

**Житомирский О.К, Львовский В.Д.,
Милинский В.И.**

Задачи по высшей геометрии

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Ж74

Ж74 **Житомирский О.К**
Задачи по высшей геометрии / Житомирский О.К, Львовский В.Д., Милинский В.И. – М.: Книга по Требованию, 2021. – 303 с.

ISBN 978-5-458-26335-1

Классический задачник по аналитической геометрии, на котором выросло не одно поколение студентов.

ISBN 978-5-458-26335-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ВВЕДЕНИЕ.

Предмет *Analysis situs* составляет изучение инвариантных свойств пространств относительно гомеоморфизма. Гомеоморфизмы называются пространствами, если между ними возможно установление одно-однозначного и взаимно непрерывного соответствия. Первой книгой, посвященной *Analysis situs*, была работа Листинга „Предварительные исследования по топологии“, изданная в Геттингене в 1848 г. (в 1932 г. перевод ее вышел в ГТТИ). В ней Листинг определял *Analysis situs* как учение о законах связи, расположении и последовательности точек, линий, поверхностей, тел и их частей в пространстве, независимо от метрических соображений, отвлекаясь от взаимных расстояний и размеров рассматриваемых объектов. Предметом *Analysis situs* или топологии (уместно сказать, что термин „топология“ был введен Листингом) с его точки зрения было изучение качественных свойств геометрических образов — *kalkulatorische Bearbeitung der modalen Seite der Geometrie*.

Эти нечеткие и расплывчатые концепции Листинга были впоследствии уточнены Клейном, определившим топологию в общих терминах теории групп и тем самым установившим ее место в ряду геометрических дисциплин; предмет топологии по Клейну составляло изучение свойств пространственных объектов, инвариантных относительно группы всех непрерывных преобразований пространства (Эрлангенская программа, 1872).

Работы по отдельным вопросам топологии появились гораздо раньше, так в 1736 г. Эйлер дал решение задачи „о кенигсбергских мостах“¹⁾: спрашивалось, можно ли последовательно пройти все семь мостов через Прегель, проходя через каждый только по разу? В 1752 г. им была выведена известная формула²⁾ для многогранников, составляющая содержание одной из основных теорем *Analysis situs*. Современный период топологии открывается работами Пуанкаре — „*Analysis situs*“ (*Journ. de l'Es. polyt.*) и пятью дополнениями, положившими основу алгебраической топологии; развитие топологии в других направлениях было дано работами Римана, Бетти, Мёбиуса, Дика, Тэта и др.

В 1907 г. была закончена для немецкой математической энциклопедии статья Дена и Хээгода, подводившая итоги тогдашнего состояния топологии. По Дену и Хээгоду объекты *Analysis situs* аксиоматически строились из конечного числа элементарных объектов, называемых точками,

¹⁾ Petrop. Comment. 8, 1741, стр. 128.

²⁾ Petrop. Novi Comment. 4, 1752—53, стр. 109.

отрезками, двумерными кусками и т. д. Введение внутреннего преобразования, состоящего в разбиении элементарных объектов на части (отрезка AB , введением точки C , на два отрезка AC и BC , и т. д.), позволяет совершать переходы от одного геометрического объекта к другому. Топологический объект, согласно такой аксиоматики, вполне определяется заданием составляющих его элементарных объектов и законом их соединения, например комбинаторная схема, дающая закон соединения точек, отрезков и двумерных кусков вида

$$\{P_0^1, P_0^2, P_0^3, P_0^4; S_1^{12}, S_1^{23}, S_1^{34}, S_1^{41}, S_1^{13}, S_1^{24}, S_2^{(12)(23)(34)(41)}, S_3^{(12)(24)(43)(31)}\},$$

представляет так называемую ленту Мёбиуса; здесь схема состоит из четырех точек P_0^1, P_0^2, P_0^3 и P_0^4 , шести отрезков S_1^{ik} , соединяющих точки P_0^i и P_0^k и по определению не имеющих других общих точек, и наконец двух двумерных кусков, ограниченных четырехсторонниками. По Дену и Хээгду, комбинаторная топология в такой трактовке представляет отдел комбинаторики, имеющий геометрическую интерпретацию, и в этом отношении есть самый первоначальный отдел геометрии, в котором все не используется понятие предельного перехода, где все конечно.

