

Стренг Г.

**Линейная алгебра и ее  
применения**

Москва  
«Книга по Требованию»

УДК 51  
ББК 22.1  
С84

C84      **Стренг Г.**  
Линейная алгебра и ее применения / Стренг Г. – М.: Книга по Требованию, 2024. – 460 с.

**ISBN 978-5-458-26374-0**

Книга отличается от традиционных руководств по линейной алгебре тем, что материал излагается в тесной связи с многочисленными приложениями. В виде отдельных глав представлены метод исключения Гаусса, ортогональные проекции, положительно определенные матрицы, линейное программирование и теория игр. Автор знаком советским читателям по переводу его (в соавторстве с Дж. Фиксом) «Теории метода конечных элементов» (М.: Мир, 1977). Книга, несомненно, окажется полезной математикам-прикладникам различных специальностей; она заинтересует также и преподавателей, аспирантов и студентов университетов и вузов, преподающих или изучающих линейную алгебру и ее приложения.

**ISBN 978-5-458-26374-0**

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



- корреляционная 251
- кососимметрическая 190, 401
- кососимметрическая 263, 264
- коэффициентов 19
- ленточная 52, 58
- Мура — Пенроуза 165
- невырожденная 41, 98
- неопределенная 295
- неорганическая 232, 237, 238
- нижняя треугольная 31
- нормальная 32, 44, 94
- обратимая 44, 188
- обратная 32, 44, 94
- ортогональная 151, 258, 329
- ортонормированная 151
- отражения 141
- отрицательно определенная 236
- перестановки 40, 43, 70, 152
- плохо обусловленная 48, 324
- положительно определенная 178, 285, 287, 331
- полуопределенная 295
- потребление 237
- присоединенная 201
- проектирования 139, 415
- псевдообратная 110, 165
- ранга один 93
- симметрическая 54, 132
- с кратными собственными значениями 260, 268, 272, 417
- различными собственными значениями 222, 224, 260, 272
- ступенчатая форма 69, 76
- транспонированная 55, 131
- трапециoidalная 65
- треугольная 31, 187, 270
- трехдиагональная 54, 336, 341
- унитарная 258, 264, 265
- Хессенберга 118, 336, 341
- хорошо обусловленная 48, 324
- элементарная 31
- эрмитова 256, 272
- эрмитовая к  $A$  255
- эрмитово сопряженная 255
- Метан 134
- Метод взвешенных наименьших квадратов 176, 178
- Гаусса — Зейделя 345, 351
- Гивенса 301
- исключения Гаусса 11, 13, 31, 43, 74, 206
- — — с полным выбором ведущего элемента 50
- — — — частичным выбором ведущего элемента 50, 51, 324
- — Гаусса — Жордана 45, 75
- конечных разностей 53
- — элементов 309, 315, 316
- наименьших квадратов 126, 135, 137, 166, 174, 306
- переменных направлений 350
- последовательной верхней релаксации 346
- сопряженных градиентов 351
- Якоби 336, 344, 351
- Минимум 279, 282
- Минор 196
- Мнимое число 226, 251, 263
- Многомерный анализ 280
- Многочлены 98, 407
- Лежандра 162, 164
- Множители 33
- Лагранжа 378
- Множитель, характеризующий сходимость 333, 334
- Модуль 253
- Молер 48
- Мур 165, 182
- Начальная задача 211
- Невырожденность 68, 98, 122
- Недоопределенная система 68
- Нейман 48, 236, 269, 402, 403
- Нейтральная устойчивость 211, 235, 245
- Нелинейная задача о наименьших квадратах 145
- Нелинейное убывание 236
- Ненулевое решение 72

