

Г.Д. Гродский

**Теория динамического
сжатия винтовых пружин**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Г11

Г11 **Г.Д. Гродский**
Теория динамического сжатия винтовых пружин / Г.Д. Гродский – М.: Книга
по Требованию, 2021. – 160 с.

ISBN 978-5-458-58014-4

ISBN 978-5-458-58014-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

*Посвящается
академику А. Н. Крылову, как
дань глубокого издавна уваже-
ния к его научным трудам.*

ГЛАВА I.

ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ.

1. Винтовые (часто называемые ошибочно „спиральными“) пружины имеют очень большое и разнообразное применение в технике, когда нужно либо смягчить действие ударов, либо аккумулировать, с возможностью обратной ее отдачи, работу какого-либо источника энергии, либо записать его напряжение. Особенно обширно применение этих пружин в военном деле (боевые пружины в затворах, пружины накатника в лафетах); в последнее время их стали употреблять и для подрессоривания военных повозок. Во всех этих „военных“ случаях применения винтовых пружин они подвергаются не медленному (так наз. статическому), а чрезвычайно быстрому („динамическому“) сжатию (реже—растяжению). Между тем ни „Теория упругости“, ни „Сопrotивление материалов“ не дали до сих пор полного изучения состояния этих пружин при таком способе их сжатия; нет по этому поводу никаких указаний и в различных „Справочных книжках“ по технике (Hütte, Madamet и т. п.). Только заводы, изготовляющие эти пружины, делают указание; что применение их должно всегда подчинять условию не перехода в их сжатии за $\frac{2}{3}$ наибольшего, геометрически-возможного; но это требование опять-таки относится к статическому сжатию, а вытекает оно из того, что формулы, выводимые в „Сопrotивлении материалов“, устанавливая пропорциональность между сжимающей пружину продольной силой и производимым ею сжатием; опыты же указывают, что сила растет быстрее сжатия; при малом сокращении высоты пружины это мало заметно и незначительно отражается на ее внутреннем состоянии (напряжениях); с переходом же сжатия за $\frac{2}{3}$ наибольшего возможного, пропорциональность его силе нарушается и внутренние напряжения растут быстро. А так как „Сопrotивление материалов“, не учитывая распределения этих напряжений, а потому не улавливая мест и величин их наибольших значений, не может своими формулами установить и указать границы прочности пружины, то это и заменяется упомянутым заводским условием расчета и применения винтовых пружин.

Мною в 1925 г. дана, основанная на „Теории упругости“, „Теория винтовых пружин“, устанавливающая точную зависимость между статическим сжатием пружины и производящей его силой, с учетом при том угла подъема линии центров поперечных сечений и с определением мест и величин наибольших внутренних напряжений материала пружины. Но и эта теория, как указано, имеет в виду лишь статический процесс сжатия. Между тем при применениях винтовых пружин часто имеет место динамическое сжатие (артиллерийские орудия, военные повозки и пр.), при котором, с одной стороны, поглощается значительная добавочная работа (сверх необходимой для статического сжатия) на сообщение ускорения массе пружины, а с другой—частицы металла пружины, получив значительные скорости, параллельные ее оси, продолжают движение за стати-

чески расчетную границу сжатия, подвергая пружину значительно большим внутренним напряжениям, чем определенные расчетом, что вызывает внезапную поломку; кроме того динамические условия сжатия не отвечают первоначальным расчетным соображениям и нарушают весь процесс, при котором пружина используется. Особенно это резко сказывается в пружинах накатников, для которых специальными опытами в нашей артиллерии был уже 30 лет назад установлен последовательный приход, при выстреле, во взаимное соприкосновение по очереди всех соседних между собою витков, хотя при расчете всегда оставляется между ними значительная свобода. Подобный же факт неминуем, очевидно, и в сорных винтовых пружинах в случае внезапного соскакивания какого-либо колеса с достаточно большой высоты (хотя бы даже и не по отвесу)—например, с камня, бугра, бревна, рельса и т. п.

2. Относительно динамического сжатия мне неизвестно никаких научных исследований за исключением двух следующих.

