

Стренг Г.

**Линейная алгебра и ее
применения**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С84

С84 **Стренг Г.**
Линейная алгебра и ее применения / Стренг Г. – М.: Книга по Требованию,
2024. – 460 с.

ISBN 978-5-458-26374-0

Книга отличается от традиционных руководств по линейной алгебре тем, что материал излагается в тесной связи с многочисленными приложениями. В виде отдельных глав представлены метод исключения Гаусса, ортогональные проекции, положительно определенные матрицы, линейное программирование и теория игр. Автор знаком советским читателям по переводу его (в соавторстве с Дж. Фиксом) «Теории метода конечных элементов» (М.: Мир, 1977). Книга, несомненно, окажется полезной математикам-прикладникам различных специальностей; она заинтересует также и преподавателей, аспирантов и студентов университетов и вузов, преподающих или изучающих линейную алгебру и ее приложения.

ISBN 978-5-458-26374-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

- корреляционная 251
- кососимметрическая 190, 401
- косозермитова 263, 264
- коэффициентов 19
- ленточная 52, 58
- Мура — Пенроуза 165
- невырожденная 41, 98
- неопределенная 295
- неотрицательная 232, 237, 238
- нижняя треугольная 31
- нормальная 32, 44, 94
- обратимая 44, 188
- обратная 32, 44, 94
- ортогональная 151, 258, 329
- ортонормированная 151
- отражения 141
- отрицательно определенная 236
- перестановки 40, 43, 70, 152
- плохо обусловленная 48, 324
- положительно определенная 178, 285, 287, 331
- полуопределенная 295
- потребление 237
- присоединенная 201
- проектирования 139, 415
- псевдообратная 110, 165
- ранга один 93
- симметрическая 54, 132
- с кратными собственными значениями 260, 268, 272, 417
- — различными собственными значениями 222, 224, 260, 272
- ступенчатая форма 69, 76
- транспонированная 55, 131
- трапециевидальная 65
- треугольная 31, 187, 270
- трехдиагональная 54, 336, 341
- унитарная 258, 264, 265
- Хессенберга 118, 336, 341
- хорошо обусловленная 48, 324
- элементарная 31
- эрмитова 256, 272
- эрмитовая к A 255
- эрмитово сопряженная 255

Метан 134

Метод взвешенных наименьших квадратов 176, 178

- Гаусса — Зейделя 345, 351
- Гивенса 301
- исключения Гаусса 11, 13, 31, 43, 74, 206
- — — с полным выбором ведущего элемента 50
- — — частичным выбором ведущего элемента 50, 51, 324
- Гаусса — Жордана 45, 75
- конечных разностей 53
- — элементов 309, 315, 316
- наименьших квадратов 126, 135, 137, 166, 174, 306
- переменных направлений 350
- последовательной верхней релаксации 346
- сопряженных градиентов 351
- Якоби 336, 344, 351

Минимум 279, 282

Минор 196

Мнимое число 226, 251, 263

Многомерный анализ 280

Многочлены 98, 407

- Лежандра 162, 164

Множители 33

- Лагранжа 378

Множитель, характеризующий сходимость 333, 334

Модуль 253

Молер 48

Мур 165, 182

Начальная задача 211

Невырожденность 68, 98, 122

Недоопределенная система 68

Нейман 48, 236, 269, 402, 403

Нейтральная устойчивость 211, 235, 245

Нелинейная задача о наименьших квадратах 145

Нелинейное убывание 236

Ненулевое решение 72

Необратимость во времени 244
 Неопределенная квадратичная форма 283
 — матрица 295
 Неотрицательная матрица 232, 237, 238
 Неотрицательное решение 384
 Неравенство Коши—Шварца—
 Буняковского 130
 — треугольника 133
 — Шварца 130, 133, 159
 Несовместная система 68, 126, 138
 Нетривиальная комбинация 77
 Неустойчивость 211, 235, 245
 Нижняя треугольная матрица 31
 Нобл 48
 Норма 324, 328, 330
 Нормальная матрица 274, 277
 Нормальные уравнения 137, 330
 Нулевая длина 178
 — строка 186
 Нулевой ведущий элемент 14, 39, 98, 206
 — вектор 64, 65
 — определитель 182
 Нуль-пространство 66, 72, 88, 105, 419
 Обобщенная задача на собственные значения 301, 304
 — обратная матрица 165
 Обобщенный собственный вектор 241, 417
 Образ 89
 Обратимая матрица 44, 188
 Обратимое отображение 97
 Обратная матрица 32, 44, 94
 — к произведению 44
 — — транспонированной 133
 — Мура — Пенроуза 165
 — формула 20
 — подстановка 14, 35
 Обратный степенной метод 333, 334
 Обусловленность 48
 Общее решение 74

