

Л. Эйлер

**Метод нахождения кривых
линий**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Л11

Л11 **Л. Эйлер**
Метод нахождения кривых линий / Л. Эйлер – М.: Книга по Требованию,
2021. – 598 с.

ISBN 978-5-458-47873-1

ISBN 978-5-458-47873-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Первая из задач, относящихся к области вариационного исчисления, была поставлена Ньютоном в его классическом творении „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“¹. Эта задача состояла в нахождении такой кривой линии, которая при вращении около заданной оси образовывала бы тело, испытывающее при движении в жидкости по направлению оси наименьшее сопротивление; при этом предполагалось, что сопротивление жидкости возрастает пропорционально квадрату скорости. Ньютон ограничился лишь указанием дифференциального уравнения, которому удовлетворяет искомая кривая; это уравнение было впоследствии проинтегрировано Лопиталем и Иваном Бернулли².

В 1696 г. в июньском выпуске „*Acta Eruditorum*“ Иван Бернулли опубликовал свою знаменитую задачу

¹ „*Principia*“, London 1686, lib. II, sect. VII, prop. 34, schol.

² „*Acta Eruditorum*“, Aug., Nov. 1699.

о брахистохроне или о кривой наискорейшего ската. Задача состояла в следующем: в вертикальной плоскости даны две точки *A* и *B*; требуется определить вид кривой линии, спускаясь по которой тяжелое тело прошло бы путь от *A* к *B* в наименьшее время. Еще до опубликования своей задачи Иван Бернулли сообщил ее письменно Лейбницу¹. Последний решил ее тотчас по получении письма и в ответном сообщении предложил Бернулли обнародовать эту „столь прекрасную и до сих пор неслыханную задачу“² для состязания между геометрами, предоставив годичный срок для решения. Несколько позже в заметке, напечатанной в „Acta Eruditorum“, он выразил уверенность, что существует не более трех математиков (Лопиталь, Гедде, Ньютон), которым эта задача окажется по силе³.

Предположение Лейбница о немногочисленности лиц, способных, по его мнению, решить задачу о брахистохроне, подтвердилось полностью: до истечения срока конкурса было представлено всего три

¹ „Leibniz's mathematische Schriften, Bd. III, Halle 1856, S. 283.

² Problema est profecto pulcherrimum, et me invitum ac reluctantem, pulchritudine sua, ut potum Evam ad se traxit S. 288.

³ Интересно отметить, что эта фраза Лейбница сыграла немаловажную роль в разгоревшемся впоследствии споре между Ньютоном и Лейбницем о приоритете в открытии анализа бесконечно малых. В этом споре живейшее участие принимал геометр Николай Фацио де-Дуилье (1664—1753), горячо обидевшийся на Лейбница за то, что тот не упомянул его в числе математиков, могущих решить задачу о брахистохроне. В небольшом сочинении, выпущенном им в 1699 г. под заглавием „Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex“, он горько жалуется по этому поводу, обвиняя при этом Лейбница в плагиате идей Ньютона в деле открытия дифференциального исчисления.

решения. Одно из них принадлежало Лопиталю другое — Якову Бернулли¹, брату Ивана, третье было опубликовано в январском выпуске „Philosophical Transactions“ без подписи автора². Но Иван Бернулли тотчас угадал в безыменном авторе Ньютона, „как льва узнают по его когтям“ („tanquam ex ungue leonem“), по его собственному выражению.

Из предложенных решений, показавших, что искомая кривая есть циклоида, наиболее замечательным по своему методу оказалось решение, данное Яковом Бернулли. В нем впервые был высказан принцип хотя и не обладающий надлежащей общностью, но приложимый к обширному классу задач. Этот принцип, сыгравший значительную роль в первоначальной фазе развития вариационного исчисления, утверждал, что *если какая-нибудь кривая обладает свойством максимума или минимума, то каждая ее бесконечно малая часть обладает тем же свойством.*

В своем сочинении Яков Бернулли решил не только задачу о брахистохроне, но и показал, каким образом могут быть решены и другие более трудные задачи, в которых кривая, подлежащая разысканию, должна еще удовлетворять одному или нескольким наперед заданным условиям. Из задач последнего рода наибольшую известность получила *задача об изопериметрах*, в которой требовалось определить вид кривой линии, обладающей свойством максимума или минимума при условии, что длина этой линии остается неизменной. Одна из первых задач об изопериметрических кривых была сформулирована Яковом Бернулли следующим образом: на прямолинейном

¹ „Acta Eruditorum“, Mai 1697, p. 211. См. также Jac. Bernoulli, Opera, II, pp. 768—775.

² „Philosophical Transactions“ (1697, Nr. 224). Newtoni Opuscula, I, p. 289.

базисе BN построены две кривые BZN и BFN ; ордината PZ одной кривой представляет степенную функцию от ординаты PF другой кривой; требуется определить вид кривой BFN при условии, что ее длина остается постоянной, а площадь BZN достигает максимума¹.

