

С.Н. Бернштейн

**Современное состояние
теории вероятностей**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С11

С11 **С.Н. Бернштейн**
Современное состояние теории вероятностей / С.Н. Бернштейн – М.: Книга
по Требованию, 2024. – 44 с.

ISBN 978-5-458-56991-0

ISBN 978-5-458-56991-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИИ

Доклад, читанный на Всероссийском съезде математиков в Москве в 1927 г.

Организационный комитет предложил мне сделать Съезду общий доклад о современном состоянии теории вероятностей и ее приложений. Вы знаете, как обширна указанная тема, и потому не должны от меня ожидать сколько-нибудь полного анализа всей интересующей нас области, для которого необходимо было бы несколько докладчиков и потребовалось бы во много раз больше времени, чем то, каким я располагаю. При таких условиях главная трудность, стоящая предо мною, — в выборе материала, в выборе организующего принципа изложения.

Я полагаю, что в данном случае основной моей задачей должна быть попытка представить некоторый синтез, методологически объединяющий общие математические проблемы теории вероятностей и ее важнейшие приложения. Поэтому мне придется, с одной стороны, умолчать о многих математических исследованиях, представляющих лишь специальный интерес, и с другой стороны, при рассмотрении приложений теории вероятностей, я буду больше останавливаться на вопросах, имеющих принципиальное значение, чем на тех, которые играют важную роль в соответствующей области.

Еще не так давно, до второй половины прошлого столетия, значение теории вероятностей, как метода научного исследования, было весьма ограничено; отдельные попытки ее приложения к изучению явлений природы, связанные с именами Бернулли, Лапласа, Пуассона, Кетле и других, были довольно слабо обоснованы и вызывали заслуженную критику, которая нашла свое наиболее блестящее выражение в известном предисловии Бертрана к его курсу теории вероятностей, написанному всего 40 лет назад.

Однако скептицизм Бертрана не остановил и не замедлил дальнейшего стихийного, если так можно выразиться, внедрения теории вероятностей в различные области науки. Уже его современники Максвелл и Больцман превращают молекулярную статистику в важный экспериментально обоснованный отдел физики; и с другой стороны, благодаря открытию элементарного закона наследственности Менделя, применение теории вероятностей к биологии становится не только возможным, но и необходимым. К этому же времени почти во всех областях знания: в астрономии, метеорологии, демографии и т. д. накапливается обширный статистический материал, обнаруживающий таинственную связь между

случайностью и закономерностью, и анализ этой связи, проблема классификации и характеристики статистических рядов на основе понятий теории вероятностей становится в порядке дня.

В настоящее время мы можем сказать с полной определенностью, что дальнейшая систематизация человеческого знания или развитие науки невозможна без применения теории вероятностей, и поэтому прежде всего требует ответа вопрос о том, не является ли наука, основанная на этой теории, второсортной наукой или суррогатом науки.

Вот почему особо важное значение приобретает формально логическое обоснование теории вероятностей как единой математической дисциплины, и только после того, как эта дисциплина будет очищена от парадоксов и аксиоматически построена, наподобие геометрии, можно будет пользоваться теорией вероятностей, как точным объективным познавательным методом, приложимость которого в каждом частном случае требует и допускает экспериментальную и математическую проверку.

Чисто математическая теория вероятностей может не интересоваться тем, имеет ли коэффициент, называемый математической вероятностью, какое-нибудь практическое значение, субъективное или объективное. Единственное требование, которое должно быть соблюдено, это — отсутствие противоречий, а именно: различные способы вычисления указанного коэффициента при данных условиях и соблюдении принятых аксиом должны приводить к одному и тому же значению.

Кроме того, если мы хотим, чтобы выводы теории вероятностей были не простой игрой ума, а допускали эмпирическую проверку, то необходимо рассматривать только такие совокупности предложений или суждений, относительно которых возможно фактически установить, истинны они или ложны. Познавательный процесс, необратимый по существу, в том именно и заключается, что те или иные из признаваемых нами возможными предложений становятся истинными, т. е. осуществляются, и тогда отрицания их в то же время становятся ложными или невозможными.