В 1897 г. знаменитый французский ученый Вьель (Viéllé) в докладе Парижской академии наук сообщил, что на основании многочисленных опытов можно пренебрегать динамичностью сжатия винтовой пружины, т. е. ускорением ее частиц, если время действия на нее сжимающего осевого давления не меньше, чем втрое, превышает время ее упругого свободного колебания.

А в 1909 г. академик А. Н. Крылов в своем мемуаре: „Некоторые замечания о крешерах и индикаторах“ дал основные формулы динамического сжатия и последующих продольных колебаний винтовой пружины применительно к ее работе в индикаторе.

Но это исследование, несмотря на всю, свойственную его автору, глубину изложения, далеко не решает задачи о динамическом сжатии реальных винтовых пружин, так как, во-первых, предметом изучения является чистая абстракция—не реальная пружина, как тело с конечными поперечными размерами, а упругая винтовая математическая линия (образуемая центрами поперечных сечений действительной пружины); и, во-вторых, зависимость между продольным сжатием и производящего его силою принята под видом прямой пропорциональности их друг другу при всякой величине такого сжатия; по этим причинам, с одной стороны, мемуар А. Н. Крылова не только не дает сам, но не допускает даже и развития его в сторону определения внутренних напряжений в металле пружины, а с другой—его выводы и заключения неприменимы непосредственно при больших относительных сжатиях пружины, доводящих ее витки до соприкосновения или близких к этому. Кроме того в этом мемуаре все внимание автора сосредоточено на перемещении свободного конца пружины, в военном же деле нужно иметь в виду все ее частицы.

Таким образом „Теория динамического сжатия“ реальных винтовых пружин еще ждет своего построения; пополнение этого пробела технической научной литературы и является целью этой моей работы.

3. В упомянутой выше „Теории винтовых пружин“ я вывел следующую формулу, определяющую величину сжатия силою Q :

$$Q = \frac{1}{\chi} \frac{\pi}{4} E \frac{a^3 b}{R^2} \left\{ \frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} + \left(1 - \frac{3}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} \right) \sin^2 \varphi - \frac{3a}{2} \sin \varphi + \frac{a^2}{2} \right\} \alpha \quad (1),$$

причем E — по Lamé — „коэффициент упругости“ металла пружины, ныне называемый „модулем упругости“;

μ — „коэффициент поперечного сжатия“, или так называемое ныне „число Пуассона“;

R — радиус цилиндра, на котором расположена винтовая линия, образуемая центрами поперечных сечений свободной пружины;

$2a$ и $2b$ — длина и ширина этих сечений, причем $2b$ параллельно оси симметрии пружины, а $2a$ перпендикулярно к ней;

$2h_0$ — высота хода одного витка свободной пружины (до сжатия);

$2h$ — высота хода витка пружины, сжатой силою Q ;

$2l$ — длина одного витка линии центров поперечных сечений;

φ — угол подъема этой винтовой линии до сжатия пружины, так что:

$$\sin \varphi = \frac{h}{l}, \quad \cos \varphi = \frac{\pi R}{l} \quad (2),$$

где

$$l^2 = h^2 + \pi^2 R^2 \quad (3),$$

затем

η — относительное сжатие, т. е.

$$(\eta) = \frac{h_0 - h}{h_0} \quad (4),$$

а

$$\alpha = \frac{h_0 - h}{\pi R} = \frac{h_0}{\pi R} \frac{h_0 - h}{h_0} = \eta \operatorname{tg} \varphi \quad (5);$$

наконец, χ — коэффициент, позволяющий иметь одну и ту же формулу для пружин из проволок эллиптического и прямоугольного сечения, именно:

$\chi = 1$ при эллиптическом ее сечении

и

$\chi = 0,7$ при прямоугольном сечении.

Если относительное сжатие η , а следовательно, и число α малы, то формулу (1) можем заменить более простою:

$$Q = \frac{1}{\chi} \frac{\pi}{4} E \frac{a^3 b}{R^3} \left\{ \frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} + \left(1 - \frac{3}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} \right) \sin^2 \varphi \right\} \alpha \quad (6),$$

по которой Q пропорционально α .

