x и y называется гармонической в области D, если она однозначна, имеет непрерывные частные производные первых двух порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа* (Laplace)

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

в области D.

Рассматривая плоскость (x, y) как плоскость комплексного переменного $z = x + iy$, всякую функцию $f(z)$, аналитическую в области D, мы можем представить в виде

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

[1]) Здесь и в дальнейшем цифры в квадратных скобках указывают ссылки на список литературы, помещенный в конце книги.

где P и Q удовлетворяют *уравнениям Коши-Римана* (Cauchy-Riemann):

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\mathrm{C-R}).$$

Диференцируя первое из этих уравнений относительно x, а второе — относительно y и складывая результаты, получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0.$$

Следовательно, действительная часть $P(x, y)$ функции $f(z)$, аналитической в области D, есть гармоническая функция в этой области.

Обратно, пусть $P(x, y)$ данная гармоническая функция в односвязной области; из уравнений (C — R) Коши-Римана можно найти сопряженную гармоническую функцию $Q(x, y)$, которая определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого, и тем самым построить функцию $f(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$, аналитическую в области D.

Таким образом, чтобы $P(x, y)$ была гармонической функцией в односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы она была действительной частью аналитической функции в этой области.

n° 2. Пусть теперь $f(z)$ аналитическая функция в односвязной области D, нигде в этой области не равная нулю. Тогда $\ln f(z)=\ln|f(z)|+i \arg f(z)$ можно рассматривать как функцию аналитическую в области D. Следовательно, по предыдущему, $\ln|f(z)|$ есть гармоническая функция в области D.

Обратно, *всякую гармоническую функцию* $P(x, y)$ *в односвязной области* D *можно представить в виде* $\ln|f(z)|$, *где* $f(z)$ *аналитическая функция в этой области, не обращающаяся в нуль.* Действительно, по данной гармонической функции $P(x, y)$ находим сопряженную с ней гармоническую функцию $Q(x, y)$ и, полагая $f(z)=e^{P+iQ}$, получаем

$$|f(z)|=e^{P(x, y)},$$

откуда

$$P(x, y)=\ln|f(z)|.$$

n° 3. Это предложение, связывающее аналитические функции с гармоническими, позволяет, зная принцип максимума для модуля аналитической функции, установить принцип экстремума для гармонической функции, формулируемый таким образом:

Гармоническая функция, отличная от постоянного, не может достигать максимума или минимума во внутренней точке области. В самом деле, $P(x, y)=\ln|f(z)|$ достигает экстремума одновременно с $|f(z)|$, а модуль функции, аналитической в области, не обращающейся в нуль нигде в этой области, не может достигать максимума или минимума во внутренней точке области.

Из этого экстремального принципа гармонических функций немедленно вытекает единственность решения так называемой задачи Дирихле (Dirichlet), состоящей в следующем. На границе некоторой области D задана непрерывная последовательность значений. Требуется найти функцию, гармоническую в области D, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$ и принимающую заданные значения на границе. Предположим, что существуют две гармонические функции в области D, — обозначим их P_1 и P_2, — непрерывные, включая границу, и принимающие заданные значения на границе. Тогда $P = P_1 - P_2$ будет гармонической функцией в области D, непрерывной в $\overline{D}$ и равной нулю на границе. В силу экстремального принципа функция P не может принимать в области D ни положительных, ни отрицательных значений, а потому $P \equiv 0$ всюду в D, т. е. $P_1 \equiv P_2$.

§ 2. Функция Грина (Green)

Переход от функций аналитических к гармоническим осуществляется с помощью так называемой функции Грина.

Пусть мы имеем произвольную односвязную область D в плоскости z, отличную от полной плоскости или плоскости с выключенной точкой. Допустим, что мы построили функцию, реализующую конформное взаимно однозначное отображение нашей области на единичный круг: $w = f(z)$, $f(\zeta) = 0$, где ζ фиксированная точка области D. Полагая $G(z; \zeta) = -\ln|f(z)|$ [1]), мы получим действительную положительную функцию от переменного z, где ζ рассматривается как параметр, которая называется *функцией Грина области D с полюсом ζ*. Чтобы изучить ее свойства, заметим, что

$$w = f(z) = (z - \zeta) f_1(z), \tag{1}$$

где $f_1(z)$ не обращается в нуль нигде в области D, так как $f(z)$ — функция Римана, дающая взаимно однозначное отображение, обращается в нуль только один раз при $z = \zeta$. Заменяя $f(z)$ по формуле (1), найдем для $G(z; \zeta)$ выражение

$$G(z; \zeta) = -\ln|z - \zeta| - \ln|f_1(z)|$$

или

$$G(z; \zeta) + \ln|z - \zeta| = -\ln|f_1(z)|. \tag{2}$$

Правая часть равенства (2) есть гармоническая функция в области D, потому что $f_1(z)$ не обращается в нуль. Следовательно, $G(z; \zeta)$ будет гармонической функцией в области D, за исключением точки $z = \zeta$, где она имеет логарифмический полюс. Ясно, что на границе области функция Грина $G(z; \zeta)$ равна нулю, так как на границе области D имеем: $|f(z)| = 1$.

