Зоммерфельд А.

Механика деформируемых сред.

Лекции по теоретической физике. Том II.

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
З-83

Зоммерфельд А.
З-83 Механика деформируемых сред.: Лекции по теоретической физике. Том II. / Зоммерфельд А. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 492 с.

ISBN 978-5-458-35345-8

С изданием настоящей книги советский читатель по- лучает в русском переводе еще один том «Лекций по теоретической физике» известного немецкого физика

ISBN 978-5-458-35345-8

© Издание на русском языке, оформление «YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка, «Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ство их посвящено немецким механикам и физикам, роль же ученых других стран освещается весьма не полно. Это в первую очередь относится к нашим отечественным ученым. Совершенно не отмечена роль великих создателей теории полета аэроплана—Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина (фамилия первого упомянута лишь один раз вместе с фамилией второстепенного механика Кутта, а фамилия второго не упоминается вовсе). Нет никаких указаний на работы ученых советского периода, в том числе на работы А. Н. Колмогорова, А. Н. Обухова и др., в значительной степени выяснивших физическую картину турбулентности. Читателю, специально интересующемуся вопросами истории механики, можно порекомендовать сборник «Механика в СССР за 30 лет», М.—Л., 1950.

В целом книга Зоммерфельда представляет интерес для широкого круга физиков, математиков и механиков, а также научных работников, аспирантов и студентов.

Е. М. Лифшиц.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Увеличение объема второго тома по сравнению с первым[1]) произошло за счет довольно полного изложения в нем необходимых математических методов, которые часто выделяются в отдельный курс «Введение к теоретической физике». Как уже говорилось в предварительных замечаниях к первому тому, более точным названием второго тома было бы: «Механика системы с бесконечным числом степеней свободы». В этом случае вместо обыкновенных дифференциальных уравнений, которые описывают законы механики систем с конечным числом степеней свободы, здесь используются уравнения в частных производных, а вместо векторной алгебры—векторный анализ, краткое изложение которого дается в гл. I. Кроме того, излагаются основы тензорного анализа, являющегося необходимым инструментом в теории упругого тела и вязкой жидкости. Это изложение проделано не только для декартовых координат, но и, в известной степени, для ортогональных криволинейных координат.

Здесь уместно перечислить некоторые вопросы, которые, как я полагаю, изложены мною полнее, чем в элементарных учебниках.

В гл. I, § 2, доказывается, что операция rot представляет собой аксиальный вектор (антисимметричный тензор) и поэтому его компоненты правильнее обозначать двумя индексами.

В гл. III, § 16, следуя Осборну Рейнольдсу, вводится два закона подобия и два соответствующих инварианта, а именно, обычное число Рейнольдса $\mathcal{R}$ дополняется

---

[1]) Sommerfeld A., Mechanik, 1944. (См. перевод: Зоммерфельд А., Механика, ИЛ, 1947.—*Прим. перев.*)

безразмерной величиной S, характеризующей зависимость давления.

В § 15 этой же главы рассматривается квазиупругое тело (гироскопический эфир); оно также является сплошной средой и поэтому подчиняется основной теореме кинематики (см. § 1). Мы стремились здесь, разумеется, не к модельному объяснению уравнений Максвелла, а к тому, чтобы показать фундаментальное отличие электродинамики от механики.

В гл. V, § 27 и 28, дается полный расчет довольно сложных задач о кольцевых и корабельных волнах, для чего используется метод стационарной фазы (который представляет собой упрощение метода перевала).

В гл. VI более доступно излагаются задачи Гельмгольца—Кирхгофа об отображениях, но при этом не используются (в отличие от обычного метода) безразмерные величины, а с самого начала вводятся размеры пластинок, сопел и т. д. В § 32, следуя Мауэ, обобщаются рассмотрения вихревых цепочек Кармана на асимметричный случай (направление распространения не совпадает с направлением цепочки).

В гл. VII, § 36, коротко рассмотрена гидродинамическая теория смазки. В § 37 рассмотрена теория ударных волн Римана, а также приводятся результаты для некоторых случаев, которые поддаются элементарному расчету. Существенные вопросы, связанные с проблемой турбулентности, кратко изложены в § 38. Там же излагается математическая модель турбулентности Бургерса.

В гл. VIII, § 43, в задаче о деформации винтовой пружины рассматриваются одновременно изгиб с кручением. В § 44 на примере упругого параллелепипеда показана роль граничных условий и сделаны краткие замечания по поводу квантовой термодинамики твердого тела.

Октябрь 1944 г.