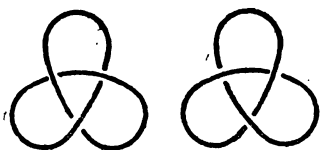


Рис. 1.

Гомеоморфными по Дену будут комплексы, которые внутренними преобразованиями или даже просто изменением обозначений можно привести к тождественному виду. Гомеоморфизмом характеризуются внутренние, собственные свойства геометрических объектов; свойства относительные характеризуются изотопией. Рассмотрим например в трехмерном пространстве

(E_3) два узла, изображенные в проекции на рис. 1; оказывается, что никакими непрерывными деформациями трехмерного пространства нельзя один преобразовать в другой¹⁾, другими словами: узлы не изотопны в E_3 . Изотопия в данном случае характеризует различное расположение рассматриваемых кривых в трехмерном пространстве. Наглядно выражаясь, можно высказаться следующим образом: комплексы в E_3 изотопны, если они превращаются друг в друга непрерывными деформациями изгиба, растяжения и сжатия без применения операции „прохождения сквозь“.

Деном введено также понятие гомотопии: две кривые гомотопны на поверхности, если непрерывными деформациями их на поверхности, причем они ее не покидают, достигается превращение одной в другую; аналогично строится гомотопия в пространстве — нетрудно убедиться на пример, что два узла, изображенные на рис. 1, гомотопны в E_3 .

Для комбинаторной аксиоматики Дена и Хээгда характерно рассмотрение элементарных объектов: точек, отрезков и т. д. как неопределимых вещей, о которых известно лишь то, что говорится о них в аксиомах. В этом отношении другая точка зрения проводится в Analysis situs, основанном на теории множеств; в так называемой теоретико-множе-

¹⁾ Dehn, Math. Ann. 75, 1914, стр. 402.

ственной топологии все геометрические объекты суть точечные множества и содержание топологии представляет по существу изучение свойств множеств и операций над ними, в частности над точечными множествами. Это направление в топологии прогрессировало весьма сильно в последнее время, обогнав по темпам развития комбинаторную топологию, причем приходится констатировать, что обе эти ветви *Analysis situs* в течение сравнительно долгого времени существовали изолированно друг от друга. В математической энциклопедии вопросу о взаимоотношениях различных направлений топологии посвящена специальная статья Тице—Вьеториса (1929).

За последние 15—20 лет работами главным образом американских ученых оформилось третье направление в топологии (Броуэр, Веблен, Александер, Лефшец и др.); в комбинаторную топологию здесь вносятся элементарно-геометрические методы и элементы теоретико-множественной топологии; это направление иногда называют „*méthode mixte*“.

В развитии теоретико-множественной топологии большое участие принимала московская школа топологов во главе с покойным Урысоном и проф. П. С. Александровым. В настоящее время в работах московской школы намечилось новое течение, направленное к синтезированию и взаимопроникновению всех ветвей топологии. Крупнейшим достижением на этом пути явилось построение геометрической теории размерности Александрова — Понтрягина — Хопфа. Следует думать, что плодотворное развитие топологии несомненно будет связано с целесообразным ассимилированием и использованием приемов и результатов всех направлений *Analysis situs*.

Отдел посвящается комбинаторной топологии, он распадается на следующие главы:

1) отрезочные комплексы, где в частности разбираются задачи на деревья, графы, задачи о красках и т. д.; 2) двумерные многообразия — глава, включающая задачи на ленты, гомотопные преобразования поверхностей, поверхности Римана, кривые на поверхностях, сечения поверхностей; главное внимание здесь, как и в дальнейшем, уделено многообразиям; 3) трехмерные многообразия — здесь помещены задачи на изотопию в пространстве, узлы, гомеоморфизмы, симметричные, римановы пространства, диаграммы и 4) вопросы n -мерной топологии, куда включен материал n -мерной топологии в самом элементарном разрезе, имея в виду лишь введение читателя в круг общих идей комбинаторной топологии.