§ 3. Свойства функции Грина

n° 1. Пусть $W = F(z)$ функция, реализующая конформное отображение области D на единичный круг, причем точке ζ области D соответствует точка W_0 единичного круга, т. е. $W_0 = F(\zeta)$. Выполним над функцией $F(z)$ линейное преобразование

$$f(z) = \frac{W - W_0}{1 - W\overline{W}_0} = \frac{F(z) - F(\zeta)}{1 - F(z)\cdot\overline{F(\zeta)}},$$

[1]) При данном ζ функция $G(z, \zeta)$ определяется однозначно.

в силу которого точке $z = \zeta$ соответствует начало координат. Согласно § 2 функция Грина для области D будет

$$G(z; \zeta) = -\ln \left| \frac{F(z) - F(\zeta)}{1 - F(z)\overline{F(\zeta)}} \right|. \tag{3}$$

Из формулы (3) усматриваем, что функция Грина симметрична относительно z и ζ, т. е. $G(z; \zeta) = G(\zeta; z)$. Как мы видели, на границе области D функция Грина исчезает, внутри области она положительна, в точке $z = \zeta$ она имеет логарифмический полюс. Приравняв $G(z; \zeta)$ положительному числу λ, получим уравнение $G(z; \zeta) = \lambda$ замкнутой кривой, окружающей точку $z = \zeta$ и переходящей при конформном отображении области D на единичный круг в окружность с центром в начале координат, уравнение которой есть

$$|w| = |f(z)| = e^{-G(z; \zeta)} = e^{-\lambda}.$$

Кривые $G(z; \zeta) = \lambda$ называются *линиями уровня* или *линиями Грина*. Для всех точек, внутренних к линии Грина, будет $G(z; \zeta) > \lambda$.

Аналогично плоскому случаю вводится понятие функции Грина для пространственных областей p измерений. Так же как и в плоском случае, при $p \geqslant 3$ функция Грина равняется нулю на границе области и гармонична везде внутри области за исключением особой точки, в которой она имеет полюс порядка $p-2$.

§ 4. Формула Грина

n° 1. Рассмотрим односвязную область D со спрямляемой границей C и функцию $\varphi(z)$, голоморфную внутри D, непрерывную в области $\overline{D}$. Согласно интегральной формуле Коши, имеем

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(u)\, du}{u - z}. \tag{4}$$

Вместо ядра Коши $\frac{1}{u-z}$ введем функцию Грина. Пусть $f(u)$ отображает конформно область D на единичный круг, причем $f(z) = 0$; тогда $f(u) = (u - z) f_1(u)$, где $f_1(u)$ не обращается в нуль нигде в области D.

Найдем логарифмическую производную

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{1}{u-z} + \frac{f_1'(u)}{f_1(u)},$$

откуда

$$\frac{1}{u-z} = \frac{f'(u)}{f(u)} - \frac{f_1'(u)}{f_1(u)}.$$

Подставляя $\frac{1}{u-z}$ в формулу Коши (4), получим

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(u) \frac{f'(u)}{f(u)}\, du - \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(u) \frac{f_1'(u)}{f_1(u)}\, du. \tag{5}$$

Второй интеграл равенства (5) в силу теоремы Коши равен нулю, потому что его подинтегральная функция аналитическая в области D[1]); следовательно, формула (5) примет вид:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(u)\frac{f'(u)}{f(u)}\,du. \tag{6}$$

Заметив, что

$$-\ln f(u) = G(u;\ z) + iH(u;\ z),$$

где H — функция, сопряженная с G, получим, что на контуре области

$$\frac{f'(u)}{f(u)}du = \frac{d\ln f(u)}{ds}ds = -\left[\frac{\partial G}{\partial s} + i\frac{\partial H}{\partial s}\right]ds = -i\frac{\partial H}{\partial s}ds, \tag{a}$$

так как $G = 0$ на контуре и, следовательно, $\frac{\partial G}{\partial s} = 0$. Из условий Коши-Римана следует

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\partial G}{\partial n},$$

где n — направление внутренней нормали, а s — направление касательной. Таким образом на контуре

$$\frac{f'(u)}{f(u)}du = i\frac{\partial G}{\partial n}ds \tag{b}$$

и окончательно формула (6) примет вид:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C \varphi(u)\frac{\partial G(u;\ z)}{\partial n}ds. \tag{7}$$

Обозначая действительную часть функции $\varphi(z)$ через $P(z)$, получаем

$$P(z) = \frac{1}{2\pi}\int_C P(u)\frac{\partial G(u;\ z)}{\partial n}ds. \tag{8}$$

Последнее соотношение носит название *формулы Грина*.