- Необратимость во времени 244  
Неопределенная квадратичная форма 283  
— матрица 295  
Неотрицательная матрица 232, 237, 238  
Неотрицательное решение 384  
Неравенство Копи—Шварца—  
Буняковского 130  
— треугольника 133  
— Шварца 130, 133, 159  
Несовместная система 68, 126, 138  
Нетривиальная комбинация 77  
Неустойчивость 211, 235, 245  
Нижняя треугольная матрица 31  
Нобл 48  
Норма 324, 328, 330  
Нормальная матрица 274, 277  
Нормальные уравнения 137, 330  
Нулевая длина 178  
— строка 186  
Нулевой ведущий элемент 14, 39, 98, 206  
— вектор 64, 65  
— определитель 182  
Нуль-пространство 66, 72, 88, 105, 419  
Обобщенная задача на собственные  
значения 301, 304  
— обратная матрица 165  
Обобщенный собственный вектор 241, 417  
Образ 89  
Обратимая матрица 44, 188  
Обратимое отображение 97  
Обратная матрица 32, 44, 94  
— к произведению 44  
— — — транспонированной 133  
— — — Мура — Пенроуза 165  
— — — формула 20  
— подстановка 14, 35  
Обратный степенной метод 333, 334  
Обусловленность 48  
Общее решение 74  
Объединение 115  
Ограничения 360, 363, 379  
Однородная система 72  
Определитель 182  
— Вандермонда 191  
— матрицы перестановки 189, 191, 194, 206  
— свойства 185  
— формула 191, 194, 197, 218  
— Якоби 183, 207  
Оптимальный вектор 355, 377, 379  
Ортогонализация Грамма — Шмидта  
127, 154, 162, 203, 309, 338  
Ортогональная матрица 151, 258, 329  
Ортогональное дополнение 107  
Ортогональные векторы 101, 102  
— подпространства 104  
— собственные векторы 257, 263, 265, 274  
Ортогональный базис 146  
Ортонормированная матрица 151  
Ортонормированные векторы 103, 147, 155  
— собственные векторы 258, 274  
Оси эллипсоида 293, 311  
Основная теорема линейной алгебры 92, 108  
Основные подпространства 86 119 256  
Отношение Релея 307, 309, 312 320 330, 334  
Отображение «на» 97, 409  
Отрицательно определенная  
квадратичная форма 283  
— — — матрица 236  
— полуопределенная квадратичная  
форма 283  
Ошибка 134, 324, 325  
— округления 12, 47, 162, 227, 229  
Параболоид 305  
Пенроуз 165, 174  
Переменная невязки 357, 363  
Переопределенная система 126, 143  
Пересечение 114

- Перестановка 193, 209
  - строк 26, 36, 56, 186
- Пифагор 100, 153
- Плавающая точка 32
- Планирование производства 369
- Плохо обусловленная матрица 48, 324
- Площадь 207
- Погрешность (ошибка) 324, 325
- Подгонка данных 143, 163
- Подматрица 121
- Подобные матрицы 268
- Подпространство 64
- Подсчет числа действий 15, 36, 46, 58, 341
- Покер 405
- Полный выбор ведущего элемента 50
  - квадрат 282, 289
- Положительно определенная
  - квадратичная форма 281, 285
  - матрица 178, 285, 287, 331
  - полуопределенная квадратичная форма 283
- Полуопределенная матрица 295
- Полупространство 353
- Последовательность Фибоначчи 128, 135
- Почти периодическое движение 249
- Правая обратная матрица 44, 94
- Правило Крамера 185, 201
- Предельная стоимость 382
- Представление в виде матрицы 410
- Преобразование контргументности 298
  - подобия 268, 277, 414, 420
  - Хаусхолдера 153, 336, 339
- Принцип максимина 311
  - минимума 304
  - неопределенности Гейзенберга 269
  - Релея 307
  - Релея — Ритца 315
- Присоединенная матрица 201
- Присоединенный вектор 418
- Проекция 109, 126, 136, 137, 148, 273
- Произведение ведущих элементов 57, 184, 191
  - матриц 25, 119, 413
  - определителей 188
  - псевдообратных матриц 176
- Пропускная способность разреза 390
- Пространство 64
  - столбцов 64, 89
  - строк 81, 87, 105
- Псевдообратная матрица 110, 165
  - — произведения 176
  - — формула 170, 173
- Разбиение на блоки 205
- Разделяющая гиперплоскость 385, 386
- Разложение определителя на алгебраические дополнения 196
  - Холецкого 291, 331
  - $LDU$  37, 38, 55
  - $LU$  12, 34, 70
  - $\bar{LU}$  120, 172
  - $QR$  157, 338
  - $Q_1 \Sigma Q_2^T$  170, 339
- Размерность 84
  - основных подпространств 92
- Разностное уравнение 53, 227
- Разрез сети 390
- Разрешимость системы 63
- Райни 323
- Ранг 75, 77
  - подматрицы 121
  - произведения 120
- Расстояние 129
- Раус 246
- Ребро 361, 362
- Регрессионный анализ 126, 260
- Релаксационный множитель 346
- Релей 307, 315
- Ритц 315
- Ряды Фурье 160, 164
- Сверхубывание 243
- Свободные переменные 71, 88, 364
  - члены 18

