

Э. Кокер

Оптический метод исследования напряжений

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Э1

Э1 **Э. Кокер**
Оптический метод исследования напряжений / Э. Кокер – М.: Книга по Требованию, 2020. – 644 с.

ISBN 978-5-458-26486-0

Книга Кокера и Файлона "Оптический метод исследования напряжений" представляет весьма большой научный и практический интерес. Авторы этой книги, видные специалисты в области теории упругости и оптического метода, собрали и привели в систему весьма обширный и разнообразный материал, полученный как ими, так и другими исследователями. Этот материал охватывает и теорию оптического метода и его практические приложения. Значение оптического метода для инженера громадно. Этот способ позволяет определять напряжения в моделях таких деталей, для которых нет пока возможности получить решения другим путем. В большинстве случаев переход от модели к действительной конструкции может быть сделан достаточно надежно. И для тех задач, которые поддаются теоретическому освещению, этот метод позволяет проверить правильность исходных предпосылок и граничных условий. Необходимо лишь иметь в виду, что для тех случаев, когда мы имеем на практике значительную концентрацию напряжений, с переходом за предел текучести, оптический метод дает повышенную величину напряжений и, стало быть, повышенный коэффициент концентрации. К основному тексту Кокера и Файлона добавлена статья, написанная Д. К. Кноллем, освещающая некоторые новые вопросы этого метода.

ISBN 978-5-458-26486-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2020
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2020

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Книга Кокера и Файлона „Оптический метод исследования напряжений“ (A Treatise on Photo-Elasticity) представляет весьма большой научный и практический интерес. Авторы этой книги, видные специалисты в области теории упругости и оптического метода, собрали и привели в систему весьма обширный и разнообразный материал, полученный как ими, так и другими исследователями.

Этот материал охватывает и теорию оптического метода и его практические приложения.

Значение оптического метода для инженера громадно. Этот способ позволяет определять напряжения в моделях таких деталей, для которых нет пока возможности получить решения другим путем. В большинстве случаев переход от модели к действительной конструкции может быть сделан достаточно надежно. И для тех задач, которые поддаются теоретическому освещению, этот метод позволяет проверить правильность исходных предпосылок и граничных условий.

Необходимо лишь иметь в виду, что для тех случаев, когда мы имеем на практике значительную концентрацию напряжений, с переходом за предел текучести, оптический метод дает повышенную величину напряжений и, стало быть, повышенный коэффициент концентрации.

В ближайшее время несомненно установки для изучения напряжений этим методом станут основным оборудованием для исследовательских и учебных лабораторий по сопротивлению материалов и теории упругости. Предлагаемая книга окажет большую помощь при работе в этой области.

К основному тексту Кокера и Файлона добавлена статья, написанная *Д. К. Кноллем*, освещающая некоторые новые вопросы этого метода.

Так как с момента выхода английского издания литература по оптическому методу увеличилась, то, помимо библиографии, приведенной в подлиннике, приложен перечень новой литературы, составленный библиотекой Центрального котлотурбинного института.

Главы I и III редактировал проф. *А. П. Афанасьев*, главы II, IV, V, VI, VII и VIII — проф. *Н. М. Беляев*.

Н. Беляев.

7/XII-1985 г. Ленинград.

ВВЕДЕНИЕ.

Чтобы дать читателю представление о расположении материала и содержании отдельных глав настоящей книги, полезно изложить общий план этой работы.

Поскольку оптика является одной из основ оптического метода, представляется необходимым изложить главнейшие данные этой отрасли науки.

В главе I дано теоретическое изложение оптики в соответствии с электромагнитной теорией света, как наиболее подходящей для данного случая.

В последние годы установлено, что целый ряд фактов не согласуется с этой теорией, но пока нет другой, которая соответствовала бы всем наблюдающимся явлениям.

К счастью, это отсутствие законченной теории света не представляет затруднений при изучении тех явлений, с которыми приходится встречаться в применении оптического метода.

Изучение упругих деформаций материала является вторым основным предметом, который рассмотрен в начале книги, а именно в главе II; однако это изучение ограничивается лишь случаем плоской задачи, для которой и приложим оптический метод.

Почти совершенно в стороне оставлена обширная область задачи трех измерений, а также область пластических деформаций, теория которых еще слабо разработана.

Применение криволинейных координат при дальнейшем изложении повлекло необходимость включения основ этой теории.

Содержание главы III представляет значительную ценность. Эта глава дает исторический обзор последовательного развития применения оптического метода, начиная с открытия Брюстера до настоящего времени.

