

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

УДК 37.6
ББК 92
Щ61

Щербакова Ю.В.

Щ61 Теория вероятностей и математическая статистика /
Ю. В. Щербакова. — М. : Т8 Издательские технологии /
RUGRAM, 2020. — 160 с. — (Полезные конспекты).

ISBN 978-5-521-76425-9

Данная книга представляет собой полный конспект лекций по курсу «Теория вероятности и математическая статистика». Предназначена для студентов высших учебных заведений. Предложенный материал поможет подготовиться к сдаче зачета или экзамена.

BIC JN
BISAC EDU000000

ЛЕКЦИЯ №1. Случайные события

1. Основные понятия теории вероятностей

1. Испытания и события. Виды случайных событий.

Случайным называется событие, если при реализации установленной совокупности условий S оно может либо произойти, либо не произойти. При этом событие будет рассматриваться как результат испытания. Например, человек стреляет по мишени, которая разделена на четыре части. Тогда выстрел — это испытание, а попадание в конкретную область мишени есть событие.

Если появление одного из событий исключает появление других событий в одном и том же испытании, то события называются несовместными. Например, была подброшена монета, при этом появление герба исключает появление надписи. Значит события «выпадение герба» и «выпадение надписи» — совместные.

Если в результате испытания появится хотя бы одно из событий, то можно говорить, что несколько событий образуют полную группу. Следовательно, если события, которые образуют полную группу, попарно несовместны, то при испытании появится одно и только одно из этих событий.

Например, человек старался выстрелить по цели. Непременно случится одно из событий: попадание или промах. Значит можно сказать, что эти два несовместных события образуют полную группу.

Равновозможными называют события, если есть повод полагать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое. Например, при бросании монеты выпадение «герба» и выпадение надписи являются равновозможными событиями. Ведь монета правильной цилиндрической формы изготовлена из однородного материала, а присутствие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

2. Определение вероятности.

Вероятность события A — это отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновоз-

можных несовместных элементарных исходов, которые образуют полную группу:

$$P(A) = m / n,$$

где m — число элементарных исходов, которые благоприятствуют A ;
 n — число всех возможных элементарных исходов испытания.

При этом предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Следовательно, можно записать следующие три *свойства*.

1. Вероятность достоверного события равна единице. Следовательно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию, тогда $m = n$, и

$$P(A) = m / n = n / n = 1.$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю. Следовательно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию, тогда $m = 0$, и

$$P(A) = m / n = 0 / n = 0.$$

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей. Следовательно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания, тогда $0 < m < n$, стало быть, $0 < m / n < 1$, и

$$0 < P(A) < 1 \text{ и } 0 \leq P(A) \leq 1.$$

3. Основные формулы комбинаторики.

Перестановки — это комбинации, которые состоят из одних и тех же n различных элементов и отличаются только порядком их расположения. При этом число всех возможных перестановок равно

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

Размещения — это комбинации, которые составлены из n различных элементов по m элементов, отличающиеся составом элементов или их порядком. Число всех возможных размещений равно:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

Сочетания — это комбинации, которые составлены из n различных элементов по m элементов, отличающиеся хотя бы одним элементом. Число сочетаний равно C :

$$C_n^m = n!/(m!(n-m)!).$$

Следует заметить, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством:

$$A_n^m = P_m C_n^m.$$

Правило суммы. Если определенный объект A может быть избран из совокупности объектов m способами, а второй объект B может быть избран n способами, то в таком случае брать или A , или B можно $m + n$ способами.

Правило произведения. В том случае если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в заданном порядке может быть выбрана mn способами.

4. Относительная частота. Устойчивость относительной частоты. Статистическая вероятность.

Относительная частота события — это отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A) = m / n,$$

где m — число появлений события; n — общее число испытаний.

Следует отметить, что для определения вероятности не обязательно, чтобы испытания производились в действительности. Для определения относительной частоты необходимо, чтобы испытания были произведены фактически.

Значит, можно сказать, что вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту — после опыта.

Например, сделали 25 выстрелов по цели, при этом было зарегистрировано 15 попаданий. Значит, относительная частота поражения цели равна:

$$W(A) = 15/25.$$

По словам математика В. Е. Гмурмана, в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Этим постоянным числом является вероятность появления события.

За статистическую вероятность события принимают относительную частоту или число, близкое к ней.

В том случае, если событие достоверно, то $m = n$, а относительная частота равна:

$$m / n = n / n = 1.$$

Значит, статистическая вероятность достоверного события равна единице.

Если событие невозможно, то $m = 0$, а относительная частота равна:

$$0 / n = 0.$$

Следовательно, статистическая вероятность невозможного события равняется нулю.

Для любого события $0 \leq m \leq n$ относительная частота равна:

$$0 \leq m / n \leq 1.$$

Другими словами, статистическая вероятность любого события лежит в пределах между нулем и единицей.

Для наличия статистической вероятности события A необходимо:

- 1) чтобы была возможность производить ограниченное число испытаний, в каждом из которых событие A наступает или не наступает;
- 2) чтобы существовала устойчивость относительных частот появления события A в различных сериях довольно большого числа испытаний.