§ 5. Интеграл Пуассона (Poisson)

n° 1. В дальнейшем нас будет интересовать частный случай последней формулы (8), когда C есть окружность с центром в начале координат радиуса R. Построив функцию $f(u) = \frac{(u-z)R}{R^2 - u\bar{z}}$, мы видим, что функция Грина в этом случае будет

$$G(u;\ z) = -\ln\left|\frac{(u-z)R}{R^2 - u\bar{z}}\right| = \ln\left|\frac{R^2 - u\bar{z}}{R(u-z)}\right|. \tag{9}$$

Так как $\ln f(u) = \ln R + \ln(u-z) - \ln(R^2 - u\bar{z})$, то в силу формулы (b)

$$\frac{\partial G}{\partial n}ds = \frac{1}{i}\frac{f'(u)}{f(u)}du = \frac{1}{i}\frac{du}{u-z} + \frac{1}{i}\frac{\bar{z}\,du}{R^2 - u\bar{z}}.$$

---

[1]) При этом выводе предполагается, что $f_1'(u)$ непрерывна в области $\bar{D}$, что выполняется для гладких кривых C.

Полагая $u=Re^{i\theta}$, $z=\rho e^{i\varphi}$, $du=Rie^{i\theta}d\theta$, найдем

$$\frac{\partial G}{\partial n}ds=\frac{Rd\theta}{R-\rho e^{i(\varphi-\theta)}}+\frac{\rho e^{i(\theta-\varphi)}d\theta}{R-\rho e^{i(\theta-\varphi)}}=\frac{(R^2-\rho^2)\,d\theta}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу Грина (8), получим

$$P(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(Re^{i\theta})\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}d\theta. \tag{10}$$

Эта формула носит название *интеграла Пуассона*. Она получена в предположении, что $P(z)$ есть гармоническая функция в круге $|z|\leqslant R$.

В частном случае при $z=0$ интеграл Пуассона примет вид:

$$P(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(Re^{i\theta})\,d\theta, \tag{11}$$

т. е. *значение гармонической функции в центре круга равно среднему арифметическому ее значений на окружности*. Это свойство установлено впервые Гауссом (Gauss).

n° 2. Функция $U(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_p$, $p\geqslant 2$, называется гармонической в области D пространства p-измерений, если она однозначна, имеет непрерывные частные производные первых двух порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 U}{\partial x_p^2}=0$$

в области D.

Считая шар $\overline{OP}\leqslant R$ принадлежащим области D, выведем формулу Пуассона для представления гармонической функции во всякой точке P, внутренней к шару, в зависимости от значений функции на поверхности шара. С этой целью будем отправляться от известной из анализа формулы Грина

$$\int_S\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma=0, \tag{12}$$

где интегрирование распространяется по поверхности S области, в которой функции U и V гармонические.

Пусть $A(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ любая точка, внутренняя шару $\overline{OP}<R$, и $r=\overline{AP}$ расстояние от точки A до переменной точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$; будем предполагать $p>2$. Обозначим через σ поверхность сферы $\overline{OP}=R$, а через s — поверхность достаточно малой сферы с центром в точке A, целиком расположенной внутри шара $\overline{OP}<R$. Применяя соотношение (12) к функциям U и $V=\frac{1}{r^{p-2}}$, гармоническим в двухсвязной области, ограниченной поверхностями σ и s, получим

$$\int_s\left(U\frac{\partial\frac{1}{r^{p-2}}}{\partial n}-\frac{1}{r^{p-2}}\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds=-\int_\sigma\left(U\frac{\partial\frac{1}{r^{p-2}}}{\partial n}-\frac{1}{r^{p-2}}\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma, \tag{13}$$

где n есть нормаль, внешняя для s и внутренняя для σ. Заметив, что $\int\limits_s \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0$ вследствие гармоничности функции U и, что r — величина, постоянная на сфере s, перепишем левую часть последнего соотношения в виде

$$-\frac{p-2}{h^{p-1}} \int\limits_s U ds,$$

где h — радиус сферы s.