Если, наоборот, α близко к $\operatorname{tg} \varphi$ (т. е. $\eta \rightarrow 1$), то можем принять зависимость

$$Q = \frac{1}{\chi} \frac{\pi}{4} E \frac{a^3 b}{R^3} \frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) \alpha \quad (7),$$

по которой Q и α тоже пропорциональны друг другу, но при другом коэффициенте такой пропорциональности. При малых углах φ возможно упростить формулу (1) и в общем случае, заменив ее такою:

$$Q = \frac{1}{\chi} \frac{\pi}{4} E \frac{a^3 b}{R^3} \left\{ \frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} + \left(1 - \frac{3}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} \right) \sin^2 \varphi - \alpha \sin \varphi \right\} \alpha \quad (8),$$

в которой зависимость Q от α выражается графически параболою 2-го порядка, тогда как уравнению (1) отвечает парабола 3-го порядка.

Давление $\bar{Q}$, сжимающее статически всю пружину до соприкосновения соседних витков, определяется равенством:

$$\bar{Q} = \frac{1}{\chi} \frac{\pi}{2(1+\mu)} \frac{E}{(a^2+b^2) R^3} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) (h_0 - b) \quad (9).$$

Наконец, наибольшее напряжение при сжатии силою Q , т. е. на величину α дается формулой:

$$\tau_{\text{наиб.}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{R} \frac{\left(\frac{\cos \varphi}{1 + \mu} \frac{ab}{a^2 + b^2} \right)^2 \alpha}{\sqrt{(a^2 - b^2) \left(\frac{1}{1 + \mu} \frac{b}{a^2 + b^2} \right)^2 - \left[\operatorname{tg} \varphi - \frac{\alpha}{2} (1 - \alpha \operatorname{tg} \varphi) \sec^2 \varphi \right]^2}} G \quad (10),$$

а при сжатии витков до соприкосновения, т. е. силою $\bar{Q}$ будем иметь, что

$$(\tau_{\text{наиб.}})_{\text{max}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\left(\frac{2ab}{a^2 + b^2} \right)^2 \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{R} \frac{h_0 - b}{\pi R}}{\sqrt{\left(\frac{2b}{a^2 + b^2} \right)^2 (a^2 - b^2) - (1 + \mu)^2 \left(\frac{h_0 + b}{\pi R} \right)^2}} G \quad (11),$$

причем предполагаем что

$$1 - 0,06 > \frac{b}{a} > \frac{1}{12}.$$

4. Предположим, что пружина, имевшая свободную общую высоту H при n витках, каждый высотой $2h$, была подвергнута статическому предварительному сжатию осевою силою Q_0 , придавшей ей общую высоту H_0 при высоте витка $2h_0$, после чего на нее действовала осевая же, быстро возрастающая, сила $Q(t)$, благодаря которой высота всей пружины в момент t времени стала H_1 при высоте в данной точке одного полувитка, равной $h(x, t)$, где x — продольная (параллельная оси пружины) координата, отсчитываемая от плоскости опертого конца пружины; продольную скорость свободного конца пружины обозначим через $w(t)$, а величину его перемещения в момент t — через Z , так что

$$H_0 = H_1 + Z \quad (12)$$

и

$$w(t) = \frac{dZ}{dt} \quad (13).$$

Угол подъема винтовой линии, образуемой центрами поперечных сечений свободной пружины, обозначим по-прежнему через φ , величину равномерного по всей длине пружины „относительного“ ее сжатия от силы Q_0 — через η_0 , а через $\eta(x, t)$ — „относительное“ же сжатие совокупностью сил Q_0 и $Q(t)$ в поперечном сечении, центр C коего имел в свободной пружине абсциссу x .