Таким образом построение теории вероятностей как единого познавательного метода требует, чтобы истинность предложения однозначно без всяких исключений характеризовалась определенным максимальным значением математической вероятности, которое принимается равным единице, а ложность предложения должна быть адекватна наименьшей вероятности, приравненной нулю. Для конечных совокупностей предложений указанным требованиям нетрудно удовлетворить, но благодаря тому, что категорическая необходимость их недостаточно отчетливо признавалась, при рассмотрении бесконечных совокупностей возникали и продолжают возникать парадоксы, на одном из которых я позволю себе здесь остановиться.

Я имею в виду известную задачу о том, какова вероятность того, что дробь, написанная наудачу, окажется несократимой, решение которой вслед за Кронекером и Чебышевым дано А. А. Марковым в его классическом курсе исчисления вероятностей. Решение основано на допущении, что все остатки, получаемые от деления взятого наудачу числа N на произвольное число a , меньшее, чем N , равновероятны,

и кроме того, каков бы ни был остаток, полученный при делении N на число b , взаимно простое с a , все вышеуказанные остатки при делении на a остаются равновероятными. Отсюда нетрудно вывести, что вероятность дроби быть несократимой равна $\frac{6}{\pi^2}$, как пределу беско-

нечного произведения $\prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$, где p — простое число. Однако при указанных допущениях вероятность того, что N есть число простое,

равна нулю как пределу произведения $\prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$; точно так же равна

нулю и вероятность того, что $N = 2p$ или $3p$ и т. д. Поэтому вероятность того, что N является произведением двух простых чисел, равная пределу суммы конечного числа нулей, должна быть равна нулю. Аналогичным образом равна нулю и вероятность того, что число N состоит из трех множителей, из четырех множителей и т. д. Следовательно, применяя снова теорему сложения вероятностей, находим, что, вообще, вероятность того, что произвольное число N является произведением конечного числа простых множителей, равна нулю; но, с другой стороны, несомненно, что конечное число состоит из конечного числа множителей; таким образом мы приходим к противоречию: $0 = 1$.

Итак, допущения А. А. Маркова явно неприемлемы; они, по существу, эквивалентны предположению, что все значения целого числа, написанного наудачу, равновероятны; но в таком случае вероятность определенного значения числа равна $\frac{1}{\infty} = 0$, и поэтому вероятность

того, что написанное число не превысит любого наперед заданного числа M , также равна нулю; но так как, с другой стороны, написанное число не может быть бесконечным, мы приходим к тому же противоречию: $0 = 1$.

Выше указанный результат Чебышева и Маркова и необходимо связанное с ним заключение о том, что вероятность любому числу быть простым равна нулю, следует, таким образом, считать, с точки зрения теории вероятностей, лишенным смысла; и если бы мы пожелали все-таки настаивать на правильности последнего заключения, то физики и статистики с полным правом могли бы сказать нам, что если мы такому событию, как написание простого числа, приписываем вероятность, равную нулю, то наш закон больших чисел с теоремой Бернулли, который утверждает лишь, что некоторые вероятности весьма близки к нулю, не может претендовать на серьезное экспериментальное практическое значение. В действительности полученный результат нужно бы формулировать так: если все значения целого числа N , меньшие, чем данное число n , равновероятны, то можно выбрать n настолько большим, чтобы вероятность числу N быть простым была сколь угодно близка к нулю. Эта теорема по форме аналогична теоремам Бернулли и Лапласа, а указанная выше краткая ее формулировка вполне соответствовала бы такой недопустимой форме предельной

теоремы Лапласа: каково бы ни было целое число N независимых опытов, вероятность неравенства

$$t_0 < \frac{m - Np}{\sqrt{2Npq}} < t_1$$

равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2} dt,$$

где p — вероятность события A в каждом опыте, m — число его появлений при указанных N опытах, а $q = 1 - p$ — вероятность события, противоположного A .

Психологически ошибка А. А. Маркова и других математиков, применяющих термин „вероятность“ в теории чисел, вполне понятна. Для них вероятность не является величиной, которая, сохраняя во всех применениях один и тот же смысл, допускает во всех случаях единообразные способы объективно статистического измерения; в теории чисел приходится иметь дело с данными закономерными последовательностями чисел, и нас интересуют не вероятности, которых мы никогда не станем экспериментально определять, а предельные или асимптотические частоты чисел определенного класса, закономерно распределенных в указанных последовательностях. Эти предельные частоты представляют известные аналогии с математическими вероятностями, эвристически весьма ценные для теории чисел, но смешение этих двух понятий является недопустимым недоразумением.