Так как площадь поверхности s шара есть $p \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} h^{p-1}$, то в пределе, при $h \to 0$, левая часть равенства (13) будет равна

$$-(p-2) \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} p U_A.$$

После этих замечаний соотношение (13) примет вид:

$$(p-2) \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} p U_A = \int\limits_\sigma \left(U \frac{\partial \frac{1}{r^{p-2}}}{\partial n} - \frac{1}{r^{p-2}} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma. \qquad (14)$$

Чтобы исключить из формулы (14) производную $\frac{\partial U}{\partial n}$, напомним элементарное свойство сферы. Точка A_1 называется сопряженной с точкой A относительно сферы σ, если она лежит на диаметре $\overline{OA}$ и $\overline{OA} \cdot \overline{OA_1} = R^2$.

Отношение расстояний любой точки P сферы σ от двух сопряженных точек A и A_1 есть величина постоянная, причем имеем

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PA_1}} = \frac{\overline{OA}}{R}.$$

Обозначим через $r_1 = \overline{A_1 P}$ расстояние переменной точки P от точки A_1 и применим соотношение (12) к функциям U и $\frac{1}{r_1^{p-2}}$ гармоническим в шаре $\overline{OP} \leqslant R$. Тогда получим

$$0 = \int\limits_\sigma \left(U \frac{\partial \frac{1}{r_1^{p-2}}}{\partial n} - \frac{1}{r_1^{p-2}} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Положим $\overline{OA} = l$ и $\overline{OA_1} = l_1$; затем умножим последнее равенство на $\left(\frac{R}{l}\right)^{p-2}$ и вычтем из (14). Так как на сфере

$$\frac{1}{r^{p-2}} = \left(\frac{R}{l}\right)^{p-2} \frac{1}{r_1^{p-2}},$$

то в результате найдем

$$(p-2)\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}pU_A=\int\limits_{\sigma} U\left[\frac{\partial\frac{1}{r^{p-2}}}{\partial n}-\left(\frac{R}{l}\right)^{p-2}\frac{\partial\frac{1}{r_1^{p-2}}}{\partial n}\right]d\sigma. \quad (15)$$

Предыдущий искусственный прием нам позволил исключить $\frac{\partial U}{\partial n}$ и выразить U_A с помощью значений функций U на сфере σ.

Произведем теперь вычисление предыдущего выражения. Количество, стоящее между скобками под знаком интеграла, может быть представлено в виде

$$(p-2)\left[\frac{1}{r^{p-1}}\cos(r,n)-\left(\frac{R}{l}\right)^{p-2}\frac{1}{r_1^{p-1}}\cos(r_1,n)\right].$$

Пусть $\varphi=(r,n)=\widehat{OPA}$, $\varphi_1=(r_1,n)=\widehat{OPA_1}$.

Из треугольников OPA и OPA_1 находим

$$l^2=R^2+r^2-2Rr\cos\varphi, \quad l_1^2=R^2+r_1^2-2Rr_1\cos\varphi_1.$$

Наконец образуем выражение

$$\frac{\cos\varphi}{r^{p-1}}-\left(\frac{R}{l}\right)^{p-2}\frac{\cos\varphi_1}{r_1^{p-1}}=\frac{R^2-l^2}{Rr^p},$$

вспомнив, что $ll_1=R^2$ и $\frac{r}{r_1}=\frac{l}{R}$.

Таким образом формула (15) по сокращении на $p-2$ примет вид:

$$\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}pU_A=\int\limits_{\sigma} U\frac{R^2-l^2}{Rr^p}d\sigma;$$

полагая $\sigma=\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}pR^{p-1}$, получим

$$U_A=\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} U(P)\frac{R^{p-2}(R^2-\overline{OA}^2)}{\overline{AP}^p}d\sigma. \quad (16)$$

Формула (16) носит название *интеграла Пуассона.* Она была выведена в предположении $p>2$. В случае $p=2$ мы имеем формулу (10), которую возможно переписать в виде:

$$U_A=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\sigma} U(P)\frac{(R^2-\overline{OA}^2)}{\overline{AP}^2}d\sigma.$$

Сравнивая последнее соотношение с (16), мы видим, что формула (16) справедлива и при $p=2$.

В частном случае при $A=O$ интеграл Пуассона (16) примет вид:

$$U(O)=\frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sigma} U(P)\,d\sigma, \quad (17)$$

т. е. *значение гармонической функции в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на сфере.*

Это свойство установлено Гауссом.