А. Зоммерфельд.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании в отличие от первого, согласно первоначальному плану, к гл. VII и VIII добавлены задачи. Общее тензорное исчисление дано в книге в качестве приложений, причем мы ограничились случаем трех измерений и ортогональных элементов длины. Еще в предисловии к первому изданию этого же, второго, тома было указано, что здесь будут довольно полно излагаться математические методы теоретической физики. Поэтому методы тензорного исчисления целиком здесь не опускаются, так как они оказались весьма плодотворными в общей теории относительности, несмотря на то, что (как будет показано в последнем приложении) они не дают упрощения при решении стоящих здесь перед нами частных задач по сравнению с простыми методами векторного анализа.

Рассмотрение вопроса о турбулентности, которое еще в первом издании причинило мне много забот, пришлось пересмотреть на основе новых, еще не опубликованных работ Вейцзекера и Гейзенберга. Мое давно составившееся мнение о том, что можно достичь цели путем интегрирования уравнений Навье—Стокса в их полной нелинейной форме, в особом случае «изотропной турбулентности», исследованном этими двумя авторами, не подтвердилось; здесь, как и в кинетической теории газов, оказались плодотворными статистические методы. Конечно, было невозможно полностью отразить эти новые результаты, но прежние представления были во многих местах исправлены в соответствии с новой точкой зрения. Все остальные изменения носят более формальный характер.

Мюнхен, август 1948 г.

А. Зоммерфельд.

Глава I

КИНЕМАТИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

§ 1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА КИНЕМАТИКИ

В начале своей статьи «Об интегралах гидродинамических уравнений, отвечающих вихревым движениям»[1], Гельмгольц устанавливает следующую теорему: наиболее общее движение достаточно малого элемента деформируемого (т. е. не твердого) тела может быть представлено в виде суммы:

1) *параллельного переноса,*

2) *вращения,*

3) *растяжения в трех взаимно перпендикулярных направлениях.*

Доказательство основано на разложении в ряд Тейлора относительного смещения двух соседних точек по первоначальным разностям их координат.

Пусть P — точка рассматриваемого элемента объема; x, y, z — ее координаты в прямоугольной системе, начало которой O лежит внутри элемента объема (в общем случае движения тела обе точки P и O изменят свое положение); ξ, η, ζ и ξ_0, η_0, ζ_0 — соответственно координаты точек P и O после смещения. Согласно формуле Тейлора, имеем

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + \frac{\partial\xi}{\partial x}x + \frac{\partial\xi}{\partial y}y + \frac{\partial\xi}{\partial z}z + \ldots,\\ \eta &= \eta_0 + \frac{\partial\eta}{\partial x}x + \frac{\partial\eta}{\partial y}y + \frac{\partial\eta}{\partial z}z + \ldots,\\ \zeta &= \zeta_0 + \frac{\partial\zeta}{\partial x}x + \frac{\partial\zeta}{\partial y}y + \frac{\partial\zeta}{\partial z}z + \ldots\end{aligned} \qquad (1.1)$$

Для краткости введем обозначения

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = a_{11}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = a_{12}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = a_{21}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = a_{22}, \ \ldots \qquad (1.2)$$

---

[1]) Helmholtz H., Crelles Journ., 55, 25 (1858).

и запишем каждую из величин a_{ik} как сумму симметричного и антисимметричного по индексам членов

$$a_{ik} = \frac{a_{ik} - a_{ki}}{2} + \frac{a_{ik} + a_{ki}}{2}$$

Теперь (1.1) можно переписать в следующей форме:

$$\begin{array}{l|l|l}
\xi = \xi_0 & +0 + \frac{a_{12} - a_{21}}{2} y + \frac{a_{13} - a_{31}}{2} z & + a_{11} x + \frac{a_{12} + a_{21}}{2} y + \frac{a_{13} + a_{31}}{2} z, \\
\eta = \eta_0 & + \frac{a_{21} - a_{12}}{2} x + 0 + \frac{a_{23} - a_{32}}{2} z & + \frac{a_{21} + a_{12}}{2} x + a_{22} y + \frac{a_{23} + a_{32}}{2} z, \\
\zeta = \zeta_0 & + \frac{a_{31} - a_{13}}{2} x + \frac{a_{32} - a_{23}}{2} y + 0 & + \frac{a_{31} + a_{13}}{2} x + \frac{a_{32} + a_{23}}{2} y + a_{33} z,
\end{array} \tag{1.3}$$

где члены выше первого порядка по x, y, z опущены. Для полного изменения положения P введем символ $\mathbf{s}$; вертикальные линии в (1.3) показывают, что смещение $\mathbf{s}$ состоит из трех частных смещений $\mathbf{s}_0$, $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, или

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2. \tag{1.4}$$

Смещение $\mathbf{s}_0$ с компонентами ξ_0, η_0, ζ_0 одинаково для всех точек P элемента объема и поэтому представляет собой параллельный перенос.