Объединение 115
 Ограничения 360, 363, 379
 Однородная система 72
 Определитель 182
 — Вандермонда 191
 — матрицы перестановки 189, 191, 194, 206
 — свойства 185
 — формула 191, 194, 197, 218
 — Якоби 183, 207
 Оптимальный вектор 355, 377, 379
 Ортогонализация Грамма — Шмидта 127, 154, 162, 203, 309, 338
 Ортогональная матрица 151, 258, 329
 Ортогональное дополнение 107
 Ортогональные векторы 101, 102
 — подпространства 104
 — собственные векторы 257, 263, 265, 274
 Ортогональный базис 146
 Ортонормированная матрица 151
 Ортонормированные векторы 103, 147, 155
 — собственные векторы 258, 274
 Оси эллипсоида 293, 311
 Основная теорема линейной алгебры 92, 108
 Основные подпространства 86 119 256
 Отношение Релея 307, 309, 312 320 330, 334
 Отображение «на» 97, 409
 Отрицательно определенная квадратичная форма 283
 — — матрица 236
 — полуопределенная квадратичная форма 283
 Ошибка 134, 324, 325
 — округления 12, 47, 162, 227, 229
 Параболоид 305
 Пенроуз 165, 174
 Переменная невязки 357, 363
 Переопределенная система 126, 143
 Пересечение 114

- Перестановка 193, 209
 - строк 26, 36, 56, 186
- Пифагор 100, 153
- Плавающая точка 32
- Планирование производства 369
- Плохо обусловленная матрица 48, 324
- Площадь 207
- Погрешность (ошибка) 324, 325
- Подгонка данных 143, 163
- Подматрица 121
- Подобные матрицы 268
- Подпространство 64
- Подсчет числа действий 15, 36, 46, 58, 341
- Покер 405
- Полный выбор ведущего элемента 50
 - квадрат 282, 289
- Положительно определенная
 - квадратичная форма 281, 285
 - матрица 178, 285, 287, 331
 - полуопределенная квадратичная форма 283
- Полуопределенная матрица 295
- Полупространство 353
- Последовательность Фибоначчи 128, 135
- Почти периодическое движение 249
- Правая обратная матрица 44, 94
- Правило Крамера 185, 201
- Предельная стоимость 382
- Представление в виде матрицы 410
- Преобразование конгруэнтности 298
 - подобия 268, 277, 414, 420
 - Хаусхолдера 153, 336, 339
- Принцип максимина 311
 - минимума 304
 - неопределенности Гейзенберга 269
 - Релея 307
 - Релея — Ритца 315
- Присоединенная матрица 201
- Присоединенный вектор 418
- Проекция 109, 126, 136, 137, 148, 273
- Произведение ведущих элементов 57, 184, 191
 - матриц 25, 119, 413
 - определителей 188
 - псевдообратных матриц 176
- Пропускная способность разреза 390
- Пространство 64
 - столбцов 64, 89
 - строк 81, 87, 105
- Псевдообратная матрица 110, 165
 - — произведения 176
 - — формула 170, 173
- Разбиение на блоки 205
- Разделяющая гиперплоскость 385, 386
- Разложение определителя на алгебраические дополнения 196
 - Холецкого 291, 331
 - LDU 37, 38, 55
 - LU 12, 34, 70
 - $\bar{L}\bar{U}$ 120, 172
 - QR 157, 338
 - $Q_1\Sigma_2^T$ 170, 339
- Размерность 84
 - основных подпространств 92
- Разностное уравнение 53, 227
- Разрез сети 390
- Разрешимость системы 63
- Райнш 323
- Ранг 75, 77
 - подматрицы 121
 - произведения 120
- Расстояние 129
- Раус 246
- Ребро 361, 362
- Регрессионный анализ 126, 260
- Релаксационный множитель 346
- Релей 307, 315
- Ритц 315
- Ряды Фурье 160, 164
- Сверхубывание 243
- Свободные переменные 71, 88, 364
 - члены 18

Свойства определителя 185
 Сдвиг 334, 340
 Седловая точка 283, 309, 397
 Сетевые задачи 388
 — модели 388
 Сильвестр 298
 Симметрическая матрица 54, 132
 Симметрическое исключение 297
 Симплекс-метод 360, 361, 372, 379
 Сингулярное разложение 170, 330, 339
 Сингулярные числа 170, 330
 Скалярное произведение 20, 25, 102
 — взвешенное 178
 — в комплексном случае 254, 265
 — функций 160
 Слабая двойственность 377
 След 218,
 Смешанная стратегия 396, 399
 Собственное подпространство 214
 Собственные значения 182, 213, 263, 267, 268
 — кратные 260, 272, 417
 — различные 222, 224, 260, 272
 — функции 243
 Собственный вектор 213, 230, 257
 — обобщенный 241, 417
 Сопрягающий член 149
 Сопряженно транспонированная матрица 255
 Спектральная теорема 258, 271
 Спектральный радиус 344
 Среднее арифметическое 133, 150
 — геометрическое 133
 — значение 146
 Средняя ошибка 134, 142, 143
 Стандартный базис 147
 Стационарная точка 280
 Стационарное состояние 233, 244
 Степенные методы 323, 332, 334
 Ступенчатая форма матрицы 63, 76
 Стюарт 342
 Сумма подпространств 115, 118
 Существование решения 95"