Основные понятия одно-, дву- и трехмерной комбинаторной топологии, комплексы, многообразия, границы, ориентация, гомеоморфизм, гомотопия и изотопия здесь иллюстрируются на материале, представляемом различными примерами на основе чисто интуитивно-геометрического подхода. В последней главе всем примененным понятиям дана система определений, следуя *méthode mixte*. Приводимые литературные указания не претендуют на полноту.

В составлении материала для задач принимали участие члены Ленинградского топологического кружка, в частности А. А. Марков и Н. Н. Худеков.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Александров. Об основных направлениях современной топологии, Труды Московского математического съезда 1927 г., ГИЗ, 1927, стр. 65—89.
- 1a. Alexandroff. Einfachste Grendbegriffe der Topologie. Springer, 1932.
2. Франкль. Московская топологическая школа. „Естествознание и Марксизм“, 1929, № 4, стр. 169—188.
3. Kneser. Die Topologie der Mannigfaltigkeiten. Jahresber. d. D. M. V. **34**, 1925, стр. 1—14.
4. van der Waerden. Kombinatorische Topologie. Jahresber. d. D. M. V. **39**, 1930, стр. 121—139.
5. Dehn & Heegaard. Analysis situs. Math. Enz. B. III, 1, 1, стр. 153—220.
- Имеется полная библиография до 1907 г., при использовании результатов этой работы необходим критический подход.
6. Tietze & Vietoris. Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweige der Topologie. Math. Enz. B. III, 1, 2, стр. 145—238. (Обширная библиография до 1929 г.)
7. Veblen. Analysis situs. The Cambridge Colloquium, Part II, 1 ed. 1922, 2 ed. 1931.
8. Lefschetz. Topology. Am. Math. Soc. Colloquium publications vol. XII. 1930 (Имеется большая библиография).
9. Seifert & Threlfall. Lehrbuch der Topologie. Teubner, 1934. Единственный пока учебник по комбинаторной топологии. Перевод этой книги подготавливается в Москве к изданию.
10. Dehn. Topologie. Pascal-Repertorium der höheren Mathematik II, Geometrie, 2. Aufl. 1920, Kap. IX (Краткий элементарный очерк комбинаторной топологии).
11. Чеботарев. Курс топологии. Казань, 1932 (литограф).
12. Чеботарьев. Курс топологии. Київ—Харків, 1934. Представляет элементарное введение в комбинаторную топологию, частично использован Veblen I. c.
13. Рожанская и Степанов. Очерк развития топологии в СССР за 10 лет. Мат. сб., доп. том, 1928.
14. Рожанская и Степанов. Топология. „Математика в СССР за 15 лет“, ГТТИ, 1932, стр. 191—225 (имеется библиографический указатель в 103 номера).

ГЛАВА I.

ОТРЕЗОЧНЫЕ КОМПЛЕКСЫ.

Будем предполагать известными свойства евклидова трехмерного пространства (E_3); объекты наших рассуждений будем считать принадлежащими ему; использована нами будет собственно часть трехмерного пространства, ее можно себе представить внутренностью тетраэдра (трехмерным симплексом) или, если угодно, внутренностью сферы. Заниматься мы будем с самыми простыми геометрическими объектами и самыми простыми их геометрическими свойствами.

Пусть в E_3 дано конечное число a_0 точек $P^1, P^2, P^3, \dots, P^{a_0}$; пусть они попарно соединены произвольной конечной системой a_1 отрезков $S_1^1, S_1^2, S_1^3, \dots, S_1^{a_1}$; отрезки S_1^i необязательно следует представлять прямолинейными, они могут быть и криволинейными ¹⁾, но по определению принимаем, что они не имеют общих точек, кроме концов; две разные точки могут быть соединены более чем одним отрезком. Будем совокупность точек $\{P\}$ и отрезков $\{S_1\}$ называть отрезочным комплек-

¹⁾ Более точные не индуктивной природы определения даны в начале главы IV.