Средняя часть (1.3)—$\mathbf{s}_1$ представляет собой вращение. Вводя вектор $\boldsymbol{\varphi}$ с компонентами

$$\varphi_x = \frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \quad \varphi_y = \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, \quad \varphi_z = \frac{a_{21} - a_{12}}{2} \tag{1.5}$$

и радиус-вектор $\overrightarrow{OP}$, равный $\mathbf{r}$, получаем

$$\mathbf{s}_1 = [\boldsymbol{\varphi}\mathbf{r}]. \tag{1.6}$$

Это смещение хорошо известно из кинематики твердого тела[1]) и соответствует бесконечно малому повороту $\boldsymbol{\varphi}$, ось и величина которого заданы компонентами φ_x, φ_y, φ_z.

Следует заметить, что $\boldsymbol{\varphi}$ является аксиальным вектором[2]), который отличается от обычного (полярного) вектора, характеризующего параллельный перенос.

---

[1]) См. «Механика» (т. I), равенство (22.3).

[2]) Более подробно об аксиальных векторах см. § 2.—*Прим. перев.*

Из рассмотрения смещения $\mathbf{s}_1$ с точки зрения кинематики твердого тела следует, что оно не вызывает изменения длины вектора $\overrightarrow{OP}$. Это можно показать независимо. Напишем выражение для квадрата длины $\overrightarrow{OP}$:

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = |\mathbf{r} + \mathbf{s}_1|^2 = |\mathbf{r}|^2 + 2(\mathbf{r}\mathbf{s}_1) + |\mathbf{s}_1|^2.$$

Но, согласно (1.6),

$$(\mathbf{r}\mathbf{s}_1) = (\mathbf{r}\,[\boldsymbol{\varphi}\mathbf{r}]) = (\boldsymbol{\varphi}\,[\mathbf{r}\mathbf{r}]) = 0.$$

Пренебрегая, как и в (1.3), членами второго порядка, находим

$$|\mathbf{r} + \mathbf{s}_1|^2 = |\mathbf{r}|^2 = r^2.$$

Отметим, что здесь, как и во всех последующих рассуждениях такого характера, выражение «без изменения» следует понимать как «без изменения в первом приближении».

Для того чтобы перейти от бесконечно малых величин к конечным, надо рассмотреть зависимость смещений от времени, что приводит к введению скоростей вместо смещений, а именно:

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}\Delta t, \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega}\Delta t, \tag{1.7}$$

или в компонентах

$$\begin{gathered} \xi = u\Delta t, \quad \eta = v\Delta t, \quad \zeta = w\Delta t; \\ \varphi_x = \omega_x\Delta t, \quad \varphi_y = \omega_y\Delta t, \quad \varphi_z = \omega_z\Delta t. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость рассматриваемой частицы, а $\boldsymbol{\omega}$ — вектор ее угловой скорости. Важный смысл последней величины, как вихря скорости, был впервые указан Гельмгольцем.

Вектор угловой скорости, согласно (1.8), (1.5) и (1.2), в системе x, y, z имеет следующие компоненты:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{1.9}$$

Более полное рассмотрение этого основного определения будет дано в следующем параграфе.

Перейдем теперь к третьей группе членов правой части выражения (1.3) — $\mathbf{s}_2$, которая характеризует деформируемость, в то время как два первых члена соответствуют движению тела как целого. Смещение $\mathbf{s}_2$ есть линейная векторная функция радиус-вектора $\mathbf{r}$. Обозначим компоненты $\mathbf{s}_2$ через ξ_2, η_2, ζ_2 и напишем их выражения в виде

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \varepsilon_{xx}x + \varepsilon_{xy}y + \varepsilon_{xz}z, \\ \eta_2 &= \varepsilon_{yx}x + \varepsilon_{yy}y + \varepsilon_{yz}z, \\ \zeta_2 &= \varepsilon_{zx}x + \varepsilon_{zy}y + \varepsilon_{zz}z. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Согласно (1.2) и (1.3), коэффициенты ε_{ik} выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial\zeta}{\partial z}, \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Величины ε_{ik} являются компонентами тензора деформации. Сам тензор может быть представлен в виде квадратной матрицы