Таблица для симплекс-метода 367
 Такер 379
 Теневые цены 382
 Теорема двойственности 376
 — Кэли — Гамильтона 271
 — о кругах Гершгорина 351
 — максимальной точке и минимальном разрезе 390
 — минимаксе 402
 — равновесии 379
 — разделяющей гиперплоскости 386
 Теория игр 395
 Торп 404
 Транспонированная матрица 55, 131
 — определитель 189
 — к обратной 133
 — произведению 131
 Трапецеидальная матрица 69
 Треугольная матрица 31, 187, 270
 Трехдиагональная матрица 54, 336, 341
 Угол 127, 265, 356, 361
 Узлы сети 388
 Уилкинсон 48, 323, 329, 342
 Умножение вектора на матрицу 19, 20
 — матриц 25
 Унитарная матрица 258, 264, 265
 Уравнение теплопроводности 243, 244
 Условие оптимальности 368
 Условия Куна — Такера 379
 — совместности невязок 379, 382, 398
 Устойчивость 212, 235, 245, 271
 Факторный анализ 260, 261
 Фибоначчи 228, 235
 Фикс 320
 Филиппов 276, 418
 Формула для ведущего элемента 204, 205
 — обратной матрицы 20
 — определителя 191, 194, 197, 218

— — псевдообратной матрицы 170, 173
 Форсайт 48
 Фредгольм 111
 Функциональное пространство 158, 159
 Функция стоимости 355, 360, 368
 Фурье 160, 164
 Характеристический многочлен 213, 217, 269
 Характеристическое уравнение 213, 217
 Хаусхолдер 153, 336, 339
 Хессенберг 118, 336, 341
 Хокней 350
 Холецкий 291, 300, 331
 Хорошо обусловленная матрица 48, 324
 Целевая функция 355
 Цена игры 397, 402
 Цепочка векторов 418
 Частичный выбор ведущего элемента 50, 324
 Частное решение 74
 Частота 215, 248
 Четная перестановка 206
 Численное интегрирование 99
 Число обусловленности 323, 325, 328

Шахматы 404, 406
 Шварц 130, 133, 159
 Ширина ленты 58 Шур 270
 Экономика 236, 238, 263, 376
 Экспонента от матрицы 239, 240, 244, 422
 Экспоненциальное решение 215, 239, 240, 244
 Элементарное преобразование 186
 Элементарные матрицы 31
 Эллипс 293
 Эллипсоид 294, 304, 311
 Эпидемия 234
 Эрмитова матрица 256, 272
 Эрмитова сопряженная матрица 255
 Ядро 89
 Якоби 336, 344, 351
 Якобиан 183, 207
 Янг 348
 «Ящичные» ограничения 389
 LDU -разложение 37, 38, 55
 LU -разложение 12, 34, 70
 $\bar{L}\bar{U}$ -разложение 120, 172
 QR -алгоритм (метод) 323, 332, 340, 341
 QR -разложение 157, 338
 $Q_1 \Sigma Q_2^T$ -разложение 170, 339

От редактора перевода

Традиционные курсы линейной алгебры, читаемые в высших учебных заведениях, и соответствующие учебные пособия, как правило, мало затрагивают прикладную сторону предмета. Но в то же время линейная алгебра служит основой всех методов вычислительной математики, являясь в этом смысле чисто прикладной наукой.

Предлагаемая вашему вниманию книга написана известным американским математиком Гильбертом Стренгом на основе курса лекций для студентов Массачусетского технологического института, который читался им с учетом именно этих обстоятельств, и это оказало существенное влияние как на стиль изложения материала, так и на его выбор. Например, в виде отдельных глав здесь представлены метод исключения Гаусса, положительно определенные матрицы и даже линейное программирование, и в то же время жорданова форма матрицы и линейные преобразования рассматриваются в виде кратких приложений. В книге рассматриваются также вопросы об ортогональном проектировании векторов на подпространства и дается представление о методе конечных элементов, который в настоящее время становится основным средством приближенного решения уравнений математической физики. Отдельная глава посвящена вычислениям с матрицами и, в частности, итерационным методам решения систем линейных алгебраических уравнений, играющим важную роль в вычислительной математике.