В 1697 г. Иваном Бернулли была поставлена еще одна минимальная задача, повлекшая за собою изучение одного важнейшего класса кривых линий. Задача состояла в проведении кратчайшей линии между двумя заданными точками, расположенными на произвольной поверхности². Первые исследования в этом вопросе были произведены Лейбницем³ и Яковом Бернулли, причем последним были найдены решения для ряда частных случаев⁴, но наиболее важный результат был получен самим Иваном Бернулли, а именно: он показал, что в любой точке кратчайшей линии соприкасающаяся плоскость перпендикулярна к касательной плоскости к поверхности⁵. Это, как известно, есть основное свойство геодезических линий. Хотя сам Иван Бернулли и не опубликовал сразу найденного им результата, но задача о геодезических линиях продолжала занимать его в течение многих лет⁶. Понимая всю ее важность, он предложил за-

¹ Jac. Bernoulli, Opera, II, p. 775.

² „Journal des Sçavans“, 1697.

³ Leibniz's Schriften, Bd. III, S. 470, 475, 526, 532.

⁴ „Acta Eruditorum“, Mai 1698.

⁵ „Quod planum transiens per tria qualibet puncta proxima lineae quaesitae debeat esse rectum ad planum tangens superficiem curvam in aliquo istorum punctorum“ (в письме к Лейбницу, Joh. Bernoulli, Opera, IV, pp. 108—128).

⁶ В конце 1728 г. он сообщал найденную им теорему Упсальскому профессору Клингенштерна (Klingensterna). Исследования И. Бернулли о геодезических линиях были впервые опубликованы лишь в 1742 г. в полном собрании его сочинений.

няться ею своему знаменитому ученику Леонарду Эйлеру, тогда еще совсем молодому математику. Последний уже успел проявить себя в области минимальных вопросов; так, в 1726 г. в заметке об изохронной кривой он поставил задачу о брахистохроне в сопротивляющейся среде¹.

Эйлер принял предложение Бернулли и в 1728 г. (21 г. от роду!) напечатал в „*Comm. Acad. Petrop.*“ t. III, pp. 110—124 статью „*De linea brevissima in superficie quaelibet puncta iungenda*“, в которой он дал общее решение поставленной задачи. Четыре года спустя в VII т. „*Comm. Acad. Petrop.*“ Эйлер поместил мемуар „*Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis*“, в котором изопериметрическая задача была формулирована во всей ее общности. Здесь Эйлером был впервые дан тот метод решения задач на относительные extrema, который носит в вариационном исчислении название „правила Эйлера“. Затем во II т. вышедшего в 1736 г. сочинения „*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*“ Эйлер снова занялся исследованием геодезических линий и решил изопериметрическую задачу о брахистохроне заданной длины.

В том же 1736 г. Эйлер представил для напечатания в VIII т. „*Comm. Acad. Petrop.*“ мемуар под заглавием „*Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis*“.

Наконец, в 1744 г. отдельным изданием вышел его знаменитый трактат „*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*“ (Lausannae et Genevae, 1744), в котором Эйлер собрал

¹ „*Acta Eruditorum*“, 1726, p. 363. Предложенная Эйлером задача была решена Германом (Hermann) в 1727 г. („*Comm. Acad. Petrop.*“, 1727, t. II, p. 434).

вместе почти все свои исследования предыдущих лет. Полный перевод его мы и предлагаем вниманию читателя¹.

Содержание „Methodus inveniendi“ разделяется на шесть глав и два приложения.

В первой главе Эйлер подробно останавливается на постановке задачи о нахождении таких линий, которые сообщают какому-нибудь выражению экстремальные значения. На примере брахистохроны он указывает, что для того, чтобы задача о нахождении экстремальной линии оказалась определенной, необходимо внести ряд условий, например прохождение кривой через данные точки и т. п. Затем Эйлер формулирует задачи о нахождении как абсолютных, так и относительных максимумов и минимумов. В определении IV Эйлер дает определение формулы максимума или минимума как величины W , которая для разыскиваемой кривой должна получить

¹ Здесь следует отметить, что при изложении основ дифференциального исчисления (см. Instit. calculi differ.) Эйлер совершенно не пользовался понятием о пределе переменной величины. Таким образом эйлеровская трактовка бесконечно малых величин существенно отличается от современной, и это обстоятельство сказалось на всем изложении „Methodus inveniendi“. Там, где мы сказали бы, что некоторая величина является бесконечно малой порядка выше первого, Эйлер говорит просто, что эта величина равна нулю (см., например, формулировку теоремы IV, глава I). Однако мы не считали возможным вносить при переводе соответствующие изменения текста, так как тогда совершенно утратился бы стиль изложения, свойственный эпохе Эйлера. Равным образом мы не считали необходимым всякий раз указывать в примечаниях на аналогичные обстоятельства, за исключением лишь тех случаев, когда рассуждения Эйлера становятся не строгими даже и при его трактовке бесконечно малых величин.

