В. В. Болотин

Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
В11

В. В. Болотин
В11 Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В. В. Болотин – М.: Книга по Требованию, 2013. – 339 с.

ISBN 978-5-458-30862-5

Книга посвящена изучению устойчивости упругих систем,находящихся под действием неконсервативных сил. Как из-вестно, для таких систем обычные методы теории упругойустойчивости, основанные на рассмотрении форм равновесия,смежных с невозмущенной формой, вообще говоря, оказываются неприменимыми. Здесь необходимы более общие методы и более сложные средства исследования.

ISBN 978-5-458-30862-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена изучению устойчивости упругих систем, находящихся под действием неконсервативных сил. Как известно, для таких систем обычные методы теории упругой устойчивости, основанные на рассмотрении форм равновесия, смежных с невозмущенной формой, вообще говоря, оказываются неприменимыми. Здесь необходимы более общие методы и более сложные средства исследования.

Книга состоит из введения и четырех глав. Первая глава посвящена общим вопросам, постановке задачи и методам решения. Ее содержание было изложено в докладе автора на Третьем всесоюзном математическом съезде (Москва, 1956). Остальные главы посвящены приложениям. Во второй главе рассматривается устойчивость упругих систем, находящихся под действием неконсервативных сил, которые в процессе потери устойчивости ведут себя некоторым заранее предписанным образом (так называемые «следящие» силы). В третьей главе рассматривается устойчивость быстро вращающихся упругих роторов, находящихся под влиянием различных возмущающих сил, например сил внутреннего трения, гидродинамических и электромагнитных сил и т. п. Четвертая глава посвящена задачам устойчивости упругих систем, обтекаемых высокоскоростным потоком газа; при этом основное внимание обращено на задачи сверхзвукового флаттера упругих пластин и оболочек. Ряд задач рассматривается в нелинейной постановке, что позволяет исследовать поведение системы после потери устойчивости. Уже на основании этого перечисления можно сделать заключение, что рассматриваемые задачи представляют интерес для современного машиностроения, авиации и ракетной техники.

Значительная часть книги основана на результатах, полученных автором. Там, где используются результаты других авторов, в подстрочных примечаниях даны соответствующие ссылки. Э. Л. Позняк, Л. В. Епишев, Б. П. Макаров, Ю. Ю. Швейко, Г. В. Мишенков и Ю. В. Гаврилов выполнили для книги или проверили некоторые вычисления, а также предоставили некоторые не опубликованные ранее экспериментальные результаты. Перечисленным лицам автор выражает искреннюю признательность. Автор выражает благодарность А. И. Лурье за сделанные им ценные замечания по программе книги.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Эволюция постановки задачи об упругой устойчивости

Теория упругой устойчивости, начало которой было положено еще в работах Леонарда Эйлера, в настоящее время является весьма подробно разработанным разделом прикладной механики, располагающим рядом эффективных методов, большим количеством решенных задач и обширной литературой. Благоприятным фактором, предопределившим быстрое накопление материала в теории упругой устойчивости, несомненно, явилась весьма удачная концепция устойчивости и критической силы. В теории упругой устойчивости предполагается, что при достаточно малых нагрузках равновесие упругой системы устойчиво и что оно остается таковым вплоть до первой точки разветвления форм равновесия, за которой исходная форма равновесия становится неустойчивой. Критическая сила (или, в более общем случае, параметр группы сил) определяется при этом как наименьшее значение силы, при котором наряду с исходной формой равновесия имеют место смежные, весьма близкие к ней другие формы равновесия. Эту концепцию мы находим еще у Эйлера, который определял критическую силу как «силу, требующуюся для самого малого наклонения колонны» [1]). Такой подход, или, как мы его будем в дальнейшем называть, *метод Эйлера*, позволил свести вопрос об устойчивости формы равновесия к более

---

[1]) Эйлер Л., Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами либо максимума, либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, Гостехиздат, 1934, стр. 491.

простому вопросу об отыскании минимальных собственных значений некоторых краевых задач.