Аналогичные парадоксы мы встречаем и в некоторых геометрических задачах теории вероятностей. Исследование этого вопроса с указанной выше точки зрения единства теории вероятностей и возможности эмпирической проверки ее выводов приводит к заключению, что далеко не все абстрактные множества могут быть ею рассматриваемы; но при соответствующем самоограничении и соблюдении некоторых предосторожностей, на которых я не имею возможности подробно останавливаться, арифметизация бесконечных совокупностей, т. е. определение вероятностей всех их предложений, имеющих смысл, осуществимо без противоречий. Замечу только, что главным источником парадоксов было то, что арифметизация бесконечных совокупностей проводилась более или менее интуитивно, вместо того, чтобы отчетливо формулировать, какой из двух принципов кладется в ее основу: принцип непрерывности или принцип прерывности. Первый соответствует предположению, что утверждение равенства двух величин лишено смысла, так как экспериментально равенство не может быть осуществлено абсолютно точно, а лишь с некоторой погрешностью; второй — напротив, имеет в виду величины, точное равенство между которыми допускает фактическую проверку; совокупность последних всегда исчислима, и они не могут быть все невозможны (если совокупность бесконечна). В каждом частном случае только опыт может и должен решить, которая из гипотез справедлива.

Так, например, теория излучения черного тела, исходя из принципа

непрерывности, приходит к закону распределения лучистой энергии лорда Рэлея; то обстоятельство, что этот закон не согласуется с опытом, заставило Планка принять принцип прерывности или скачкообразного изменения энергии и создать свою знаменитую теорию квант, которая нашла полное подтверждение не только во всех явлениях излучения, но и в свойствах теплоемкости тел при всевозможных температурах.

Более глубокая причина того, что классическая механика, законы которой были выведены из наблюдений над движением материальных тел конечных размеров, требует существенных изменений для интерпретации явлений, связанных с излучением, заключается в том, что она приводит к равномерному распределению энергии между бесконечным числом степеней свободы, т. е., в сущности, к разобранному выше противоречивому допущению бесконечного множества равновозможных несовместимых случаев.

Квантовая механика также встречает на своем пути серьезные затруднения, но они находятся не в плоскости теории вероятностей, а в области наших механических и геометрических представлений, которые мы хотим применить к таким элементам, как электрон, никогда индивидуально не наблюдавшимся.

Во всяком случае, с точки зрения, которая будет развита дальше, нет необходимости искать определенной механико-геометрической модели атома, и можно было бы удовлетвориться физической теорией, построенной на схеме безобидной игры между всеми электронами данного тела, правила которой диктуются наблюдаемыми нами макроскопическими явлениями.

Возвращаясь к принципам теории вероятностей, можно считать, мне кажется, что основные формально логические трудности ее построения в настоящее время преодолены. Мало, однако, признать, что, соблюдая известные правила вычисления, принятые теорией вероятностей, мы можем без логических противоречий приписывать различным фактам определенные вероятности. Но имеет ли физический смысл говорить о том, что два различных факта имеют одинаковые вероятности? Не грешим ли мы против закона причинности, говоря, что в двух опытах, при бросании двух одинаковых игральных костей, в обоих случаях вероятность появления шести очков одна и та же, между тем как в действительности оказывается, что на одной кости получилось шесть очков, а на другой пять?

Этому вопросу, имеющему как теоретическое, так и практическое значение, уделялось много внимания и раньше и в последние годы; если мы теперь ближе к некоторому единомыслию в его решении, чем несколько десятков лет назад, то этим мы обязаны не более углубленным философским рассуждениям, чем те, которые высказывались Лапласом или Курно, а экспериментальным успехам физической статистики.

У математиков принцип каузальности никогда, начиная от Галилея и Ньютона, не пользовался особым почетом; гораздо важнее для нас функциональные зависимости или уравнения между несколькими величинами, которые позволяют определить любую из них, если известны остальные, причем прочие элементы, не входящие в уравнение, не

влиять на значение искомой величины. Такого рода зависимостями выражаются так называемые законы природы, как, например, закон инерции или закон всемирного тяготения Ньютона, которых причину Ньютон не считал нужным искать. И хотя в настоящее время оба эти закона объединены Эйнштейном в высшем синтезе общей теории относительности, но мы так же далеки, как и Ньютон, от знания их причины.