сом, если любая пара точек, принадлежащих $\{P\}$, может быть соединена отрезочным путем, принадлежащим $\{S_1\}$, т. е. последовательностью отрезков, тоже принадлежащих $\{S_1\}$ вида

$$(P^i P^{i_1}) (P^{i_1} P^{i_2}) \dots (P^{i_j} P^j) \quad (i \neq i_e \neq j), \quad (1)$$

где P^i и P^j — рассматриваемая пара точек. Отрезочный комплекс поэтому представляет связное множество. Отрезочный путь вида (1) есть также отрезочный комплекс; если в нем $P^i = P^j$, то такой комплекс называется одномерной сферой — окружностью, замкнутой кривой.

Пусть в E_3 даны: 1) конечное число α_0 точек $\{P\}$, 2) конечная совокупность α_1 отрезков $\{S_1\}$, соединяющих попарно точки совокупности $\{P\}$, 3) конечная совокупность α_2 двумерных кусков $\{S_2\}$, определяемых каждый одномерной сферой, составленной из отрезков совокупности $\{S_1\}$; эти одномерные сферы являются контурами или границами кусков; двумерные куски необязательно представлять плоскими, они могут быть и кривыми; по определению мы принимаем, что двумерные куски не имеют общих точек, линий или других частей, кроме точек и отрезков, принадлежащих их общим границам; одномерная сфера может быть общей границей более чем для одного двумерного куска. Будем совокупность точек $\{P\}$, отрезков $\{S_1\}$ и двумерных кусков $\{S_2\}$ называть двумерным комплексом, если совокупности $\{P\}$ и $\{S_1\}$ образуют отрезочный комплекс; последнее условие обеспечивает связность комплекса.

Частный случай двумерных комплексов составляют замкнутые двумерные многообразия — замкнутые поверхности. Примерами их могут быть поверхности шара, тора и др. Более подробно о них сказано в главе II. Здесь мы займемся главным образом различными понятиями, характеризующими как собственные свойства комплекса, так и несобственные, связанные с тем или иным расположением комплекса C_1 в E_3 .

Порядком комплекса называется число его вершин (точек) α_0 ; порядком точки называется число отрезков, сходящихся в ней.

Если расположить комплекс на замкнутой поверхности, то на ней комплекс выделит части поверхности — области, ограничиваемые его отрезками. Пусть α_0 , α_1 и α_2 соответственно числа точек, отрезков и областей, получаемых от комплекса на поверхности.

Род комплекса есть род поверхности (см. определение рода поверхности в главе II), на которой можно без пересечений расположить комплекс.

Пусть комплекс C_1 на поверхности имеет числа α_0 , α_1 и α_2 , тогда комплекс C'_1 , у которого $\alpha'_0 = \alpha_2$, $\alpha'_1 = \alpha_1$ и $\alpha'_2 = \alpha_0$, называется обратным C_1 .

Ранг комплекса есть наименьшее число классов, на которые разбиваются точки комплекса так, чтобы смежные точки (концы одного отрезка) были разных классов.

Однородный комплекс с точками одного порядка называется графом. Степенью графа называется порядок ее вершин; например

графа кубична, если в точках ее сходятся три отрезка, т. е. порядок ее точек равен трем. Графа порядка два называется одномерным многообразием; легко убедиться, что это также будет одномерная сфера. Нетрудно убедиться, что комплекс, обратный графе, состоит из одинаковосторонних (одинаковоугольных) областей.

Хроматическое число комплекса — наименьшее число классов, на которые разбиваются области комплекса так, чтобы смежные области (имеющие общую отрезочную границу) были разных классов.

Если считать справедливой теорему о четырех красках, то ранг плоского комплекса ≤ 4 . Эта теорема заслуживает некоторого внимания; имея чисто эмпирическое происхождение (раскраска карт), она по своей истории аналогична большой теореме Ферма из теории чисел. Много доказательств давалось и все они оказывались недостаточными (Cayley 1878, Kempe 1879, Tait 1880 и т. д.; см. литературу).