Так как η есть относительное сжатие в точке x , то линейное сжатие элемента пружины, свободная высота которого, считаемая параллельно оси OX , была Δx , равно $\eta \Delta x$, а потому полное сжатие части пружины, считаемой от опертого ее конца и имевшей в свободном состоянии высоту x , т. е. иначе говоря, осевое перемещение ζ подвижного конца этой части пружины, считаемое положительным от свободного конца последней к опертому, будет равно:

$$\zeta = \int_0^x \eta dx \quad (14),$$

а следовательно,

$$\eta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (15).$$

5. Проведем теперь два сечения — (I) и (II) свободной пружины, перпендикулярных к ее оси OX и удаленных от ее опертого конца на

расстояния x и $x + \Delta x$ (которые одновременно представляют, очевидно, абсциссы центров C' и C'' этих сечений); объем материала пружины, заключенного между этими сечениями, выразится произведением $\pi ab \lambda$, где λ — длина винтовой линии центров пружины между названными центрами C' и C'' ; так как $\Delta x = \lambda \sin \varphi$, то упомянутый объем равен

$$\frac{\pi ab \Delta x}{\sin \varphi},$$

а потому для его массы m получим выражение:

$$m = \frac{\pi ab \delta}{g \sin \varphi} \cdot \Delta x. \quad (16),$$

где δ — вес единицы объема металла пружины.

6. Для большей наглядности введем η вместо α в основную формулу (1); при этом получим

$$Q = \frac{1}{\lambda} \frac{\pi}{4} E \frac{a^3 b}{R^3} \left\{ \frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} + \left(1 - \frac{3}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} \right) \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \eta \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \frac{\eta^2}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right\} \eta \operatorname{tg} \varphi \quad (17);$$

здесь, ради упрощения дальнейшего письма, положим:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\lambda} \frac{\pi}{4} E \frac{a^3 b}{R^3} \operatorname{tg} \varphi \\ B &= \frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} + \left(1 - \frac{3}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} \right) \sin^2 \varphi \\ C &= \frac{3}{2} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \\ D &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (18).$$

Тогда (17) перепишется так:

$$Q = A_0 (B \eta - C \eta^2 + D \eta^3) \quad (19),$$

причем формула (6) получится из (19) при

$$C = 0 \quad \text{и} \quad D = 0,$$

а формула (4) — при B , равном

$$B = \frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) \quad (20);$$

наконец, (8) получится из (12), если сделаем $D=0$ и заменим C на C_1 , при

$$C_1 = \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \quad (21).$$

7. Так как относительное сжатие по высоте в сечении (I), по нашему предположению, равно η , а в сечении (II) равно $\eta + \Delta \eta$, то, пренебрегая малыми величинами выше 1-го порядка, получим, что осевые давления на элемент пружины, заключенный между этими сечениями, равны соответственно

$$A_0 (B \eta - C \eta^2 + D \eta^3)$$

и

$$- [A_0 (B \eta - C \eta^2 + D \eta^3) + A_0 (B - 2C \eta + 3D \eta^2) \Delta \eta];$$

поэтому, игнорируя вес пружины, как силу, совершенно тождественно действующую на все элементы пружины и, вследствие того, не могущую сообщить им относительных перемещений, напомним уравнение движения элемента пружины, выделенного сечениями (I) и (II), так:¹

$$-\frac{\pi a b \delta}{g \sin \varphi} \Delta x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -A_0 (B - 2C\eta + 3D\eta^2) \Delta \eta,$$

где знак „минус“ в левой части поставлен потому, что сжатие ζ совершается в отрицательном направлении оси OX .

Для последнего уравнение на Δx и подводя это Δx к нулю, в пределе получим:

$$\frac{\pi a b \delta}{A_0 g \sin \varphi} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = (B - 2C\eta + 3D\eta^2) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

или, вследствие (15):

$$\frac{\pi a b \delta}{A_0 g \sin \varphi} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = (B - 2C\eta + 3D\eta^2) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (22).$$

Это и есть основное дифференциальное уравнение, определяющее закон динамического сжатия винтовых пружин.

8. Заменяя η его выражением (15), получим:

$$\frac{\pi a b \delta}{A_0 g \sin \varphi} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \left[B - 2C \frac{\partial \zeta}{\partial x} + 3D \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (23);$$

это уравнение принадлежит к числу допускающих интегрирование по способу, например, Ампера; но как самый ход такого интегрирования, так и его окончательный результат сложны, а практическое использование этого результата затруднительно, поэтому вернемся к уравнению (17) и посмотрим—ценою каких погрешностей можно его упростить.