- Свойства определителя 185  
Сдвиг 334, 340  
Седловая точка 283, 309, 397  
Сетевые задачи 388  
— модели 388  
Сильвестр 298  
Симметрическая матрица 54, 132  
Симметрическое исключение 297  
Симплекс-метод 360, 361, 372, 379  
Сингулярное разложение 170, 330,  
    339  
Сингулярные числа 170, 330  
Скалярное произведение 20, 25, 102  
— взвешенное 178  
— в комплексном случае 254, 265  
— функций 160  
Слабая двойственность 377  
След 218,  
Смешанная стратегия 396, 399  
Собственное подпространство 214  
Собственные значения 182, 213, 263  
    267, 268  
— кратные 260, 272, 417  
— различные 222, 224, 260, 272  
— функции 243  
Собственный вектор 213, 230, 257  
— обобщенный 241, 417  
Сопрягающий член 149  
Сопряженно транспонированная  
матрица 255  
Спектральная теорема 258, 271  
Спектральный радиус 344  
Среднее арифметическое 133, 150  
— геометрическое 133  
— значение 146  
Средняя ошибка 134, 142, 143  
Стандартный базис 147  
Стационарная точка 280  
Стационарное состояние 233, 244  
Степенные методы 323, 332, 334  
Ступенчатая форма матрицы 63, 76  
Стюарт 342  
Сумма подпространств 115, 118  
Существование решения 95"
- Таблица для симплекс-метода 367  
Такер 379  
Теневые цены 382  
Теорема двойственности 376  
— Кэли — Гамильтона 271  
— о кругах Гершгорина 351  
— — максимальной точке и  
    минимальном разрезе 390  
— — минимаксе 402  
— — равновесии 379  
— — разделяющей гиперплоскости  
    386  
Теория игр 395  
Торп 404  
Транспонированная матрица 55, 131  
— определитель 189  
— к обратной 133  
— — произведению 131  
Трапецидальная матрица 69  
Треугольная матрица 31, 187, 270  
Трехдиагональная матрица 54, 336,  
    341  
Угол 127, 265, 356, 361  
Узлы сети 388  
Уилкинсон 48, 323, 329, 342  
Умножение вектора на матрицу 19,  
    20  
— матриц 25  
Унитарная матрица 258, 264, 265  
Уравнение теплопроводности 243,  
    244  
Условие оптимальности 368  
Условия Куна — Такера 379  
— совместности невязок 379, 382,  
    398  
Устойчивость 212, 235, 245, 271  
Факторный анализ 260, 261  
Фибоначчи 228, 235  
Фикс 320  
Филиппов 276, 418  
Формула для ведущего элемента 204,  
    205  
— обратной матрицы 20  
— определителя 191, 194, 197, 218