Новый современный этап развития научной мысли характеризуется необходимостью введения понятия вероятности в формулировку элементарных законов природы. И если мы не доискиваемся причины закона инерции, который является свойством четырехмерного пространства Минковского, я полагаю, что мы с равным правом можем принять, как характеристику изотропности пространства, закон, выражающий, что вдали от притягивающих масс инерциальное движение имеет одинаковые вероятности происходить внутри каждого из двух равных углов.

Аналогичным образом постулат о существовании независимых величин и явлений, без которого не может быть сформулирован ни один общий закон природы, без которого и сама категория причинности потеряла бы смысл, должен быть точно сформулирован на языке теории вероятностей, и, например, независимость двух движущихся по инерции точек выражается в том, что все значения угла между их скоростями равновероятны. (Я полагаю, что мне нет надобности повторять, что благодаря общепринятому допущению непрерывности пространства, здесь речь идет о физически измеряемых, а не об абсолютно точных арифметически определенных величинах углов.)

Таковы исходные допущения статистической механики, которые в кинетической теории газов привели Максвелла к его известному закону распределения молекулярных скоростей и экспериментально вполне оправдываются вытекающими из них согласно исчислению вероятностей следствиями; парадокс необратимости тепловых процессов, являющихся проявлением обратимых молекулярных движений, находит удовлетворительное разъяснение в равноценных гипотезах молекулярного хаоса Джинса и квази-эргодической — Эренфеста, последовательно проводящих принцип непрерывности.

Изучение собственных движений звезд обнаружило, что гипотеза изотропности звездного пространства в вышеуказанном смысле должна быть изменена, благодаря существованию асимметрического поля тяготения. Но тем не менее Эддингтон и Шарлье, развивая идею Пуанкаре, установили интересные аналогии между молекулярными и звездными движениями, где изотропный закон распределения скоростей Максвелла заменяется аналогичным эллипсоидальным законом распределения звездных скоростей Шварцшильда, который хорошо согласуется с астрономическими наблюдениями.

Таким образом, вообще, на ряду с законами природы, на основании которых при наличии данных условий α и произвольности всех прочих обстоятельств в рассматриваемых опытах, появление определенного результата A во всех опытах необходимо, мы допускаем и такие законы, при которых соответствующие условия α не всегда вызывают

появление события A ; но, каковы бы ни были прочие обстоятельства, все эти опыты характеризуются какою-то однородностью связи между α и A , которую мы выражаем, говоря, что условия α определяют вероятность события A .

Такого рода законом природы является закон наследственности Менделя, утверждающий, что при скрещивании между собой гибридов некоторых определенных видов, например бобов светлолилового цвета, вероятность появления белых бобов (т. е. индивидов одной из чистых рас) равна $\frac{1}{4}$. Здесь не место останавливаться на генетических основах теории Менделя и, вообще, на различных основаниях, которые могут руководить исследователем, когда он выставляет гипотезу, что во всех опытах определенного типа вероятность появления события A одна и та же.

Для нас важно было лишь выяснить, что существуют такого рода различные опыты, при которых вероятность появления данного события имеет одно и то же вполне определенное значение; подобного рода опыты с костями, с урнами или с картами могут служить для статистических экспериментов, дающих наглядную и педагогически полезную проверку некоторых выводов теории вероятностей.

Общий постулат, на основании которого эта проверка производится, заключается в том, что факты, имеющие вероятность, близкую к нулю, происходят весьма редко, и если эта вероятность достаточно мала, то практически их следует считать невозможными, как в известном опыте с обезьянами Бореля.

Исходя из этого постулата, мы должны заняться вопросом о том, как проверить, что в данном конкретном ряде опытов вероятность появления события A имеет одно и то же значение p . Прежде всего, для этого нужно, чтобы отношение $\frac{m}{n}$ числа m появлений A к числу опытов n при возрастании n приближалось бы к p , согласно теореме Бернулли.

Некоторые статистики, в особенности англичане, формулируя более категорически это свойство, рассматривают его даже как определение вероятности, которое гласит примерно так: вероятность события A в каждом из опытов, число которых неограниченно возрастает, есть предел частоты $\frac{m}{n}$, если при бесконечном возрастании n таковой существует. Это определение, по моему мнению, страдает крупными недостатками, делающими его неприемлемым.

