

Р. Форд Лестер

Автоморфные функции

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84
Р11

Р11 **Р. Форд Лестер**
Автоморфные функции / Р. Форд Лестер – М.: Книга по Требованию, 2024. – 338 с.

ISBN 978-5-521-28547-1

ISBN 978-5-521-28547-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Глава IV

Автоморфные функции

Стр.

§ 39. Понятие автоморфной функции .	92
§ 40. Простые автоморфные функции	95
§ 41. Поведение в вершинах и в параболических точках	97
§ 42. Полюсы и нули	100
§ 43. Алгебраические соотношения .	104
§ 44. Дифференциальные уравнения .	107

Глава V

Тэта-ряд Пуанкаре

§ 45. Тэта-ряд	111
§ 46. Сходимость ряда	113
§ 47. Сходимость тэта ряда для фуксовой группы второго рода	115
§ 48. Некоторые свойства тэта-функции	117
§ 49. Нули и полюсы тэта-функций	121
§ 50. Ряды и произведения, связанные с группой .	125

Глава VI

Элементарные группы

I. Конечные группы	127
§ 51. Инверсия относительно сферы	127
§ 52. Стереографическая проекция	130
§ 53. Вращение сферы	131
§ 54. Группы правильных многогранников	133
§ 55. Исследование куба	134
§ 56. Правильный многогранник. Общий случай	137
§ 57. Определение всех конечных групп	140
§ 58. Расширенные группы	146
II. Группы с единственной предельной точкой	149
§ 59. Одно- и двоякопериодические группы	149
§ 60. Группы, связанные с периодическими группами	151
§ 61. Автоморфные функции	155
III. Группы с двумя предельными точками	158
§ 62. Определение группы	158

Глава VII

Эллиптические модулярные функции

§ 63. Некоторые результаты из теории эллиптических функций .	160
§ 64. Замена примитивных периодов	162
§ 65. Функция $J(\tau)$	163
§ 66. Поведение $J(\tau)$ в параболических точках .	165
§ 67. Другие свойства функции $J(\tau)$.	167
§ 68. Функция $\lambda(\tau)$	169
§ 69. Соотношение между функциями $\lambda(\tau)$ и $J(\tau)$	171
§ 70. Дальнейшие свойства $\lambda(\tau)$	172

Глава VIII

Конформное отображение

§ 71. Конформное отображение	176
§ 72. Лемма Шварца . .	177
§ 73. Теоремы площадей	179
§ 74. Об отображении круга на конечную однолистную область	182
§ 75. Теорема искажения для круга .	185
§ 76. Общая теорема искажения	189
§ 77. Об одном приложении интеграла Пуассона	191

	Стр.
§ 78. Об отображении однолистной односвязной области на круг. Процесс итерации	194
§ 79. Доказательство сходимости	197
§ 80. Поведение отображающей функции на границе области	202
§ 81. Области, ограниченные жордановыми кривыми	214
§ 82. Аналитические дуги и продолжение отображающей функции через границу области	217
§ 83. Границы, содержащие дуги окружности	218
§ 84. Отображение комбинированных областей	219
§ 85. Отображение предельной области	221
§ 86. Отображение односвязной области с конечным числом листов	229
§ 87. Конформное отображение и группы линейных преобразований	233

Глава IX

Униформизация. Элементарные и фуксовы функции

§ 88. Идея униформизации	236
§ 89. О связности областей	237
§ 90. Алгебраические функции нулевого жанра. Униформизация посредством рациональных функций	246
§ 91. Алгебраические функции жанра, большего, чем нуль. Униформизация посредством автоморфных функций	249
§ 92. Жанр фундаментальной области группы	255
§ 93. Случай, когда $p=1$ и когда $p>1$	256
§ 94. Униформизирующие фуксовы функции более общего вида	258
§ 95. Униформизация в случае $p=0$	261
§ 96. Группы Уайттекера	264
§ 97. Трансцендентные функции	266

Глава X

Униформизация. Группы типа Шоттки

§ 98. Области плоского характера	273
§ 99. Некоторые вспомогательные функции	275
§ 100. Отображение многосвязной области плоского характера на область с разрезами	279
§ 101. Приложение к униформизации алгебраических функций	284
§ 102. Теорема сходимости	285
§ 103. Последовательность отображающих функций	289
§ 104. Линейность преобразования T_n	292
§ 105. Обобщение	296
§ 106. Отображение многосвязной области плоского характера на область, ограниченную полными окружностями	298