- — псевдообратной матрицы 170,  
173  
Форсайт 48  
Фредгольм 111  
Функциональное пространство 158,  
159  
Функция стоимости 355, 360, 368  
Фурье 160, 164  
Характеристический многочлен 213,  
217, 269  
Характеристическое уравнение 213,  
217  
Хаусхолдер 153, 336, 339  
Хессенберг 118, 336, 341  
Хокней 350  
Холецкий 291, 300, 331  
Хорошо обусловленная матрица 48,  
324  
Целевая функция 355  
Цена игры 397, 402  
Цепочка векторов 418  
Частичный выбор ведущего элемента  
50, 324  
Частное решение 74  
Частота 215, 248  
Четная перестановка 206  
Численное интегрирование 99  
Число обусловленности 323, 325, 328  
Шахматы 404, 406  
Шварц 130, 133, 159  
Ширина ленты 58 Шур 270  
Экономика 236, 238, 263, 376  
Экспонента от матрицы 239, 240, 244,  
422  
Экспоненциальное решение 215, 239,  
240, 244  
Элементарное преобразование 186  
Элементарные матрицы 31  
Эллипс 293  
Эллипсоид 294, 304, 311  
Эпидемия 234  
Эрмитова матрица 256, 272  
Эрмитово сопряженная матрица 255  
Ядро 89  
Якоби 336, 344, 351  
Якобиан 183, 207  
Янг 348  
«Ящичные» ограничения 389  
 $LDU$ -разложение 37, 38, 55  
 $LU$ -разложение 12, 34, 70  
 $\bar{L}\bar{U}$ -разложение 120, 172  
 $QR$ -алгоритм (метод) 323, 332, 340,  
341  
 $QR$ -разложение 157, 338  
 $Q_1\Sigma Q_2^T$ -разложение 170, 339



## От редактора перевода

Традиционные курсы линейной алгебры, читаемые в высших учебных заведениях, и соответствующие учебные пособия, как правило, мало затрагивают прикладную сторону предмета. Но в то же время линейная алгебра служит основой всех методов вычислительной математики, являясь в этом смысле чисто прикладной наукой.

Предлагаемая вашему вниманию книга написана известным американским математиком Гильбертом Стренгом на основе курса лекций для студентов Массачусетского технологического института, который читался им с учетом имени этих обстоятельств, и это оказало существенное влияние как на стиль изложения материала, так и на его выбор. Например, в виде отдельных глав здесь представлены метод исключения Гаусса, положительно определенные матрицы и даже линейное программирование, и в то же время жорданова форма матрицы и линейные преобразования рассматриваются в виде кратких приложений. В книге рассматриваются также вопросы об ортогональном проектировании векторов на подпространства и дается представление о методе конечных элементов, который в настоящее время становится основным средством приближенного решения уравнений математической физики. Отдельная глава посвящена вычислениям с матрицами и, в частности, итерационным методам решения систем линейных алгебраических уравнений, играющим важную роль в вычислительной математике.

Каждая глава содержит большое число примеров и упражнений, которые также призваны способствовать развитию у читателя навыков в решении прикладных задач.

Написанная доступным языком, эта книга, несомненно, окажется полезной для широкого круга читателей: математиков-прикладников, аспирантов и студентов многих специальностей университетов и вузов. Она заинтересует также преподавателей курсов линейной алгебры — как с точки зрения методологии, так и с точки зрения максимальной приближенности теории к приложениям.

Перевод глав 1, 2, 6, 7 выполнен Ю. А. Кузнецовым, глав 3, 4, 5, 8 и приложений — Д. М. Фаге.