Переписав его в таком виде:

$$Q = A_0 [B - 0.5 (3\eta \sin \varphi - \eta^2 \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \varphi] \eta,$$

мы имеем, что

$$(3\eta \sin \varphi - \eta^2 \operatorname{tg} \varphi)'_{\eta} = 3 \sin \varphi - 2\eta \operatorname{tg} \varphi - 2 \left(\frac{3}{2} \cos \varphi - \eta \right) \operatorname{tg} \varphi > 0,$$

ибо η остается всегда правильной дробью, тогда как $\cos \varphi$ на практике всегда мало отличается от 1; следовательно, двучлен

$$0.5 (3\eta \sin \varphi - \eta^2 \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg} \varphi$$

растет вместе с η , а потому возможное реально наибольшее его значение меньше его величины при $\eta=1$, т. е. меньше, чем

$$0.5 (3 \cos \varphi - 1) \operatorname{tg}^2 \varphi \quad (24);$$

обычно угол φ не бывает больше

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1}{10},$$

так что величина выражения (24) не превышает

$$0.5 (2.985 - 1) \frac{1}{100} \quad \text{или} \quad 0.009925;$$

¹ В левой части следовало написать полную вторую производную от ζ по t ; но она тождественна частной второй производной от ζ по t , так как абсцисса x не зависит сама от времени t .

с другой стороны, отношение

$$\frac{a}{b}$$

не делается больше 4, так как иначе пружина оказывается очень громоздкой по диаметру; поэтому

$$B_{\text{наим.}} = \frac{2}{1,3 \cdot 17} + \left(1 - \frac{3}{1,3 \cdot 17}\right) \sin^2 \varphi = 0,09914,$$

так что, отбрасывая в формуле (19) члены $C\eta^2$ и $D\eta^3$, мы сделаем относительную ошибку в большую сторону, которая от нулевой своей величины при $\eta=0$ растет вместе с η , но не выше дроби

$$\frac{0,00925}{0,0914} \text{ или } 10\%.$$

Если вместо полной формулы (17) мы применим формулу (7), т. е. будем считать

$$Q' = A_0 \frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right) \eta = A_0 B' \eta \quad (25),$$

то поправка ϵ , необходимая для перевода этой приближенной величины в точную (19), выразится так:

$$\begin{aligned} \epsilon = Q - Q' &= A_0 \left\{ \left[\frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} + \left(1 - \frac{3}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) \sin^2 \varphi - \frac{3}{2} \eta \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \eta^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \right] - \frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{b^2}{a^2+b^2} \sin^2 \varphi\right) \right\} \eta = \\ &= A_0 \left\{ \sin^2 \varphi - \frac{3}{2} \eta \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right\} \eta = \\ &= A_0 \left(\cos^2 \varphi - \frac{3}{2} \eta \cos \varphi + \frac{1}{2} \eta^2 \right) \eta \operatorname{tg}^2 \varphi, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{\epsilon}{Q'} = \frac{1+\mu}{2} \frac{a^2+b^2}{b^2} \frac{\cos^2 \varphi - 1,5\eta \cos \varphi + 0,5\eta^2}{1 - 1,5 \sin^2 \varphi} \operatorname{tg}^2 \varphi;$$

так как

$$(\cos^2 \varphi - 1,5\eta \cos \varphi + 0,5\eta^2)'_{\eta} = -1,5 \cos \varphi + \eta < 0,$$

то, значит, эта необходимая поправка, будучи, очевидно, все время положительной, убывает при увеличении η , а наибольшее ее значение, отвечающее нулевой величине относительного сжатия η , равно:

$$\left(\frac{\epsilon}{Q'}\right)_{\eta=0} = \frac{1,3 \cdot 17}{2} \frac{\sin^2 \varphi}{1 - 1,5 \sin^2 \varphi} = 11,11\%.$$

9. При наибольшем возможном значении η — именно, при

$$\eta = \frac{h_0 - b}{h_0}$$

формула (25) обращается, очевидно, в (9), так что в этот момент поправка ϵ становится равною нулю. На этом основании можно для приближенного выражения силы Q , производящей относительное сжатие η , принять еще какое-либо среднее значение между выражениями (6) и (25) или (7).