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

В настоящем случае тензор симметричен (т. е. компоненты симметричны по отношению к главной диагонали, соединяющей верхний левый угол с нижним правым). Это непосредственно следует из определения третьего частного смещения $\mathbf{s}_2$ в (1.3). С другой стороны, система коэффициентов частного смещения $\mathbf{s}_1$ представляет собой антисимметричный тензор. Согласно определению, данному в (1.6) или в (1.3), группа членов между вертикальными линиями представляет собой матрицу

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{xy} & \varphi_{xz} \\ \varphi_{yx} & 0 & \varphi_{yz} \\ \varphi_{zx} & \varphi_{zy} & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{ik} = -\varphi_{ki}. \tag{1.12a}$$

Введенные обозначения $\varphi_z = -\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$ и т. д. устанавливают соответствие с обозначениями посредством двойных индексов в (1.5). Заметим, что антисимметричный тензор всегда может быть представлен в виде вектора, что, конечно, не является справедливым для симметричного тензора (см. § 2).

Так же как и для момента инерции [1]), при анализе тензора деформации воспользуемся понятием тензорной поверхности. Рассмотрим с этой целью скалярное произведение

$$(\mathbf{s}_2\mathbf{r}) = \varepsilon_{xx}x^2 + 2\varepsilon_{xy}xy + \varepsilon_{yy}y^2 + \ldots = f(x, y, z). \qquad (1.13)$$

Полагая $f(x, y, z) = \text{const}$, получим поверхность второго порядка, называемую также эллипсоидом деформации; этот термин не означает, что поверхность представляет собой обязательно эллипсоид, как, например, в случае тензора инерции. Она может являться любой поверхностью второго порядка: одно- или двуполостный гиперболоид или поверхность, вырождающаяся в пару плоскостей. Чтобы выяснить это, приведем тензор деформаций к главным осям. При введении соответствующих прямоугольных координат X_1, X_2, X_3 уравнение (1.13) принимает вид

$$F(X_1, X_2, X_3) = \varepsilon_1 X_1^2 + \varepsilon_2 X_2^2 + \varepsilon_3 X_3^2 = \text{const}. \qquad (1.14)$$

Коэффициенты ε_1, ε_2, ε_3 называются главными растяжениями (или сжатиями, если они отрицательны).

Согласно (1.13), линейную вектор-функцию (1.10) можно переписать в виде

$$\xi_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \zeta_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}. \qquad (1.15)$$

Введение главных осей координат соответственно упрощает линейную вектор-функцию:

$$\Xi_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_1} = \varepsilon_1 X_1, \quad \Xi_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_2} = \varepsilon_2 X_2, \quad \Xi_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_3} = \varepsilon_3 X_3, \qquad (1.16)$$

Главные компоненты смещения Ξ_i являются проекциями вектора $\mathbf{s}_2$ на главные оси X_i.

[1]) См. «Механика» (т. I), § 22.

Теорема Гельмгольца окончательно доказывается установлением соотношений (1.16), которые указывают на то, что третье частное движение состоит из трех растяжений (сжатий) во взаимно перпендикулярных направлениях по главным осям эллипсоида деформации. Действительно, любая точка P нашего элемента объема с координатами X_i в главной системе переходит, согласно (1.16), в точку P' с координатами

$$X_i + \Xi_i = X_i (1 + \varepsilon_i). \tag{1.17}$$

Понятие тензорной поверхности, введенное здесь формальным образом, в § 4 будет углублено, причем вместо координат x, y, z будут введены дифференциалы координат или соответствующие им направляющие косинусы [см. выражение (4.21)].

Перейдем теперь от линейных растяжений ε_i к объемному расширению Θ, которое определяется как удельное изменение объема (т. е. его изменение на единицу первоначального объема):

$$\Theta = \frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V}, \tag{1.18}$$

где ΔV — первоначальный, а $\Delta V'$ — растянутый (или сжатый) объем элемента. Легко вычислить объем элемента, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами, параллельными главным осям. Пусть одна из вершин совпадает с точкой O. Обозначим ребра до и после расширения соответственно через a_i и a_i'. Тогда

$$\Delta V = a_1 a_2 a_3, \quad \Delta V' = a_1' a_2' a_3'.$$

Согласно (1.17), $a_i' = a_i (1 + \varepsilon_i)$, поэтому

$$\Delta V' = \Delta V (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)$$

и, согласно (1.18),

$$\Theta \doteq (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{1.19}$$

(члены второго порядка опять опущены).

Представление Θ в виде (1.19) справедливо для любой декартовой системы координат. Возьмем, например, первоначальную систему x, y, z; в этом случае всегда будет справедливо соотношение

$$\Theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}. \tag{1.20}$$