5. Геометрические вероятности.

Недостаток классического определения вероятности состоит в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Для того чтобы его преодолеть, вводят геометрические вероятности — вероятности попадания точки в область (например, отрезок, часть плоскости).

Допустим, отрезок l есть часть отрезка L , на котором наудачу поставлена точка. Это значит, что могут выполняться следующие предположения: точка может оказаться в любой точке отрезка L , вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L . Тогда вероятность попадания точки на отрезок l равна:

$$P = \text{Длина } l / \text{Длина } L.$$

Например, на отрезок OA длины L числовой оси O_x наудачу поставлена точка $B(x)$, и необходимо найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую $L/3$. Пусть вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси, тогда можно разбить отрезок OA точками C и D на три равные части. Решение будет верно, если точка $B(x)$ попадет на отрезок CD длины $L/3$. В этом случае вероятность равна:

$$P = (L/3) / L = 1/3.$$

Допустим, плоская фигура k является частью плоской фигуры K , на которую наудачу поставлена точка. Это значит, что могут выполняться следующие предположения: поставленная точка может оказаться в любой точке фигуры K , при этом вероятность попадания брошенной точки на фигуру k пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно K , ни от формы k . Тогда вероятность нахождения точки в фигуре k равна:

$$P = \text{Площадь } k / \text{Площадь } K.$$

2. Теорема сложения вероятностей

1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Событие, включающее появление события A , или события B , или обоих этих событий, называется *суммой $A + B$ двух событий A и B* . Если два события A и B являются несовместными, то $A + B$ есть событие, включающее появление одного из этих событий.

Событие, заключающееся в появлении хотя бы одного из событий, называется *суммой нескольких событий*. К примеру, событие $A + B + C$ заключается в появлении одного из событий: A , B , C , A и B , A и C , B и C , A и B и C .

Пусть события A и B являются несовместными, и известны вероятности этих событий. С помощью теоремы сложения можно узнать, как найти вероятность того, что наступит либо событие A , либо событие B .

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, неважно какого, равняется сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Доказательство. $m_1 + m_2$ есть число элементарных исходов, которое благоприятствует наступлению или события A , или события B . Поэтому

$$P(A + B) = (m_1 + m_2) / n = m_1 / n + m_2 / n,$$

где n — общее число допустимых элементарных исходов испытания;

m_1 — число исходов, которые благоприятствуют событию A ;

m_2 — число исходов, которые благоприятствуют событию B .

Причем, если

$$m_1 / n = P(A) \text{ и } m_2 / n = P(B),$$

то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, неважно какого, равняется сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Доказательство. Пусть даны три попарно несовместных события A , B и C . Значит, появление одного из них равнозначно наступлению одного из двух событий, $A + B$ и C , поэтому:

$$P(A + B + C) = P[(A + B) + C] = P(A + B) + P(C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

2. Полная группа событий. Противоположные события.

Теорема. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, которые являются полной группой, равняется единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Доказательство. Поскольку появление одного из событий полной группы достоверно, и вероятность достоверного события равняется единице, то

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1.$$

Если два произвольные события полной группы являются несовместными, в этом случае пользуются теоремой сложения:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Следовательно, приравняв последние два равенства, получим:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Например, директор школы принимает конверты с контрольными работами из городов A , B и C . Вероятность получения пакета из города A равна 0,6, из города B — 0,1. События «конверт получен из города A », «конверт получен из города B », «конверт получен из города C » есть полная группа. Тогда сумма вероятностей этих событий равна единице, т. е. $0,6 + 0,1 + p = 1$, тогда вероятность того, что очередной конверт будет получен из города C равна $p = 1 - 0,7 = 0,3$.

Два события, которые единственно возможны и образуют полную группу, называются *противоположными*. A — одно из двух противоположных событий, а другое $\bar{A}$.

Например, при стрельбе попадание и промах — противоположные события, где A — попадание, то $\bar{A}$ — промах.

Теорема. Сумма вероятностей событий, которые противоположны, равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Доказательство. Противоположные события образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна единице.

Если p — вероятность одного из двух противоположных событий, то q — вероятность другого события. Следовательно,

$$P + q = 1.$$

Если требуется решить задачу на отыскание вероятности события A , то иногда лучше сначала найти вероятность события $\bar{A}$, а потом вычислить искомую вероятность по формуле

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

3. Принцип практической невозможности маловероятных событий.

Принцип практической невозможности маловероятных событий заключается в следующем: если случайное событие очень маловероятно, то практически можно полагать, что в единичном испытании это событие не наступит.

Уровень значимости — это достаточно малая вероятность, при которой можно полагать, что событие практически невозможно. Как правило, на практике принимают уровни значимости, пределы которых равны 0,01 и 0,05, причем уровень значимости 0,01 называется однопроцентным.

Также с помощью проанализированного принципа можно делать предсказания не только о событиях, которые имеют малую вероятность, но и о событиях, вероятность которых примерно равна единице. В самом деле, если у события A вероятность близка к нулю, то вероятность противоположного события $\bar{A}$ близка к единице.