Эта глава представляет собой законченное целое и введена как дополнение к двум предыдущим.

Остальная часть книги рассматривает ряд проблем как теоретических, так и имеющих чисто практический интерес, в которых применение оптического метода позволило выяснить характер плоского напряженного состояния, вызванного нагрузкой или определенной деформацией.

Эти проблемы можно было бы классифицировать по разным признакам; после обсуждения было решено разбить их на группы таким образом, чтобы они соответствовали интересам отдельных категорий читателей.

Глава IV рассматривает ряд проблем из области плоской задачи при прямолинейных и криволинейных контурах, а именно: напряжения в толстостенных цилиндрах с концентрично и эксцентрично расположенными поверхностями, изгиб круговых колец, распределение напряжений, вызванное приложением сосредоточенной силы в вершине клина, — задача, которая служит исходным пунктом при рассмотрении работы резцов.

Далее здесь рассмотрены задачи по определению напряжений при растяжении и изгибе клинообразных тел, элементарные случаи контактных напряжений и распределение напряжений, вызванных сосредоточенной силой или парой в бесконечно простирающейся пластинке.

Изгиб прямых или слегка искривленных балок представляет весьма большой интерес с теоретической и практической точек зрения; поэтому в главе V собраны данные главнейших теоретических исследований в этой области вместе с некоторыми

рыми результатами экспериментальных работ относительно влияния резкого изменения сечений.

Широкое распространение в конструкциях отверстий круговой или иных форм представляет громадное, едва затронутое, поле для теоретических исследований и для экспериментов при помощи оптического метода.

Обзор результатов, полученных до сих пор в этой области, приведен в главе VI. Рассмотрено влияние одного или нескольких отверстий на напряжения в растянутых элементах; учтено действие болта, передающего давление на края отверстия.

Как известно, распределение напряжений в пластинке со многими отверстиями зависит в некоторой степени от величины коэффициента Пуассона η , если только равнодействующая усилий, приложенных к контуру какого-нибудь из отверстий, не равна нулю; поэтому оказалось необходимым полностью изложить теорию смещений, которая является основой для решения подобных задач, а также показать, как результаты, полученные при рассмотрении распределения напряжений в одном материале, могут быть распространены на конструкцию из другого материала. Точно так же в этой главе нашло себе место изложение теории и соответствующих экспериментов, относящихся к влиянию на распределение напряжений эмпирического отверстия, с переходом к пределу для оценки влияния трещин.

Для инженера представляет весьма большую ценность научное обоснование методов исследования материалов. Это—область, в которой применение оптического метода может принести большую пользу путем раскрытия распределения напряжений и получения количественных данных для многих из обычных опытов.

В главе VII рассмотрено влияние различной формы головок в стандартных образцах на растяжение; здесь же выяснено, как отражается на распределении напряжений система захватов для цилиндрических образцов.

В этой же главе изучены стандартные методы испытаний цемента на растяжение и сжатие, включая теоретическое исследование распределения напряжений при сжатии кругового цилиндрического образца. Этот опыт очень часто применяется при испытании самых разнообразных материалов.

Далее изучены несколько запутанные по своему характеру опыты с испытанием дерева на раскалывание, испытания на перерезывание, ударная проба, а также влияние на испытание материалов царапин и надрезов на образцах.

Из изложенного ясно, что целый ряд рассмотренных выше задач может встретиться в еще более усложненном виде при изучении различных конструкций и машин; поэтому в последней главе приведены некоторые данные о применении оптического метода к решению подобных сложных задач.

В первую очередь привлекает внимание ряд задач из области плоских стержневых систем; здесь изложены принципы динамического подобия, которые позволяют использовать для действительной конструкции результаты, полученные для моделей; далее приведены результаты исследований при помощи оптического метода целого ряда статически-неопределеных конструкций.

Другая отрасль этих исследований относится к области весьма сложных и мало изученных задач, встречающихся в конструкциях зданий, как то: влияние оконных и дверных проемов, работа карнизов, фундаментов.

Кратко описаны возможности, которые представляет применение оптического метода для проектировщика конструкций и машин; описаны полученные при помощи этого метода картины распределения напряжений в отдельных деталях — зубчатых колесах, гайках, болтах, фланцевых соединениях и подобных элементах.

Очевидно, объем последней главы мог бы быть значительно увеличен, так как работа в этой области все развивается, но уже и сказанного достаточно, чтобы показать, какие возможности раскрывает применение оптического метода в этом направлении.