Пока предельным достижением является установление хроматического числа 4 для комплекса рода 0 с числом областей не свыше 25 (1922, Franklin) и 27 (1926, Reynolds).

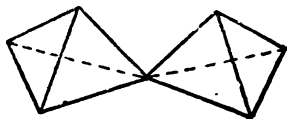


Рис. 2.



Рис. 3.

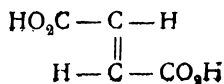
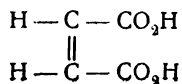
Отрезочный комплекс, у которого $\alpha_0 = \alpha_1 + 1$, называется деревом. Центром называется точка дерева, отстоящая по крайней мере от двух его концов на одинаковое число отрезков N , причем нет других концов дерева, отстоящих на число отрезков $M > N$.

Скажем несколько слов о химических приложениях теории комплексов. Гипотезы о пространственных расположениях атомов в молекулах, особенно в органических соединениях (химия углерода), привели к оформлению стереохимических представлений. На том основании, что углерод четырехвалентен, было предложено геометрически изображать валентности в виде отрезков, направленных из центра тетраэдра в его вершины. Если углерод в молекуле связан с 4 различными группами, мы получаем так называемый асимметричный атом углерода; в этом случае изомерные модификации соединения обнаруживаются по их физическим свойствам.

Число стереомеров химического соединения, содержащего n асимметрических атомов углерода, будет 2^n . Вследствие наличия внутренней симметрии оно в действительности меньше, и 2^n есть только верхняя граница.

Два асимметричных атома (рис. 2) дают четыре изомера, попарно представляющие зеркальное отображение друг друга.

При ненасыщенном углероде, когда имеются двойные связи (рис. 3), изомерия также может иметь место; их примером являются малеиновая и фумаровая кислоты:



Аналогично будет в циклических соединениях углерода (рис. 4, 5 и 6).

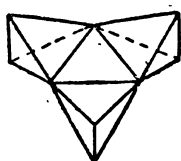


Рис. 4.

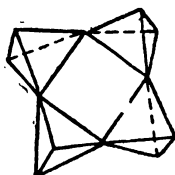


Рис. 5.

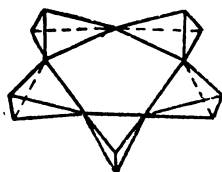


Рис. 6.

Схематизируя комплексом молекулярную формулу соединения, можно перевести на комбинаторный язык вопросы о существовании и количестве изомеров — это будет вопрос о негомеоморфных комплексах — вопрос об их количестве при взятых условиях задания.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Sainte-Laguë. Les Réseaux. Mém. S. M., f. XVIII, 1926.
2. Sainte-Laguë. Géometrie de situations et jeux. Mém. S. M., f. XLI, 1929. В обоих брошюрах большая библиография.
3. Ahrens. Mathematische Unterhaltungen und Spiele. B. I & II, 1921, 1918. Большая библиография.
4. Игнатъев. В царстве смекалки. 3 тома. (Популярное изложение, не для математиков.)
5. Успенский. Избранные математические развлечения. Изд. „Сеятель“, 1924.
6. Errera. Du coloriage des cartes. Diss., 1921. (Указана библиография в 78 номерах.)
7. Hunziker. Ueber das Kartenfärbungsproblem. Diss., 1924.
8. Franklin. The Four Color Problem. Am. J. of Math. 14, 1922, стр. 225—236.
9. Reynolds. On the Problem of Coloring Map in Four Colors. Ann. of Math. 28, 1927, стр. 1—15, 476—492.
10. Hinrichsen, Mamlock & Study. Chemische Atomistik. Math. Enz. V, 6.
11. Schoute, см. главу IV.

1. Найти отрезочные комплексы, обратные в E_2 комплексам, изображенным на рис. 7—12.

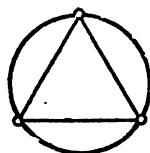


Рис. 7.