Во-первых, существование предела эмпирически не может быть доказано: дробь $\frac{m}{n}$ могла бы значительно колебаться, пока n не достигает многих миллионов, и лишь затем начать медленно приближаться к своему пределу, и, наоборот, $\frac{m}{n}$ могло бы сначала быть очень устойчивым, а потом, вследствие появления тех или иных пертурбационных причин, сильно отклониться от того значения, которое мы склонны были считать его пределом. Таким образом это определение, которое пытаются

обойти основной вопрос о возможности принципиальной однородности опытов, приводящих к противоположным результатам, не дает никакой почвы ни для статистических экспериментов, ни для выводов, выходящих из рамок грубого эмпиризма. Кроме того, теоретическое допущение существования предела, предполагая более или менее определенный порядок в рассматриваемой серии опытов, неявно вносит туманную идею какой-то особой закономерной зависимости между последовательными независимыми, по предположению, опытами, вроде той, которая легла в основу рассуждений по теории вероятностей философа Марбе.

Поэтому, вместо вероятности, которая характеризовала бы некоторое общее свойство всех наших опытов независимо от их порядка, мы имеем здесь дело с каким-то подобием предельных частостей теории чисел, которые, как мы видели, нельзя без логических противоречий отождествлять с математическими вероятностями.

Ввиду этого, с нашей точки зрения мы только тогда можем считать, что событие A сохраняет постоянную вероятность, несмотря на некоторые видимые различия постановки опытов, если, разбивая все наши опыты на соответствующие группы, мы констатируем во всех них известную определенную устойчивость отношения $\frac{m}{n}$. В частности, если

мы предполагаем, что опыты *независимы* и число групп достаточно велико, то необходимо, чтобы так называемый коэффициент дисперсии был близок к единице. Этот признак, введенный Лексисом, является первым важным шагом научной разработки статистических материалов.

Не только в специальных опытах с картами, костями, урнами и т. д., но и в биологических опытах скрещивания коэффициент дисперсии оказался близким к единице, подтверждая таким образом правильность или, точнее, приемлемость гипотезы Менделя и непосредственную применимость понятия математической вероятности в его простейшей форме к явлениям наследственности.

Напротив, в большинстве рядов, встречающихся в практической статистике, устойчивость отношения $\frac{m}{n}$ оказывается менее прочной, коэффициент дисперсии больше единицы, или, как говорят, дисперсия уже не нормальна, а сверхнормальна; и почти исключениями являются примеры, вроде частоты мальчиков среди новорожденных, где дисперсия при соответствующем подборе условий оказывается нормальной. Таким образом за исключением случаев вроде только что упомянутого, где пол новорожденного определяется, повидимому, некоторым биологическим законом вероятностей, почти не зависящим от экономических условий, в большинстве социальных явлений мы не можем, по крайней мере в настоящее время, выделить такие категории независимых фактов, вероятности которых были бы постоянны. Это объясняется тем, что в отличие от биологических и, в особенности, физических опытов, где мы можем почти неограниченно увеличивать число объектов, находящихся в однородных условиях, в обычной жизненной обстановке мы лишены возможности наблюдать сколько-нибудь значительные совокупности индивидов достаточно однородных, чтобы все они обладали

в отношении какого-нибудь признака вполне одинаковыми вероятностями.

Поэтому сверхнормальная дисперсия является, вообще, следствием изменения вероятности при переходе от одного объекта к другому. Пока мы не имеем теоретических указаний относительно характера и условий этой изменчивости, возможно предложить самые разнообразные схемы законов вероятностей, при помощи которых можно интерпретировать результаты данных статистических наблюдений. Старые исследования Пуассона, примыкающие к этому вопросу, за последние годы были уточнены и существенно дополнены.

Сохраняя предположение независимости опытов, нетрудно убедиться в том, что рассмотренная выше частость $\frac{m}{n}$ с возрастанием n приближается к средней вероятности группы, причем, если последняя в разных группах сохраняет одно и то же значение, то дисперсия должна быть еще меньше нормальной, и этот случай, весьма редко встречающийся, не представляет практического интереса; напротив, дисперсия становится сверхнормальной, если средние вероятности неравны. В зависимости от закона изменения средней вероятности при переходе от одной группы к другой для дисперсии получаются определенные более или менее сложные выражения, которые были исследованы проф. Ястремским. Вообще, можно сказать, что в случае независимости элементов статистической совокупности, чем значительней средняя изменчивость их вероятности, тем более дисперсия превышает нормальную. При этом, каков бы ни был закон изменения вероятностей, коэффициент дисперсии бесконечно возрастает с увеличением числа элементов группы, если только среднее квадратичное отклонение вероятностей от их общей средней не стремится к нулю. Поэтому, когда мы имеем дело с обширными группами, если коэффициент дисперсии не слишком значителен, можно утверждать, что пертурбационное влияние различных побочных обстоятельств, изменяющих вероятность отдельных индивидов, невелико, и измерить средние размеры этих пертурбаций.