Необходимо обратить внимание на порядок нумерации параграфов, формул и рисунков. Всюду принята десятичная система нумерации. Целая часть нумера обозначает главу, первые две цифры за точкой обозначают номер параграфа внутри

ВВЕДЕНИЕ

главы; следующие же цифры указывают последовательную нумерацию формул и чертежей внутри параграфа. Таким образом фиг. 4.344 обозначает четвертую фигуру тридцать четвертого параграфа четвертой главы; формула (4.3162) обозначает формулу тридцать первого параграфа четвертой главы, которая идет после (по смыслу, а не всегда по месту в тексте) формул (4.316) и (4.3161) и предшествует формулам (4.3163) и (4.317).

ГЛАВА I.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА.

§ 1.01. Природа света.

Свет является возмущением, распространяющимся в пространстве, подобно распространению волн на поверхности воды. В природе волновые возмущения бывают различных видов: так например, волны могут распространяться вдоль натянутой струны, волна может быть *поперечной*, т. е. смещение каждой частицы струны происходит все время перпендикулярно к струне (см. фиг. 1.011), или она может быть *продольной*, т. е. смещение частицы происходит по направлению длины струны. На фиг. 1.012 изображена такая волна в струне. Короткие линии, пересекающие AB , предполагаются равноотстоящими при спокойном состоянии струны. На фиг. 1.011 и 1.012 волна представлена „изолированной“, т. е. колебание ограничено длиной PQ и движется без изменения формы вдоль струны.

Звуковые волны в воздухе являются продольными волнами. Смещение происходит в направлении распространения, и волна в своем движении вызывает в слоях попеременное сжатие и растяжение, перемещающиеся вместе с волной.

Световые волны, наоборот, принадлежат к поперечным волнам. В этом случае колебание является вектором, который направлен перпендикулярно к направлению распространения волны.

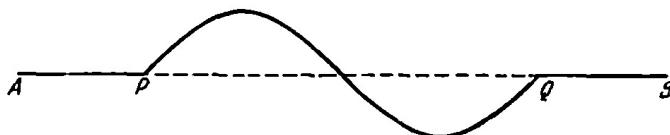
Мы не должны, однако, принимать световой вектор обязательно за „смещение“, хотя (как и любой вектор) он может изображаться смещением.

Современная физика¹ рассматривает свет как распространяющееся в пространстве электромагнитное возмущение. Согласно этой теории существует два вектора, оба направленные перпендикулярно как к движению волны, так и друг к другу, а именно электрическая сила и магнитная сила. Любой из них может быть принят за световой вектор.

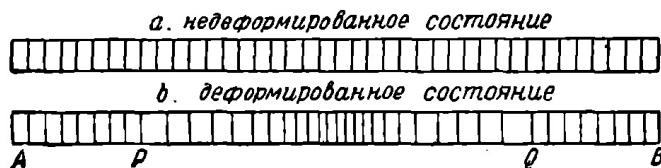
§ 1.02. Период, частота, длина волны.

„Изолированная“ волна, представленная на фиг. 1.011 и 1.012, редко встречается в природе. Волны возникают обычно при периодическом возмущении в „источнике“ и это периодическое возмущение дает периодическую волну с длинными рядами гребней и впадин.

Такой „источник“ нормально будет порождать расходящиеся сферические



Фиг. 1.011.



Фиг. 1.012.

¹ Вопросы, относящиеся к квантовой теории, не связаны с исследованиями, которыми мы будем заниматься; поэтому в дальнейшем мы не будем касаться этой теории.

волны. По мере их продвижения радиус сферы увеличивается и любая ограниченная часть волны становится практически плоской, так что возмущение будет одинаковым для всех точек плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны.

Пусть это „направление“ распространения волны будет осью x и пусть c будет скоростью распространения возмущения. При $t=0$ пусть возмущение y будет выражаться уравнением

$$y = f(x). \quad (1.021)$$

За некоторое время t возмущение распространяется вперед на расстояние ct , т. е. возмущение в точке $x = x' + ct$ будет таким же, как возмущение в точке $x = x'$ при $t = 0$.

Следовательно в момент t возмущение y на расстоянии x выражается формулой

$$y = f(x') = f(x - ct). \quad (1.022)$$

Уравнение (1.022) является основным уравнением для распространяющейся вперед плоской волны.