наибольшее или наименьшее значение. Далее в *предложении I* Эйлер показывает, что для постановки вариационной задачи необходимо, чтобы выражение W было *неопределенной интегральной величиной* (*quantitas integralis indefinita*), т. е. чтобы оно имело форму определенного интеграла:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} Z dx, \quad (1)$$

в котором $Z dx$ может быть проинтегрировано только в том случае, когда существует вполне определенное соотношение между переменными x и y . Затем Эйлер указывает на три различных рода формул W : первый род — это те формулы, в которых Z есть функция от переменных $x, y, y', y'', \dots$; ко второму роду относятся те формулы, в которых выражение Z содержит интегральные соотношения, и наконец, третий род составляют формулы, в которых значение Z определяется дифференциальным уравнением.

Первый род характерен тем, что если формула W достигает экстремального значения на какой-нибудь кривой, то любая часть этой кривой будет обладать тем же свойством (*предложение II*). Напротив, если W относится ко второму или к третьему роду, то свойство максимума или минимума не принадлежит любой части кривой, а будет присуще только всему отрезку кривой, соответствующему абсциссам x_1 и x_2 (*предложение III*).

Далее Эйлер вводит понятие о *вариировании* кривых, рассматривая вместе с кривой *атпоз* (черт. 3) другую кривую *атуоз*, бесконечно мало отличающуюся от первой. В *предложении IV* Эйлер доказывает, что в том случае, когда кривая *атпоз* есть экстремаль, значение формулы W для обеих кривых

атпоz и *атyoз* будет одно и то же. В *определении V* Эйлер дает определение *дифференциального значения* формулы *W* (*valor differentialis*), называя так разность значений, принимаемых этой формулой для разыскиваемой экстремальной кривой и для той же кривой, испытавшей бесконечно малое изменение. Таким образом, согласно излагаемому методу, вся трудность при нахождении кривых, обладающих экстремальными свойствами, сводится к нахождению соответствующих дифференциальных значений и затем к решению тех уравнений, которые получаются в результате приравнивания нулю этих дифференциальных значений.

Во *второй главе* Эйлер излагает метод нахождения *абсолютных* максимумов и минимумов. Вначале выводятся для различных выражений те приращения, которые они получают, когда у произвольной кривой *атz* какая-нибудь из ординат *Nn* (черт. 4) увеличится на бесконечно малое приращение *nv*. Затем в *предложениях II, III, IV и V* Эйлер ищет условие, при котором интеграл (1) достигает экстремального значения. Основная идея его способа заключается в следующем: интеграл (1) заменяется суммой площадей прямоугольников:

$$\dots + Z_n dx + Z_{n-1} dx + Z dx + Z' dx + Z'' dx + \dots$$

и разыскивается по вышеуказанным правилам дифференциальное значение этой суммы; приравняв затем нулю это дифференциальное значение, получают уравнение искомой кривой. Это правило, примененное к тому случаю, когда *Z* зависит от *x*, *y*, *p = y'* и когда, следовательно,

$$dZ = M dx + N dy + P dp,$$

ОЧЕРК ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ 15
приводит к классическому уравнению Эйлера

$$N - \frac{dP}{dx} = 0.$$

В дальнейшем рассматриваются более общие случаи, когда Z зависит от x , y и производных y' , y'' , y''' и т. д. Все свои рассуждения Эйлер иллюстрирует большим количеством примеров как геометрического, так и механического характера.

В *третьей главе* своего трактата Эйлер излагает метод нахождения экстремальных кривых в тех случаях, когда функция Z , входящая в неопределенную интегральную величину W , зависит от *неопределенной величины* (quantitas indeterminata)

$$\Pi = \int [Z] dx. \quad (2)$$

Вначале (*предложение II*) им рассматривается сравнительно простой случай, когда величина $[Z]$ зависит только от переменных x , y , p , q , r , ... Затем в *предложениях III и IV* исследуется более сложная зависимость, когда Z является функцией x , y , p , ... и неопределенных величин вида (2). Наконец, в *предложении IV* Эйлер рассматривает случай, когда функция Z зависит от величины Π , заданной посредством дифференциального уравнения.

Согласно излагаемому методу, во всех рассматриваемых случаях сначала находятся дифференциальные значения формулы

$$W = \int_{x_1}^{x_2} Z dx$$

и затем составляются уравнения, определяющие искомую экстремальную кривую.

Четвертая глава трактата посвящена приложениям изложенной теории к решению различного рода экстремальных задач. В первых пяти примерах (§§ 8—12), носящих геометрический характер, Эйлер рассматривает только такой случай, когда формула W , для которой разыскивается экстремальное значение, имеет вид простого определенного интеграла:

$$\int_{x_1}^{x_2} Z dx.$$

Затем в *предложении II* исследуется более сложный случай, когда формула W представляет собою произведение двух определенных интегралов:

$$\int_0^x Z dx \int_0^x Y dx,$$

другими словами, на данном отрезке $x=a$ ищется такое соотношение между y и x , при котором произведение

$$\int_0^a Z dx \int_0^a Y dx$$

достигало бы экстремума.

Эйлер показывает следующий способ нахождения экстремали: пусть dA и dB обозначают дифференциальные значения формул:

$$A = \int_0^a Z dx, \quad B = \int_0^a Y dx;$$

тогда уравнение для определения экстремальной линии будет иметь следующий вид:

$$A dB + B dA = 0.$$