Глава XI

Дифференциальные уравнения

§ 107. Связь с группами линейных преобразований	303
§ 108. Функция, обратная частному двух интегралов	306
§ 109. Правильные особые точки дифференциального уравнения	312
§ 110. Поведение частного двух интегралов в окрестности правильной особой точки	316
§ 111. Уравнения с рациональными коэффициентами	319
§ 112. Уравнение с двумя особыми точками	323
§ 113. Гипергеометрическое уравнение	323
§ 114. Функции Римана-Шварца	326
§ 115. Уравнения с алгебраическими коэффициентами	329
Библиография по автоморфным функциям	331

Глава I

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Линейное преобразование. Пусть z и z' два комплексных числа, связанных некоторой функциональной зависимостью: $z' = f(z)$. Условимся значения z изображать обычным способом на диаграмме Арганда, или плоскости z , и значения z' на другой диаграмме Арганда, или плоскости z' . Каждой точке z первой плоскости, в которой определена функция, соответствует в силу функциональной зависимости одно или несколько значений z' . Точкам, кривым и областям на плоскости z обычно соответствуют точки, кривые и области на плоскости z' . Мы будем говорить, что фигуры на плоскости z преобразуются через посредство функциональной зависимости в соответствующие фигуры на плоскости z' . Удобней изображать z и z' на одной и той же диаграмме Арганда, чем на двух различных. Таким образом фигуры на плоскости z переходят через посредство функциональной зависимости в другие фигуры на той же плоскости z . В дальнейшем всегда, если не оговорено противоположное, используется одна плоскость.

Вся теория автоморфных функций связана со специальным типом преобразования, определяемым следующим образом:

О п р е д е л е н и е. Преобразование

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1)$$

где a, b, c, d — постоянные и $ad - bc \neq 0$, называется *линейным преобразованием* ¹⁾.

Настоящая глава посвящена изучению этого основного преобразования.

Величина $ad - bc$ называется *детерминантом* преобразования. Удобно всегда предполагать

$$ad - bc = 1. \quad (2)$$

В общем случае детерминант может быть сделан равным единице путем деления числителя и знаменателя дроби

¹⁾ Оно более точно называется „дробно-линейным преобразованием“, но мы будем пользоваться более коротким названием. Это преобразование называется также „гомографическим преобразованием“.

Если $ad - bc = 0$, то уравнение приводится к $z' = \text{const.}$; но этот случай конечно, не представляет интереса.

на $\pm \sqrt{ad - bc}$. Правая часть (1) есть аналитическая функция z , и поэтому линейное преобразование обладает свойством конформности. Это значит, что при преобразовании фигуры углы сохраняют как величину, так и направление.

Заметим, что в уравнении (1) каждому значению z соответствует одно и только одно значение z' . Это утверждение будет справедливо во всех случаях, если мы введем в рассмотрение и бесконечно удаленную точку. Таким образом, если $c \neq 0$, то $z = -\frac{d}{c}$ преобразуется в $z' = \infty$ и $z = \infty$ в $z' = \frac{a}{c}$; если $c = 0$, то $z = \infty$ преобразуется в $z' = \infty$.

Разрешим уравнение (1) относительно z :

$$z = \frac{-dz' + b}{cz' - a}. \quad (3)$$

Это преобразование, которое, будучи выполнено вслед за преобразованием (1), возвращает каждую фигуру в ее первоначальное положение, называется *обратным* преобразованием (1).

Заметим, что (3) есть линейное преобразование; отсюда:

ТЕОРЕМА 1. *Преобразование, обратное линейному, есть линейное преобразование.*

Заметим, что (3) можно получить из (1), переменив местами a и d и изменив их знаки на обратные. Таким образом детерминант (3) будет тот же, что и (1).

Из (3) видно, что каждому значению z' соответствует одно и только одно значение z . Таким образом получаем следующий результат:

ТЕОРЕМА 2. *Линейное преобразование переводит плоскость одно-однозначно в самое себя.*

Линейное преобразование есть самое общее аналитическое преобразование, обладающее свойством, указанным в теореме 2.

Докажем сначала следующую теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Если вся плоскость, за исключением (может быть) конечного числа точек, отображается одно-однозначно и конформно на плоскую область, то отображающая функция линейна.*

Пусть $z' = f(z)$ есть отображающая функция и пусть $q_1, q_2, \dots, q_n$ — исключенные точки. Вследствие конформности отображения $f(z)$ аналитична всюду, кроме изолированных точек $q_1, q_2, \dots, q_n$. Точка q_i не может быть существенно особой, иначе существовали бы значения, принимаемые функцией бесконечно много раз в окрестности q_i , что противоречило бы условию. Поэтому $f(z)$ или остается конечной в окрестности q_i и, следовательно, аналитична в q_i , если ее там соответствующим образом определить, или имеет полюс. Таким образом $f(z)$ есть рациональная функция z .