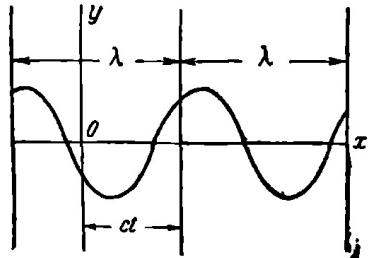
Подобно этому основное уравнение для волны, распространяющейся в противоположном направлении, будет

$$y = f(x + ct). \quad (1.023)$$

Уравнения (1.022) и (1.023) применимы для одиночных волн или для отдельных групп волн.

В случае чисто периодического возмущения функция $f(x)$ должна быть периодической по отношению к x , т. е. ее значения должны повторяться через определенный промежуток длины.

Наименьшая величина этого промежутка (длина от гребня до гребня или от впадины до впадины) называется *длиной волны*; в этой главе мы будем обозначать ее обычно через λ . График такой периодической волны показан на фиг. 1.02.



Время, требуемое на прохождение двух последовательных гребней (или двух последовательных впадин) через данную точку, называется *периодом волны* и обычно обозначается через τ .

Ясно, что период является тем промежутком времени, который необходим для того, чтобы возмущение переместилось на длину волны; таким образом

Фиг. 1.02.

$$\tau = \lambda/c \text{ или } \lambda = c\tau. \quad (1.024)$$

Частота возмущения измеряется числом колебаний в данной точке за секунду, т. е. $1/\tau$.

§ 1.03. Фронт волны и луч.

В случае плоских волн, плоскость $x = \text{const}$, в которой возмущение всегда одинаково во всех точках, называется *фронтом волны*. Если волна ограничена, начало возмущения достигает всех точек фронта волны в один и тот же момент.

При колебании, исходящем из точечного источника, волна распространяется наружу и, в случае изотропной среды, ее скорость будет одинаковой во всех направлениях. Таким образом, точки, до которых доходит та или другая часть возмущения в одно и то же время, лежат на сфере, центром которой является источник.

Если t — промежуток времени, протекший с того момента, когда некоторая часть возмущения была в источнике, то радиус сферы будет ct . Такая сфера будет в этом случае *фронтом волны*.

То, что мы называем лучом света, является путем, вдоль которого течет световая энергия. В случае изотропной среды, этот путь будет перпендикулярен к фронту волны и, следовательно, он будет совпадать с направлением распространения волны. Однако, в кристаллической среде, как будет показано ниже, дело обстоит иначе.

§ 1.04. Гармонические волны. Фазы и амплитуда.

Хорошо известно, что функция $f(x)$, являющаяся периодической относительно x , при периоде λ , может быть выражена рядом Фурье вида

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x + e_1) + a_2 \cos \frac{4\pi}{\lambda} (x + e_2) + \dots + \\ + a_r \cos \frac{2r\pi}{\lambda} (x + e_r) + \dots$$

Следовательно всякую периодическую волну, распространяющуюся со скоростью c , мы можем рассматривать как составленную из типичных членов вида:

$$a_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct + e_1), \\ a_2 \cos \frac{2\pi}{(\lambda/2)} (x - ct + e_2), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_r \cos \frac{2\pi}{(\lambda/r)} (x - ct + e_r).$$

Мы можем поэтому простую функцию вида

$$f(x - ct) = a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct + e) \quad (1.04)$$

считать основной функцией.

Волна, для которой возмущение дается выражением (1.04), называется гармонической волной. Постоянная величина a называется амплитудой колебания; а величина $\frac{2\pi}{\lambda} (x - ct + e)$ называется фазой.

В таком случае член $a_r \cos \frac{2\pi}{(\lambda/r)} (x - ct + e_r)$ представляет гармоническую волну с длиной волны λ/r . В дальнейшем мы всегда будем брать типичную основную световую волну вида (1.04).

§ 1.05. Поляризация.

Выше возмущение $f(x)$ измерялось его численной величиной. Однако, мы уже видели, что световое возмущение является вектором.

Если световая волна такого типа, что световой вектор всегда параллелен данному направлению, лежащему во фронте волны, то свет называется плоско поляризованным. Плоскостью поляризации будет тогда либо плоскость, проходящая через перпендикуляр к фронту волны и световой вектор, либо плоскость, перпендикулярная к световому вектору.

При обычном определении плоскости поляризации оказывается, что эта плоскость содержит направление магнитной силы и является перпендикулярной к направлению электрической силы. Таким образом, мы будем иметь первое или

второе из вышеуказанных определений, в зависимости от того, примем ли мы за основной световой вектор магнитную или электрическую силу.