Таким образом во многих практических приложениях, где дисперсия сверхнормальна, можно все-таки пользоваться простыми схемами теории вероятностей, как некоторым приближением к действительности, подобно тому, как техники применяют теоретическую механику. В связи с этим особый интерес представляют те статистические ряды, в которых дисперсия, хотя и ненормальна, но более или менее устойчива.

Такого рода статистические совокупности, как показал А. А. Марков в своих известных исследованиях о зависимых опытах, могут быть получены и в случае одной и той же постоянной вероятности для всех индивидов совокупности, если только эти индивиды не вполне между собой независимы.

Но прежде чем перейти к исследованию зависимых опытов, необходимо заметить, что нормальность дисперсии сама по себе является в случае независимых опытов только одним из необходимых следствий постоянства вероятностей; аналогичных следствий можно указать бесчисленное множество, и, например, вместо суммы квадратов отклонений, которые фигурируют в дисперсии, возможно было бы рассматри-

вать любые степени этих отклонений, так называемые моменты последовательных степеней, отношение которых к соответствующим математическим ожиданиям, так же, как и коэффициент дисперсии, должно быть близким к единице.

Вообще, при постоянной вероятности p , рассматривая как отдельный элемент каждую из весьма большого числа S больших равных групп, состоящих из n индивидов, на которые разбита вся статистическая совокупность, мы знаем на основании предельной теоремы Лапласа, что значения уклонений $m - np$, соответствующих каждой группе, должны расположиться по нормальной кривой Гаусса с тем вполнею точностью, чем больше числа S и n .

В случаях сверхнормальной дисперсии, о которой мы только что говорили, теоретически нормальное распределение необязательно; но если бы оно было обнаружено при некотором устойчивом коэффициенте дисперсии, то интерпретацию такой закономерности распределения можно получить, *сохраняя гипотезу постоянной вероятности, полагая лишь, что между индивидами существует определенная в смысле теории вероятностей зависимость.*

Действительно, развивая идеи Маркова, можно показать, что при весьма разнообразных зависимостях между опытами, и закон больших чисел, и предельная теорема Лапласа остаются в силе и, в частности, это имеет место, какова бы ни была зависимость между близкими опытами или индивидами, лишь бы только эта зависимость достаточно быстро ослабевала по мере их удаления друг от друга. При этом коэффициент дисперсии может получать какие угодно значения.

Наиболее простой случай зависимых опытов, образующих, по терминологии Маркова, *цепь*, был исследован очень подробно им самим. Примером такой цепи может служить совокупность букв в каком-нибудь литературном произведении. Марков подсчитал частоту гласных в последовательности из 100 000 букв в произведении Аксакова „Детские годы Багрова-внука“ и в последовательности из 20 000 букв в „Евгении Онегине“; в обоих случаях он нашел хорошее соответствие между своими статистическими наблюдениями и гипотезой постоянной вероятности для буквы, взятой наудачу, быть гласной, при дополнительном условии, что эта вероятность соответствующим образом уменьшается, если предшествующая буква уже оказалась гласной: благодаря этому взаимному отталкиванию гласных, коэффициент дисперсии значительно меньше единицы. Напротив, если присутствие известного признака, например заразная болезнь одного индивида, увеличивает вероятность появления того же признака у его соседа, то при постоянстве вероятности заболевания для отдельного индивида, коэффициент дисперсии должен быть больше единицы. Подобного рода соображения могли бы, мне кажется, дать хотя бы в первом приближении интерпретацию многих статистических рядов с сверхнормальной, но более или менее постоянной дисперсией.

Разумеется, до тех пор пока у нас нет общей теории, объединяющей всю совокупность данных, относящихся к известной области наблюдений, как это имеет место в молекулярной физике, выбор между различными интерпретациями отдельных статистических рядов остается