Рациональная функция, не являющаяся константой, принимает каждое значение m раз, где m есть число ее полюсов. Так как $f(z)$ не принимает ни одного значения дважды, то она имеет один

полюс первого порядка. Если полюс q_k не есть бесконечно удаленная точка, то мы можем написать

$$z' = \frac{A_1}{z - q_k} + A_0 = \frac{A_0 z + A_1 - A_0 q_k}{z - q_k}, \quad A_1 \neq 0. \quad (4)$$

Если полюс есть бесконечно удаленная точка, то

$$z' = A_1 z + A_0, \quad A_1 \neq 0. \quad (4')$$

В обоих случаях функция линейна.

Следствие 1. *Наиболее общее одно-однозначное и конформное (там, где понятие конформности имеет смысл) преобразование плоскости в самое себя есть линейное преобразование.*

Мы не определили конформности для случая, когда одна из точек бесконечно удаленная. Всюду, за исключением $z = \infty$ и точки плоскости z , которая переходит в $z' = \infty$, преобразование должно быть конформным. Теорема 3 приложима.

Следствие 2. *Наиболее общее одно-однозначное и конформное преобразование конечной плоскости (без бесконечно удаленной точки) в самое себя есть линейное преобразование:*

$$z' = A_1 z + A_0.$$

Теперь мы рассмотрим результаты последовательного применения линейных преобразований. Пусть после применения к плоскости z преобразования (1) сделано второе линейное преобразование:

$$z'' = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}. \quad (5)$$

Представляя z'' как функцию z , получаем:

$$z'' = \frac{\alpha \frac{az + b}{cz + d} + \beta}{\gamma \frac{az + b}{cz + d} + \delta} = \frac{(\alpha a + \beta c)z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)z + \gamma b + \delta d} \quad (6)$$

Два последовательно выполненных преобразования (1) и (5) равносильны одному преобразованию (6). Но (6) есть линейное преобразование. Пользуясь полученным для него выражением, заключаем, что его детерминант равен

$$(ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma).$$

Важно заметить, что если каждый из детерминантов (1) и (5) равен единице, то детерминант преобразования (6) тоже равен единице.

Выполняя линейное преобразование над z'' , заключаем, сочетая это новое преобразование с (6), что три последовательных линейных преобразования равносильны одному линейному преобразованию и т. д.

Таким образом мы приходим к следующему результату:

ТЕОРЕМА 4. Конечное число последовательно выполненных линейных преобразований равносильно одному линейному преобразованию.

Следующая теорема выражает хорошо известное свойство линейного преобразования.

ТЕОРЕМА 5. Линейное преобразование сохраняет инвариантным ангармоническое отношение четырех точек.

Пусть даны четыре различных точки: z_1, z_2, z_3, z_4 и пусть z_1', z_2', z_3', z_4' — четыре точки, в которые переходят первые посредством преобразования (1). Допустим, что все точки расположены в конечной части плоскости.

Имеем:

$$\begin{aligned} z_1' - z_2' &= \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} = \\ &= \frac{z_1 - z_2}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)}; \end{aligned} \quad (7)$$

поэтому

$$\frac{(z_1' - z_2')(z_3' - z_4')}{(z_1' - z_3')(z_2' - z_4')} = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}. \quad (8)$$

Если одна из точек лежит в бесконечности, то мы получим необходимое изменение соотношения (8), пользуясь предельным переходом.

Так, если $z_2 = \infty$ и $z_1' = \infty$, то (8) принимает вид:

$$\frac{z_3' - z_4'}{z_2' - z_4'} = - \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_3}$$

§ 2. Символическое обозначение. Для того чтобы достигнуть сокращения письма и удобства в комбинировании преобразований, мы будем пользоваться для обозначения правой части преобразования (1) знаком функциональной операции, употребляя в качестве знаков функциональных операций большие буквы; таким образом

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

так что (1) принимает вид:

$$z' = T(z).$$

Мы будем говорить в дальнейшем о преобразовании T , не упоминая, если только в связи с этим не возникнут недоразумения, об аргументе z . Если два преобразования одинаковы: $T_1(z) \equiv T(z)$, то мы будем это выражать посредством равенства: $T_1 = T$.

Обозначим буквой S преобразование (5), тогда

$$z'' = S(z').$$

Отсюда для (6) получим:

$$z'' = S[T(z)] = ST(z).$$

Таким образом результат двух последовательно выполненных преобразований записывается как произведение, причем опускаются внутренние скобки в обозначении функции. Важно заметить, что ST есть одно линейное преобразование, дающее тот же результат, как если бы сначала было выполнено преобразование T , за ним преобразование S ; порядок выполнения преобразований: справа налево.