Обычно электрическая сила принимается за световой вектор. Таким образом условились *плоскостью поляризации считать плоскость, перпендикулярную к световому вектору.*

Всякий раз когда направление светового вектора подчиняется определенному закону, мы говорим, что рассматриваемый свет *поляризован*.

Так например, если конец светового вектора описывает винтовую линию лежащую на круговом цилиндре, то говорят, что свет *поляризован по кругу*.

Естественный свет является таким, в котором направление светового вектора в любой точке не подчиняется никакому ограничению. Он может рассматриваться как смешение плоско поляризованных лучей со всевозможными азимутами поляризации.

§ 1.06. Различные виды света.

Точно так же, как частота звукового колебания определяет *высоту* звука, частота светового колебания определяет качество света, которое глаз воспринимает как *цвет*.

Частота ярко-желтого света, излучаемого парами натрия, свечение которого легко можно получить, помещая небольшое количество столовой соли в пламя горелки Бунзена, будет иметь 509,1 биллионов колебаний в секунду.

Наименьшая частота, которую человеческий глаз может воспринимать, равна приблизительно $390 \cdot 10^{12}$, что соответствует темно-красному цвету. Наибольшая частота равна приблизительно $770 \cdot 10^{12}$ и соответствует темно-фиолетовому цвету. Весь диапазон видимого света составляет таким образом приблизительно одну октаву, и в этом ряду цвета размещаются в порядке уменьшающейся частоты: фиолетовый, индиго, голубой, зеленый, желтый, оранжевый, красный; цвета переходят друг в друга с незаметной постепенностью.

Такая естественная последовательность цветов, расположенных вдоль полосы таким образом, что каждой линии, пересекающей перпендикулярно полосу, соответствует одна частота и один цвет, называется *спектром*; свет, соответствующий той или другой линии спектра, называется *монохроматическим* или *однородным*. *Белый* свет образуется из суммирования цветов всего спектра. Обыкновенный цветной свет обычно образуется из света, соответствующего неполному спектру; неполнота возникает или вследствие полного отсутствия частей спектра или недостаточности их интенсивности. Таким образом, обычные цвета являются *смешанными* в противоположность цветам спектра, которые рассматриваются как *чистые*.

В § 1.08 будет показано, что все виды электромагнитных колебаний (включаяющие и свет) распространяются в *безвоздушном пространстве* с одинаковой скоростью $3 \cdot 10^{10}$ см/сек. Поэтому часто бывает удобно различать различные чистые цвета по соответственной длине волн в пустоте; соотношение между длиной волны λ и частотой p выражается равенством (1.024), т. е.

$$\lambda = c/p,$$

где $c = 3 \cdot 10^{10}$.

Пользуясь этим соотношением, мы получаем длины волн видимого света:

краиного красного	$7700 \cdot 10^{-8}$ см
желтого натрового	$5890 \cdot 10^{-8}$ "
зелено-голубого	$5000 \cdot 10^{-8}$ "
краиного фиолетового	$3900 \cdot 10^{-8}$ "

Для выражения длины волн введена удобная единица, называемая единицей *Angström'a* или онгстрем — (Å). Он равен 10^{-8} см или 10^{-10} м; из этого послед-

нега соотношения она называется иногда также „десятой метра“. Длины волн видимого света в онгстремах выражаются четырехзначными числами.

Однако, мы знаем, что электромагнитные волны не ограничиваются светом, и известные в настоящее время длины волн значительно превышают длины волн видимого спектра.

На верхнем конце ряда длин волн мы имеем радио-волны, которые достигают нескольких сотен метров.

Далеко ниже самых коротких радио-волн мы имеем так называемые „инфракрасные“ или тепловые волны, которые продолжают видимый спектр кверху от 7700 Å.

Ниже крайнего фиолетового мы имеем „ультра-фиолетовые“ или актиничные лучи, которые воздействуют на фотопластинку, но не воспринимаются глазом. Эти лучи обнаружены теперь длиной приблизительно до 1000 Å.

Наконец, обнаружено, что лучи Рентгена являются лучами, имеющими крайне короткую длину волны, колеблющуюся от нескольких онгстремов до небольших долей онгстрема, в случае так называемых лучей гамма.

§ 1.07. Электромагнитные уравнения.

Вначале мы рассмотрим электромагнитное возмущение в вакууме.

Законы электромагнетизма сводятся к двум, известным под названием *вихревых*, соотношениям.