Плодотворность метода Эйлера в теории упругой устойчивости является бесспорной. Этот метод был распространен также и на задачи неупругой устойчивости, что нашло выражение в концепции «приведенного модуля». Вместе с тем метод Эйлера не является универсальным; он имеет вполне определенную область применения, выход за пределы которой уже не раз служил источником ошибок и недоразумений. Три обстоятельства должны быть отмечены в связи с критикой метода Эйлера в теории устойчивости.

Одно из них связано в первую очередь с развитием нелинейной теории тонких упругих оболочек. Уже в тридцатых годах нашего столетия было установлено систематическое и весьма существенное расхождение между значениями критических сил, которые дает для оболочек классическая теория, и опытными результатами. Оказалось, что для тонких оболочек важное значение приобретают начальные неправильности и нелинейные эффекты и что критические силы, соответствующие точкам разветвления, являются на самом деле лишь «верхними» критическими силами, с трудом реализуемыми даже при самых идеальных условиях эксперимента [1]).

Другое обстоятельство связано с развитием теории пластической устойчивости. В 1946 г. Шенли [2]) обратил внимание на то, что концепция «приведенного модуля» соответствует лишь некоторому частному предположению о поведении нагрузки и что для пластической стадии следует ввести определение критической силы, отличное от того, которое используется для упругой стадии. Исследования, проведенные в последнее время, выявили существенную роль поведения нагрузки в процессе потери устойчивости и, вообще, роль фактора времени, который в классической теории упругой устойчивости попросту не учитывался.

Третье обстоятельство, серьезно ограничившее область применения метода Эйлера, состоит в следующем. Еще

---

[1]) Вольмир А. С., Тонкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1956.

[2]) Шенли Ф., Теория неупругой колонны. Сб. перев. «Механика», № 2, ИЛ, 1951.

в 1928—1929 гг. Е. Л. Николаи [1]), исследуя одну из задач об упругой устойчивости скрученного стержня, обнаружил, что метод Эйлера приводит к парадоксальному результату. В рассмотренной им задаче вообще не существует форм равновесия, смежных с невозмущенной (прямолинейной) формой и, казалось бы, прямолинейная форма стержня остается устойчивой при всех значениях скручивающего момента. Этот результат был, однако, правильно истолкован как признак того, что *метод Эйлера* к данной задаче неприменим и должен быть заменен более общим методом исследования устойчивости — «методом малых колебаний». В дальнейшем было установлено, что здесь имеет существенное значение наличие потенциала у внешних сил [2]). Метод Эйлера применим, если внешние силы обладают потенциалом (т. е. если они являются консервативными силами), и становится, вообще говоря, непригодным, если потенциал у внешних сил отсутствует.

Основным методом исследования неконсервативных задач теории упругой устойчивости является *динамический метод*, основанный на рассмотрении колебаний системы вблизи положения равновесия. Это сближает теорию упругой устойчивости с общей теорией устойчивости движения, а также с ее приложениями в теории автоматического регулирования, в гидромеханике вязкой жидкости и других областях механики и техники. Метод Эйлера, сводящий задачу к анализу разветвлений форм равновесия системы, может рассматриваться как частный случай динамического метода.

Настоящая книга целиком посвящена неконсервативным задачам теории упругой устойчивости. Аэродинамические и гидродинамические нагрузки, силы, действующие на элементы турбомашин и электрических машин, нагрузки, возникающие в объектах и промежуточных звеньях систем автоматического

---

[1]) Николаи Е. Л., Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня, Изв. Ленингр. политехн. ин-та **31** (1928); К вопросу об устойчивости скрученного стержня, Вестн. прикл. матем. мех. **1** (1929). См. также: Николаи Е. Л., Труды по механике, Гостехиздат, 1955.

[2]) Среди последних работ по этому вопросу необходимо указать на исследования Циглера: Ziegler H., Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik, Ing.-Arch. **20**, № 1 (1952); Циглер Г., Об устойчивости упругих систем, Сб. «Проблемы механики» под ред. Х. Драйдена и Т. Кармана, вып. 2, ИЛ, 1959.