Вообще говоря, TS и ST различны.

Непосредственно из значения символов следует, что для умножения имеет место ассоциативный закон:

$$U(ST) = (US)T,$$

и поэтому не может вызвать недоразумений запись UST . В произведении любая группа множителей может быть заменена одним линейным преобразованием. Преобразования, равносильные двукратно, трехкратно и т. д. выполненному преобразованию T , мы будем обозначать через T^2, T^3 и т. д. Таким образом T^2 означает $T[T(z)]$. Преобразование, обратное T , обозначим через T^{-1} . Таким образом из (3):

$$T^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}.$$

Результат n -кратного выполнения преобразования T^{-1} условимся обозначать через T^{-n} .

Обозначая тождественное преобразование $z' \equiv z$ через 1 так, что $1(z)$ означает z , мы убеждаемся, что положительные и отрицательные целые степени T вместе с 1 сочетаются в соответствии законом о сложении показателей при умножении степеней.

Теперь мы можем написать преобразование, обратное результату нескольких последовательно выполненных преобразований. Для того чтобы найти преобразование, обратное к ST , применим к плоскости, преобразованной с помощью ST , сначала преобразование S^{-1} , а вслед за ним T^{-1} , мы получим:

$$(T^{-1}S^{-1})(ST) = T^{-1}(S^{-1}S)T = T^{-1}T = 1.$$

Таким образом $T^{-1}S^{-1}$ есть преобразование, которое, будучи применено после ST , возвращает каждую точку плоскости в ее исходное положение; следовательно, $T^{-1}S^{-1}$ есть преобразование, обратное по отношению к ST . Подобно этому для любого числа преобразований получаем:

$$(ST \dots UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1} \dots T^{-1}S^{-1}.$$

Легко видеть также, как нужно пользоваться множителями при делении. Пусть

$$UST = V,$$

тогда

$$(UST)T^{-1} = VT^{-1} \quad \text{или} \quad US = VT^{-1};$$

$$U^{-1}(UST) = U^{-1}V \quad \text{или} \quad ST = U^{-1}V.$$

Таким образом в уравнении, связывающем два произведения, первый (последний) множитель левой части может быть перенесен в начало (в конец) правой части с измененным на обратный знак показателя. Таким образом символическое деление допустимо, если точно соблюдается порядок выполнения операций. Например, W преобразование, обратное $ST \quad UV$, есть такое преобразование, что

$$WST \dots UV = 1.$$

Производя деление справа, получим уже известный нам результат.

§ 3. Неподвижные точки преобразования. Неподвижные точки преобразования (1) можно найти, полагая в (1) $z' = z$ и решая уравнение:

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \text{ или } cz^2 + (d - a)z - b = 0. \quad (9)$$

Предположим сначала, что $c \neq 0$. Тогда уравнение (9) имеет два корня:

$$\xi_1, \xi_2 = \frac{a - d \pm \sqrt{M}}{2c}, \quad (10)$$

где

$$M = (d - a)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4. \quad (11)$$

Второе выражение для M получаем, пользуясь равенством: $ad - bc = 1$.

Из (1) следует, что ∞ не переходит сама в себя, так что в этом случае имеется не более двух неподвижных точек. Если $M = 0$, т. е. если $a + d = \pm 2$, то существует только одна неподвижная точка:

$$\xi = \frac{a - d}{2c}. \quad (12)$$

Если $c = 0$, то обязательно $a \neq 0$, $d \neq 0$, так как иначе был бы равен нулю детерминант. Мы видим из (1), что в этом случае ∞ есть неподвижная точка. Если $a \neq d$, то, решая (9), определяем неподвижную точку, лежащую на конечном расстоянии. Неподвижные точки будут:

$$\xi_1 = \frac{b}{d - a}; \quad \xi_2 = \infty. \quad (13)$$

Если $c = 0$ и $d = a$, то (1) имеет вид:

$$z' = z + b$$

и представляет собой перенос с единственной неподвижной точкой $\xi = \infty$. Итак, в случае, когда $c = 0$, попрежнему существуют две неподвижные точки, если $M \neq 0$, и одна неподвижная точка, если $M = 0$.

Преобразование (1) не может иметь более двух неподвижных точек при условии, что (9) не есть тождественный нуль; если (9)

есть тождественный нуль, то $c = 0$, $d = a$ и $b = 0$. Уравнение (1) в этом случае имеет вид:

$$z' = z.$$

Следовательно:

ТЕОРЕМА 6. Единственное линейное преобразование, имеющее более двух неподвижных точек, есть тождественное преобразование $z' = z$.