Каждая глава содержит большое число примеров и упражнений, которые также призваны способствовать развитию у читателя навыков в решении прикладных задач.

Написанная доступным языком, эта книга, несомненно, окажется полезной для широкого круга читателей: математиков-прикладников, аспирантов и студентов многих специальностей университетов и вузов. Она заинтересует также преподавателей курсов линейной алгебры — как с точки зрения методологии, так и с точки зрения максимальной приближенности теории к приложениям.

Перевод глав 1, 2, 6, 7 выполнен Ю. А. Кузнецовым, глав 3, 4, 5, 8 и приложений — Д. М. Фаге.

Г. И. Марчук

Предисловие

Я считаю, что линейная алгебра преподается сейчас слишком абстрактно. Конечно, это утверждение спорно и, быть может, слишком спорно, чтобы быть верным. Но я убежден, что настоящее руководство должно объяснять существо линейной алгебры и развивать математическое мышление читателей — ведь этот предмет столь же фундаментален, как математический анализ, столь же полезен и имеет такие же богатые приложения. Кроме того, линейная алгебра доступнее анализа, и это обстоятельство слишком важно, чтобы им пренебрегать.

Разумеется, нынешнее состояние дел с линейной алгеброй вполне объяснимо. Ее преподавание дает прекрасную возможность иллюстрировать точность математических рассуждений и построения доказательств. Это достоинство я сознаю, ценю и надеюсь сохранить, и мне всегда было приятно читать лекции именно в таком стиле. Однако, когда я начал экспериментировать в Массачусетском технологическом институте с различными вариантами курса, я обнаружил еще одно его достоинство: преподавание линейной алгебры не только позволяет иллюстрировать единство двух важнейших черт математики — абстрактности и приложимости, но и постоянно побуждает подчеркивать это единство.

Так повелось, что большинство изучающих линейную алгебру вязнет в абстракциях и не доходит до приложений. И очень многие студенты, особенно нематематических отделений, вовсе не выбирают этот курс. Даже самые способные наши студенты приобретают тенденцию к постижению абстракций, но остаются беспомощными в вычислениях — например, они решают системы линейных уравнений по правилу Крамера, а собственные значения понимают только как корни характеристических уравнений. В силу всего этого возникает сильное желание сделать преподавание нашего предмета более полезным и более доступным.

Мы надеемся изложить курс линейной алгебры так, чтобы его изучение приобрело смысл для широких кругов студентов самых разных уровней. Это, конечно, не означает, что мы задумали написать своего рода поваренную книгу по алгебре — предмет заслуживает большего. Мы просто концентрируем внимание не на строгости изложения ради ее самой, а на сути понятий, всюду стараясь скорее объяснить, нежели доказать. Некоторые определения вводятся формально, но многие появляются в процессе обсуждения. Точно так же строги и точны лишь некоторые, а не все доказательства. Разумеется, в каждом случае имеется строгая теория, которая лежит в основе изложения; она должна быть разъяснена и подкреплена примерами.

При построении любого курса имеется специфическая трудность, которую нельзя отложить на более поздний срок: с чего начать курс? Большинство студентов начинают его слушать, уже имея некоторые представления о линейных уравнениях. Тем не менее мы убеждены, что изучение линейной алгебры должно начинаться с основной задачи о решении системы n уравнений с n неизвестными, причем решаться эта система должна простейшим и наиболее употребительным способом — методом исключения Гаусса (а не по правилу Крамера!). К счастью, несмотря на простоту этого метода, имеется ряд моментов, которые являются центральными для его понимания и новыми почти для каждого студента. Наиболее важно то, что метод исключения эквивалентен матричному разложению: матрица коэффициентов разлагается в произведение треугольных матриц. Это является прекрасным введением к матричному обозначениям и к правилу умножения матриц.

Другая трудность состоит в правильном выборе темпа изложения. Если предполагать, что операции с матрицами уже знакомы студенту, то материал первой главы нужно излагать не слишком медленно, поскольку следующая глава потребует от читателя значительных усилий. Ее цель состоит в том, чтобы объяснить смысл уравнения $Ax = b$ глубже, чем позволяет метод исключения. Я считаю, что введение четырех основных подпространств — пространства столбцов матрицы A , пространства ее строк и их ортогональных дополнений (двух нуль-пространств) — дает эффективный способ построения примеров линейной зависимости и независимости, а также хорошо иллюстрирует идеи базиса, размерности и ранга. Кроме того, с помощью понятия ортогональности обычная геометрия трехмерного пространства естественным образом распространяется на n -мерный случай. И, разумеется, эти четыре основных подпространства служат ключом к пониманию уравнения $Ax = b$.

Главы 1—5 являются сердцевиной курса линейной алгебры.