регулирования, в большинстве случаев представляют собой неконсервативные силы. Классическая теория упругой устойчивости развивалась главным образом в связи с потребностями промышленного, транспортного и гражданского строительства. Традиционные нагрузки классической теории упругой устойчивости — это потенциальные силы, обычно гравитационного происхождения («мертвые» нагрузки). Что касается неконсервативных задач упругой устойчивости, то они представляют интерес в первую очередь в связи с развитием современного машиностроения, авиации и ракетной техники.

Общие вопросы устойчивости упругих систем, нагруженных неконсервативными силами, обсуждались в работах Циглера [1]) и автора [2]). Представляет некоторый интерес полемика, имевшая место в более ранних статьях В. И. Реута и Б. Л. Николаи [3]). Среди работ, посвященных частным задачам, помимо указанных выше статей Е. Л. Николаи [4]), должны быть упомянуты работы Г. Ю. Джанелидзе, И. Е. Шашкова, К. С. Дейнеко и М. Я. Леонова, Морриса, Циглера, Треша, Бека и Пфлюгера [5]). К этому вопросу примыкает обширная литература по устойчи-

---

[1]) Ziegler H., цит. на стр. 11.

[2]) Болотин В. В., Вопросы общей теории упругой устойчивости, Прикл. матем. мех. 20, № 4 (1956); Некоторые проблемы теории упругой устойчивости, Тр. Третьего всесоюзн. матем. съезда, т. 1, Изд-во АН СССР, 1956; Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1956; О колебаниях и устойчивости стержней, находящихся под действием неконсервативных сил, Сб. «Колебания в турбомашинах», Изд-во АН СССР, 1959.

[3]) Реут В. И., О теории упругой устойчивости, Тр. Одесск. ин-та инж. гражд. и комм. стр-ва, вып. 1 (1939); Николаи Б. Л., О критерии устойчивости упругих систем, там же. К современной точке зрения примыкает точка зрения Б. Л. Николаи.

[4]) Николаи Е. Л. , цит. на стр. 11.

[5]) Джанелидзе Г. Ю., Об устойчивости стержня при действии следящей силы, Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 192 (1958); Шашков И. Е., Об устойчивости прямолинейной формы равновесия борштанги, Инж. сборн. 1, № 1 (1941); Шашков И. Е., Об устойчивости сжатого и скрученного призматического стержня с произвольной формой поперечного сечения, Инж. сборн. 7 (1950); Дейнеко К. С. и Леонов М. Я., Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня, Прикл. матем. мех. 19, № 6 (1955); Morris J., Torque and flexural stability of a cantile-

вости быстро вращающихся валов [1]). Большое количество работ посвящено важным задачам об устойчивости упругих элементов, находящихся в потоке газа [2]), среди которых в последнее время наибольшее внимание привлекают задачи устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке [3]). Ряд родственных задач, трактуемых, однако, с точки зрения механики систем с конечным числом степеней свободы, рассмотрен в книге Рокара [4]). Вопросы устойчивости конструкций при отсутствии потенциала внешних и внутренних сил обсуждались в книге Хоффа [5]).

Дальнейшие параграфы будут посвящены элементарному введению в существо изучаемого вопроса.

---

ver, Aircraft Engng. **23**, № 274 (1951); Ziegler H., Stabilitätsprobleme bei geraden Stäben und Wellen, Zeitschr. angew. Math. Phys., № 4 (1951); Troesch A., Stabilitätsprobleme bei tordierten Stäben und Wellen, Ing.-Arch. **20**, № 4 (1952); Beck M., Die Knicklast der einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes, Zeitschr. angew. Math. Phys. **3**, № 3 (1952); Pflüger A., Zur Stabilität des tangential gedrückten Stabes, Zeitschr. angew. Math. Mech. **35**, № 5 (1955).