Если, например, принять их полусумму, т. е. положить

$$B = B_1 = \frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right) + \frac{1}{1} \sin^2 \varphi \quad (26),$$

то необходимая относительная поправка будет равна $+5,5\%$ при начале сжатия и $-5,0\%$ при наибольшем возможном сжатии пружины. Такое положение представляет существенные выгоды, так как, с одной стороны, наибольшая абсолютная величина поправки вполне приемлема для технических расчетов, а с другой — **отрицательность** необходимой поправки при **полном сжатии** пружины, т. е. при наибольших напряжениях в ней, обеспечивает вернее ее достаточную фактическую прочность (таковая будет выше предполагаемой при расчете).

Если, как это имеет место в пружинах артиллерийских накатников, существенную роль в расчете играет работа пружины, то можно выбрать среднее значение между выражениями (6) и (25) так, чтобы определяемая на основании этого выражения работа пружины при ее полном сжатии была как раз равна работе, вычисляемой при помощи точной формулы (19). Эта последняя работа выражается так:

$$\int_0^{\frac{h_0-b}{h_0}} Q h_0 d\eta = A_0 h_0 \left[\frac{B}{2} \left(\frac{h_0-b}{h_0} \right)^2 - \frac{C}{3} \left(\frac{h_0-b}{h_0} \right)^3 + \frac{D}{4} \left(\frac{h_0-b}{h_0} \right)^4 \right],$$

тогда как, принимая для Q приближенное выражение

$$Q'' = A_0 (B + B''') \eta,$$

найдем, что

$$\int_0^{\frac{h_0-b}{h_0}} Q'' h_0 d\eta = A_0 h_0 \frac{B + B'''}{2} \left(\frac{h_0-b}{h_0} \right)^2;$$

уравнивание между собою обеих этих работ дает:

$$\frac{B'''}{2} \left(\frac{h_0-b}{h_0} \right)^2 = -\frac{C}{3} \left(\frac{h_0-b}{h_0} \right)^3 + \frac{D}{4} \left(\frac{h_0-b}{h_0} \right)^4$$

и, следовательно,

$$B''' = \left(-\frac{2C}{3} + \frac{D}{2} \frac{h_0-b}{h_0} \right) \frac{h_0-b}{h_0},$$

т. е.

$$B''' = \left[-\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{4} \frac{h_0-b}{h_0} \operatorname{tg}^2 \varphi \right] \frac{h_0-b}{h_0},$$

а потому

$$Q'' = A_0 \left\{ \frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) + \left[\cos^2 \varphi - \frac{h_0-b}{h_0} \cos \varphi + \frac{1}{4} \left(\frac{h_0-b}{h_0} \right)^2 \right] \operatorname{tg}^2 \varphi \right\} \eta$$

или

$$Q'' = A_0 \left\{ \frac{2}{1+\mu} \frac{b^2}{a^2+b^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi \right) + \left(\cos \varphi - \frac{h_0-b}{2h_0} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \right\} \eta$$

или еще

$$Q'' = A_0 (B' + B'') \eta \quad (27),$$

где

$$B'' = \left(\cos \varphi - \frac{h_0-b}{2h_0} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \quad (28).$$

Это выражение при начале сжатия пружины дает величину, которая меньше истинной на

$$A_0 \left[-\frac{h_0-b}{h_0} + \frac{1}{4} \left(\frac{h_0-b}{h_0} \right)^2 \right] \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \eta,$$

что для прежнего примера составляет ошибку в $-6,85\%$; а при полном сжатии формула (28) даст величину, превышающую истинную на

$$A_0 \left(\cos \varphi - \frac{h_0 - b}{2h_0} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \eta,$$

т. е. для того же примера — на $3,22\%$.