В эти соотношения входят четыре основных вектора:

- 1) напряжение электрического поля в некоторой точке, обозначаемое через E ;
- 2) полное электрическое смещение, или полная поляризация, обозначаемая через D ;

3) напряжение магнитного поля, обозначаемое через H ;

4) магнитная индукция, обозначаемая через B .

Термин „электрическое смещение“ включает как смещение „проводимости“, происходящее вследствие движения электрических зарядов, так и то, что обычно называется электрическим смещением в диэлектрике.

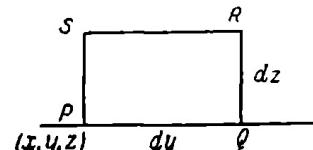
Полный электрический ток j определяется как изменение полного электрического смещения, отнесенное к единице времени. Он включает обычный электрический ток вместе с „током смещения“ Максвелла. Аналогично, магнитным током мы можем называть рассчитанное на единицу времени изменение магнитной индукции $\frac{dB}{dt}$. Тогда два вихревые соотношения выражаются следующим образом.

I. Полный электрический ток, проходящий сквозь замкнутый контур, равен интегралу напряжения магнитного поля по контуру, причем положительное направление прохождения сквозь контур и положительное направление обхода контура связаны правилом правой руки.

II. Полный магнитный ток, проходящий сквозь замкнутый контур, равен взятому с обратным знаком интегралу по контуру напряжения электрического поля, при том же условии относительно знаков, что и выше.

Для аналитического выражения этих соотношений, рассмотрим небольшую цепь $PQRS$ (фиг. 1.07), состоящую из прямоугольника со сторонами dy , dz в плоскости, параллельной плоскости yz . Тогда, при обозначении составляющих напряжения магнитного поля через H_x , H_y , H_z , интеграл напряжения магнитного поля вдоль $PQRS$ будет равен

$$H_x dy + \left(H_z + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \right) dz - \left(H_y + \frac{\partial H_x}{\partial z} dz \right) dy - H_x dz = dy dz \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right).$$



Фиг. 1.07.

Ток через контур будет

$$j_x dy dz.$$

Отсюда

$$j_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

и еще два аналогичных уравнения, которые в векторной форме дают

$$\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \operatorname{curl} \mathbf{H}. \quad (1.071)$$

Подобно этому, для второго вихревого соотношения получим:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\operatorname{curl} \mathbf{E}. \quad (1.072)$$

В дополнение к вышеприведенным соотношениям существуют еще два, которые выводятся непосредственно из уравнений (1.071) и (1.072), если каждое из них написать как совокупность трех уравнений.

Дифференцируя по x, y, z и складывая, мы получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \neq \frac{d}{dt} (\operatorname{div} \mathbf{D}) = 0, \quad (1.073)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = \frac{d}{dt} (\operatorname{div} \mathbf{B}) = 0; \quad (1.074)$$

„div“ обозначает „расхождение вектора“.

В курсах экспериментальной физики показывается, что $\operatorname{div} \mathbf{B}$ является плотностью магнитного вещества в данной точке. Но так как положительный и отрицательный магнетизмы в действительности физически неразделимы и все магнитное вещество может рассматриваться составленным из элементарных магнитов, то очевидно, что справедливо не только (1.074), но и

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.075)$$

Затем, из (1.073) мы получаем, что $\operatorname{div} \mathbf{D}$ — функция от x, y, z , независимая от времени.

Эта особая функция в случае электростатической задачи, т. е. отсутствия тока, известна как плотность электричества ρ . В общем случае мы можем считать ее плотностью электричества в некоторое произвольное начальное время.

Уравнения (1.071) и (1.072) сами по себе недостаточны для решения задачи, так как они дают только два соотношения между четырьмя векторами. Вводятся дополнительные соотношения между этими векторами, зависящие от природы материальных тел в поле.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с непроводниками. Мы можем поэтому пренебречь в \mathbf{D} частью, связанной с обычным электрическим током, так что \mathbf{D} сводится к обычному „электрическому смещению“ или „поляризации“; в таком случае, как известно,

$$\rho = \operatorname{div} \mathbf{D}, \quad (1.0761)$$

и так как в большинстве случаев мы будем иметь дело с незаряженными телами, мы обычно будем иметь

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (1.0762)$$

В обычных диэлектриках мы имеем следующие соотношения между электрическим смещением и напряжением электрического поля, а также между магнитной индукцией и напряжением магнитного поля:

$$\mathbf{D} = K \mathbf{E}, \quad (1.0771)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (1.0772)$$