[1]) Капица П. Л., Устойчивость и переход через критические обороты быстро вращающихся роторов при наличии трения, Журн. техн. физ. **9**, № 2 (1939); Диментберг Ф. М., Изгибные колебания вращающихся валов, Изд-во АН СССР, 1959; Болотин В. В., Исследование автоколебаний гибкого вала, вызванных действием внутреннего трения и родственных факторов, Научн. докл. высш. школы, сер. «Машиностроение и приборостроение», № 4, 1958; Болотин В. В., Нелинейные колебания валов за критическими скоростями вращения, Сб. «Проблемы прочности в машиностроении», вып. 1, Изд-во АН СССР, 1958.

[2]) См., например, книгу: Бисплингоф Р. Л., Эшли Х. и Халфмэн Р. Х., Аэроупругость, ИЛ, 1958.

[3]) Болотин В. В., Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости, Инж. сборн. **24**, (1956); Hedgepeth J., On the flutter of panels at high Mach numbers, Journ. Aeron. Sci. **23**, № 6 (1956); Мовчан А. А., Об устойчивости панели, движущейся в газе, Прикл. матем. мех. **21**, № 2 (1957); Болотин В. В., О критических скоростях в нелинейной теории аэроупругости, Научн. докл. высш. школы, сер. «Машиностроение и приборостроение», № 3, 1958; Болотин В. В., Гаврилов Ю. В., Макаров Б. П. и Швейко Ю. Ю., Нелинейные задачи устойчивости плоских панелей при больших сверхзвуковых скоростях, Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1959; Болотин В. В., Нелинейный флаттер пластин и оболочек, Инж. сборн. **28** (1960).

[4]) Рокар Н., Неустойчивость в механике, ИЛ, 1959.

[5]) Хофф Н., Продольный изгиб и устойчивость, ИЛ, 1955.

§ 2. Продольный изгиб центрально сжатого стержня

Для того чтобы разъяснить причины, приводящие в ряде случаев к постановке задачи устойчивости, отличной от классической постановки Эйлера, мы рассмотрим вначале известную из элементарного курса сопротивления материалов задачу о продольном изгибе сжатой стойки (рис. 1).

Найдем минимальное значение сжимающей силы P, при котором наряду с прямолинейной формой равновесия впервые становится возможной слегка искривленная форма.

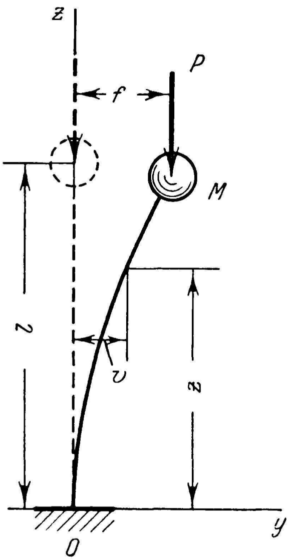

Рис. 1.

Выбрав оси координат, как показано на рис. 1, составим дифференциальное уравнение упругой линии для слегка искривленного стержня:

$$EJ\frac{d^2 v}{dz^2}=P(f-v). \tag{1}$$

Здесь EJ — жесткость сечения при изгибе, f — прогиб на конце стержня. Вводя, как обычно, обозначение

$$\frac{P}{EJ}=k^2, \tag{2}$$

запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d^2v}{dz^2}+k^2v=k^2f.$$

Его общий интеграл, очевидно, будет:

$$v=C_1\sin kz+C_2\cos kz+f. \tag{3}$$

Для нахождения трех постоянных C_1, C_2 и f имеем три граничных условия: $v(0)=0$, $v'(0)=0$ и $v(l)=f$. Подставляя выражение (3) в граничные условия, получим три соотношения:

$$\left.\begin{aligned} C_2+f&=0,\\ kC_1&=0,\\ C_1\sin kl+C_2\cos kl&=0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

представляющих систему трех линейных алгебраических уравнений относительно трех постоянных C_1, C_2 и f. Тривиальное решение этой системы $C_1=C_2=f=0$ соответствует прямо-