Наконец, величину Q' , совпадающую с истинным значением Q для того же относительного сжатия, мы по формуле (28) получим для сжатия η' , определяемого уравнением

$$-C\eta' - D\eta'^2 = B',$$

т. е.

$$\eta'^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - 3\eta' \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi = 2 \left(-\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{4} \frac{h_0 - b}{h_0} \operatorname{tg}^2 \varphi \right) \frac{h_0 - b}{h_0}$$

или

$$\eta'^2 - 3\eta' \cos \varphi = 2 \left(-\cos \varphi + \frac{1}{4} \frac{h_0 - b}{h_0} \right) \frac{h_0 - b}{h_0},$$

откуда

$$\eta' = \frac{3}{2} \cos \varphi - \sqrt{\frac{9}{4} \cos^2 \varphi - 2 \frac{h_0 - b}{2h_0} \cos \varphi + \frac{2}{4} \left(\frac{h_0 - b}{h_0} \right)^2}$$

или

$$\eta' = \frac{3}{2} \cos \varphi - \sqrt{\frac{1}{4} \cos^2 \varphi + 2 \left(\cos \varphi - \frac{h_0 - b}{2h_0} \right)^2} \quad (29),$$

где берем перед радикалом только знак „минус“, так как иначе η' окажется больше 1; эта формула для прежнего примера дает

$$\eta' = 0,566.$$

10. Займемся теперь интегрированием уравнения (22), взятого под упрощенным видом:

$$\frac{\pi ab \delta}{A_0 g \sin \varphi} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = B_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (30),$$

где B_0 равно тому или другому из постоянных чисел B (18), B' (25), B_1 (26) или $B' + B''$ (28), причем должно, конечно, удовлетворить еще „начальные условия“ и „условия на границах“; первые из них для пружины, находившейся в свободном покое, выражаются равенствами:

$$\eta \equiv \eta_0 \quad \text{и, следовательно, } \zeta \equiv \eta_0 x \quad \text{при } t=0 \quad (31),$$

$$\text{и} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{при } t=0 \quad (32),$$

тогда как условие на опертом конце пружины таково:

$$\zeta \equiv 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и любом } t \quad (33).$$

Что касается условия на подвижном конце, то оно выразится сложнее, так как, имея в виду практические случаи применения излагаемой теории, мы предположим здесь, что свободный конец пружины движется (в сторону ее сжатия) под нажимом твердого тела веса P или массы M , к которому приложена еще система внешних сил, проекция равнодействующей коих на ось пружины равна

$$F(t);$$

в таком случае дифференциальное уравнение движения этого тела напишется под видом:

$$M \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right)_{x=H} = \dot{\Gamma}(t) - A_0 B_0 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_{x=H} \quad (34);$$

оно и представляет „условие на границе“ при

$$x=H,$$

т. е. на подвижном конце пружины.

11. Уравнение (30), как известно, легко интегрируется в конечной функциональной форме; именно, если положим:

$$\frac{A_0 B_0 g \sin \varphi}{\pi a b \delta} = k^2 \quad (35),$$

так что оно примет вид:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (36),$$

то общий его интеграл пишется так

$$\zeta = f(x + kt) + \psi(x - kt),$$

где функции f и ψ пока вполне произвольны, но подлежат определению на основании условий (31) и (34). Однако для нас выгоднее совершить интегрирование под видом бесконечного ряда, положив:

$$\zeta = \sum_v X_v(x) T_v(t);$$

подстановка этого выражения в уравнение (36) дает

$$\sum_v \{X_v T_v'' - k^2 T_v X_v''\} = 0,$$

откуда выводим, что

$$X_v(x) T_v''(t) - k^2 T_v(t) X_v''(x) = 0$$

или

$$\frac{T_v''(t)}{T_v(t)} = k^2 \frac{X_v''(x)}{X_v(x)}.$$

Так как левая часть этого уравнения не зависит от x , а правая — от t , то, значит, общая величина их обеих представляет число постоянное, которое должно считать отрицательным, принимая во внимание периодичность последующего кинематического состояния пружины; обозначая названное число через

$$-k^2 a_v^2,$$

получим

$$T_v''(t) = -k^2 a_v^2 T_v(t).$$

и

$$X_v''(x) = -a_v^2 X_v(x),$$

откуда следует, что

$$X_v(x) \equiv K_v \cos(a_v x) + L_v \sin(a_v x)$$

и

$$T_v(t) \equiv M_v \cos(ka_v t) + N_v \sin(ka_v t).$$

Значения постоянных

$$a_v, K_v, L_v, M_v, N_v$$