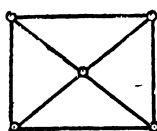


Рис. 8.

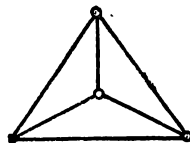


Рис. 9.

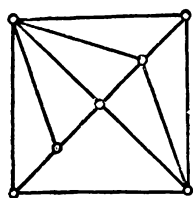


Рис. 10.

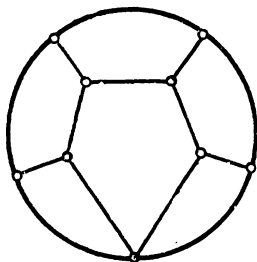


Рис. 11.

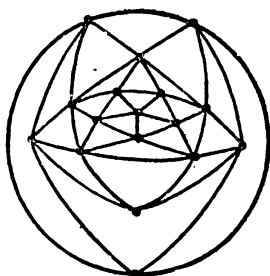


Рис. 12.

2. Найти комплексы, обратные в E_2 графам, изображенным на рис. 13 и 14.

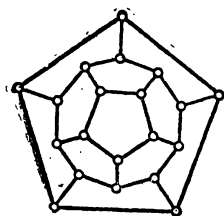


Рис. 13.

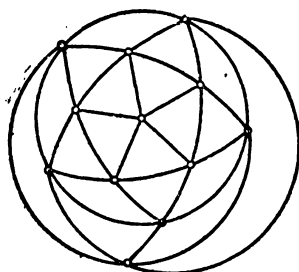


Рис. 14.

3. Определить ранги комплексов, изображенных на рис. 15—17.

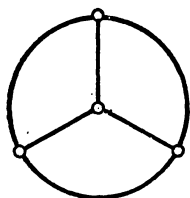


Рис. 15.

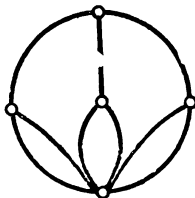


Рис. 16.

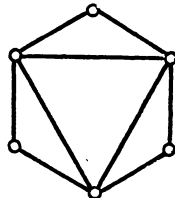


Рис. 17.

4. Показать, что комплексы, изображенные на рис. 18—20, рода нуль.

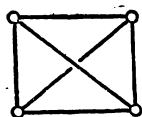


Рис. 18.

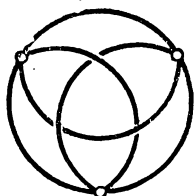


Рис. 19.

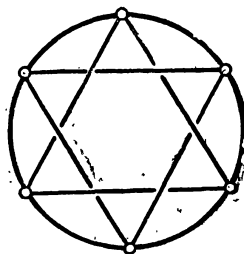


Рис. 20.

5. Найти род граф рис. 21 и 22.

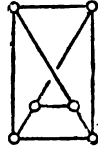


Рис. 21.

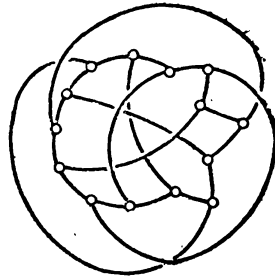


Рис. 22.

6. Найти род комплексов, изображенных на рис. 23 и 24.

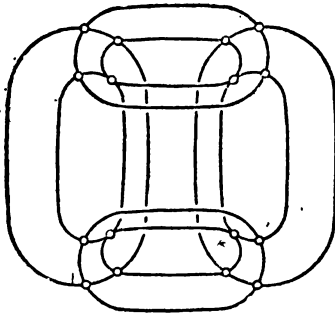


Рис. 23.

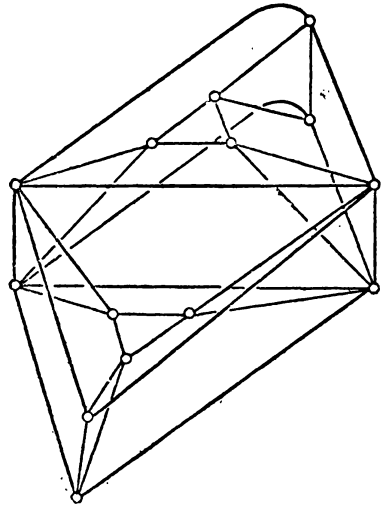


Рис. 24.