*Г. И. Марчук*

## Предисловие

Я считаю, что линейная алгебра преподается сейчас слишком абстрактно. Конечно, это утверждение спорно и, быть может, слишком спорно, чтобы быть верным. Но я убежден, что настоящее руководство должно объяснять существо линейной алгебры и развивать математическое мышление читателей — ведь этот предмет столь же фундаментален, как математический анализ, столь же полезен и имеет такие же богатые приложения. Кроме того, линейная алгебра доступнее анализа, и это обстоятельство слишком важно, чтобы им пренебрегать.

Разумеется, нынешнее состояние дел с линейной алгеброй вполне объяснимо. Ее преподавание дает прекрасную возможность иллюстрировать точность математических рассуждений и построения доказательств. Это достоинство я сознаю, ценю и надеюсь сохранить, и мне всегда было приятно читать лекции именно в таком стиле. Однако, когда я начал экспериментировать в Массачусетском технологическом институте с различными вариантами курса, я обнаружил еще одно его достоинство: преподавание линейной алгебры не только позволяет иллюстрировать единство двух важнейших черт математики — абстрактности и приложимости, но и постоянно побуждает подчеркивать это единство.

Так повелось, что большинство изучающих линейную алгебру вязнет в абстракциях и не доходит до приложений. И очень многие студенты, особенно нематематических отделений, вовсе не выбирают этот курс. Даже самые способные наши студенты приобретают тенденцию к постижению абстракций, но остаются беспомощными в вычислениях — например, они решают системы линейных уравнений по правилу Крамера, а собственные значения понимают только как корни характеристических уравнений. В силу всего этого возникает сильное желание сделать преподавание нашего предмета более полезным и более доступным.

Мы надеемся изложить курс линейной алгебры так, чтобы его изучение приобрело смысл для широких кругов студентов самых разных уровней. Это, конечно, не означает, что мы задумали написать своего рода поваренную книгу по алгебре — предмет заслуживает большего. Мы просто концентрируем внимание не на строгости изложения ради ее самой, а на сути понятий, всюду стараясь скорее объяснить, нежели доказать. Некоторые определения вводятся формально, но многие появляются в процессе обсуждения. Точно так же строги и точны лишь некоторые, а не все доказательства. Разумеется, в каждом случае имеется строгая теория, которая лежит в основе изложения; она должна быть разъяснена и подкреплена примерами.

При построении любого курса имеется специфическая трудность, которую нельзя отложить на более поздний срок: с чего начать курс? Большинство студентов начинают его слушать, уже имея некоторые представления о линейных уравнениях. Тем не менее мы убеждены, что изучение линейной алгебры должно начинаться с основной задачи о решении системы  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными, причем решаться эта система должна простейшим и наиболее употребительным способом — методом исключения Гаусса (а не по правилу Крамера!). К счастью, несмотря на простоту этого метода, имеется ряд моментов, которые являются центральными для его понимания и новыми почти для каждого студента. Наиболее важно то, что метод исключения эквивалентен матричному разложению: матрица коэффициентов разлагается в произведение треугольных матриц. Это является прекрасным введением к матричным обозначениям и к правилу умножения матриц.

Другая трудность состоит в правильном выборе темпа изложения. Если предполагать, что операции с матрицами уже знакомы студенту, то материал первой главы нужно излагать не слишком медленно, поскольку следующая глава потребует от читателя значительных усилий. Ее цель состоит в том, чтобы объяснить смысл уравнения  $Ax = b$  глубже, чем позволяет метод исключения. Я считаю, что введение четырех основных подпространств — пространства столбцов матрицы  $A$ , пространства ее строк и их ортогональных дополнений (двух нуль-пространств) — дает эффективный способ построения примеров линейной зависимости и независимости, а также хорошо иллюстрирует идеи базиса, размерности и ранга. Кроме того, с помощью понятия ортогональности обычная геометрия трехмерного пространства естественным образом распространяется на  $n$ -мерный случай. И, разумеется, эти четыре основных подпространства служат ключом к пониманию уравнения  $Ax = b$ .

Главы 1—5 являются сердцевиной курса линейной алгебры.