Пользуясь этим фактом, можно доказать следующее важное предложение:

ТЕОРЕМА 7. Существует одно и только одно линейное преобразование, переводящее три различных точки z_1, z_2, z_3 в три различных точки z_1', z_2', z_3' .

Во-первых, докажем, что такое преобразование единственно. Предположим, что существуют два различных преобразования T и S , переводящих z_1, z_2, z_3 в z_1', z_2', z_3' . Рассмотрим преобразование $T^{-1}S$. Так как $S(z_1) = z_1'$ и $T^{-1}(z_1') = z_1$, то

$$T^{-1}S(z_1) = T^{-1}(z_1') = z_1.$$

Отсюда z_1 и точно так же z_2 и z_3 являются неподвижными точками преобразования $T^{-1}S$. Из теоремы (6) вытекает, что

$$T^{-1}S = 1.$$

Выполняя преобразование T над обеими частями этого равенства, получим:

$$S = T.$$

Таким образом существует самое большее одно преобразование, удовлетворяющее условию теоремы. Мы докажем, что такое преобразование всегда существует, построив его.

Предположим, что все шесть величин конечны, и рассмотрим преобразование, определенное уравнением:

$$\frac{(z' - z_1')(z_2' - z_3')}{(z' - z_2')(z_1' - z_3')} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_2)(z_1 - z_3)}. \quad (14)$$

Мы получим преобразование вида (1), выразив z' через z . Оно переводит z_1, z_2, z_3 в z_1', z_2', z_3' , так как обе части (14) обращаются в нуль, когда $z = z_1$ и $z' = z_1'$; они обе обращаются в бесконечность, когда $z = z_2$ и $z' = z_2'$, и они обе равны единице, когда $z = z_3$ и $z' = z_3'$.

Если одна из заданных точек есть бесконечно удаленная, нам достаточно заменить ту часть соотношения (14), в которую входит бесконечность, предельным значением этой части, получающимся, если считать нашу точку подвижной и уходящей в бесконечность. Если $z_1 = \infty$ или $z_2 = \infty$, или $z_3 = \infty$, то мы заменим правую часть (14) соответственно: $-\frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$, $-\frac{z - z_1}{z_1 - z_3}$, $\frac{z - z_1}{z - z_3}$; аналогичные изменения обязательны в левой части, если одна из величин z_1', z_2', z_3' есть бесконечность.

Итак, всегда получаем одно преобразование, обладающее требуемым свойством, и теорема доказана.

Уравнением (14) удобно пользоваться для построения преобразования, переводящего три заданных точки в другие три заданных точки. Теоремой (7) мы будем часто пользоваться в нашем последующем изложении; для доказательства тождественности двух преобразований достаточно доказать, что они одинаково преобразуют три точки.

§ 4. Линейное преобразование и окружность. Так как мы оперируем комплексной величиной z , то представляется удобным выражать уравнения кривых через z . Если x действительная часть z и iy его мнимая часть, то, обозначив через $\bar{z}$ комплексное число, сопряженное z , получим:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad (15)$$

отсюда

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{i}{2}(\bar{z} - z), \quad z\bar{z} = x^2 + y^2. \quad (16)$$

С помощью первых двух уравнений (16) можно легко написать уравнение любой кривой, пользуясь непосредственно z и $\bar{z}$.

Напишем общее уравнение окружности и прямой линии. Уравнение

$$A(x^2 + y^2) + b_1x + b_2y + C = 0,$$

в котором коэффициенты суть действительные числа, есть общее уравнение окружности в случае $A \neq 0$ (радиус которой может быть мнимым или равным нулю) и есть уравнение прямой в случае $A = 0$, если только b_1 и b_2 не равны одновременно нулю.

Пользуясь (16), получаем:

$$Az\bar{z} + \frac{1}{2}(b_1 - ib_2)z + \frac{1}{2}(b_1 + ib_2)\bar{z} + C = 0.$$

Полагая

$$B = \frac{1}{2}(b_1 - ib_2),$$

получаем:

$$Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0, \quad (17)$$

где A и C — действительные числа.

Если $A \neq 0$, то уравнение (17) есть общее уравнение окружности; в случае, если $A = 0$, но $B \neq 0$, — уравнение прямой.

Негрудно определить центр и радиус окружности. Представляя (17) в виде

$$\left(z + \frac{\bar{B}}{A}\right) \left(\bar{z} + \frac{B}{A}\right) = \frac{B\bar{B} - AC}{A^2},$$