7. Доказать, что для обращения отрезочного комплекса в дерево достаточно изъять $(\alpha_1 - \alpha_0 + 1)$ его отрезков, где α_0 — число точек, α_1 — число отрезков комплекса.

8¹⁾. Доказать, что для комплекса рода 0 справедлива формула

$$\sum_{n=3}^{\alpha_0-1} n_n \alpha_n = 2\alpha_1 = \sum_{n=3}^{\alpha_0-1} n_n \alpha_0,$$

где $n_n \alpha_n$ — число областей, ограниченных n отрезками,
 $n_n \alpha_0$ — число точек, где сходится n отрезков.

¹⁾ Задачи 8—10 взяты у Schoute, I c., В. II, стр. 55.

9. Доказать, что при соблюдении условий предыдущей задачи: 1) нет полиэдра только с шестиугольными гранями, а также полиэдра с семью ребрами, 2) число нечетных вершин, а также число нечетных граней, четно, 3) полиэдр будет пирамидой, если $\alpha_2 - 1 \alpha_0$ или $\alpha_0 - 1 \alpha_2$ отличны от нуля, 4) полиэдр с одним нечетным $2k+1 \alpha_0$ или $2k+1 \alpha_2$ имеет по крайней мере одно четное $2k \alpha_0$ или соответственно $2k \alpha_2$.

10. Доказать, что если

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2;$$

$$\alpha_0 = \sum_{n=3}^{\alpha_2-1} n \alpha_n; \quad \alpha_2 = \sum_{n=3}^{\alpha_0-1} n \alpha_n,$$

то

$$3 \alpha_0 + 3 \alpha_2 = 8 + (5 \alpha_0 + 5 \alpha_2) + 2 (6 \alpha_0 + 6 \alpha_2) + \dots \quad (1)$$

$$3 \alpha_0 + 2 \alpha_0 + 5 \alpha_0 \geq 6 \alpha_0 - 2 \alpha_1 = 12 + 4 \alpha_1 - 6 \alpha_2. \quad (2)$$

$$3 \alpha_2 + 2 \alpha_2 + 5 \alpha_2 \geq 6 \alpha_2 - 2 \alpha_1 = 12 + 4 \alpha_1 - 6 \alpha_0. \quad (3)$$

$$3 \alpha_0 + 2 \alpha_0 + 5 \alpha_0 \geq 12. \quad (4)$$

$$3 \alpha_2 + 2 \alpha_2 + 5 \alpha_2 \geq 12. \quad (5)$$

$$4 \alpha_0 + 2 \alpha_0 + 3 \alpha_2 \geq 20. \quad (6)$$

$$4 \alpha_2 + 2 \alpha_2 + 3 \alpha_0 \geq 20. \quad (7)$$

Какие теоремы отсюда следуют?

11. Почему нельзя непрерывно обойти, не пройдя дважды, отрезки комплекса рис. 25 и почему это возможно для комплекса, изображенного на рис. 26?

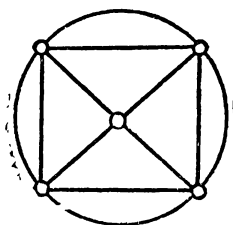


Рис. 25.

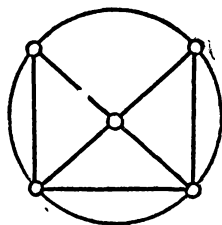


Рис. 26.

12¹⁾. Известно, что при обходе вершин додекаэдра, если n число первых фиксированных вершин обхода, числа k различных путей, последовательно обходящих все вершины не более одного раза, имеют значения:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
k	30	20	10	6; 4	4; 2	3; 2; 1; 0	2; 1; 0	1; 0

Найти эти пути.

¹⁾ См. Sainte-Laguë, Géometrie, I. c., стр. 54.