Ф. Гаусс

Таблицы для вычисления прямоугольных координат

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Ф11

Ф. Гаусс
Ф11 Таблицы для вычисления прямоугольных координат / Ф. Гаусс – М.: Книга по Требованию, 2013. – 108 с.

ISBN 978-5-458-35666-4

Настоящее издание таблиц по сравнению с предыдущими обладает некоторыми особенностями.1. В таблицы внесены элементы рационализации.2. В настоящем издании проведены начала стандартизации обозначений.Многолетний опыт применения таблиц Гаусса показал, что каждый вычислитель, открыв на каком-либо развороте таблицы приращений координат, имеет склонность при числе градусов, находящемся вверху страниц, начинать отыскание требуемых значений из таблиц с левой страницы. При аргументе, находящемся внизу таблиц, у вычислителя есть стремление начать с правой страницы разворота таблиц.

ISBN 978-5-458-35666-4

ОБЪЯСНЕНИЕ УПОТРЕБЛЕНИЯ ТАБЛИЦ

Таблицы содержат в себе произведение косинуса и синуса углов от 0 до 360° на числа 10, 20, 30, ... до 90. Величина угла изменяется через 1′. Таким образом, эти таблицы являются таблицами с двумя входами. Аргументу угол соответствует вертикальное направление, а аргументу расстояние — горизонтальное направление.

Таблицы предназначены главным образом для вычисления приращений координат по формулам:

$$\Delta x = s \cos \alpha = \pm s \cos r$$

и

$$\Delta y = s \sin \alpha = \pm s \sin r.$$

Здесь s — горизонтальная проекция расстояния между точками,
α — дирекционный угол[1] линии,
r — румб линии.

В настоящем издании таблицы имеют двойную роспись: румбическую и азимутальную.

При румбической росписи градусы напечатаны вверху и внизу каждой страницы крупными цифрами жирным шрифтом. При этом для румбов от 0 до 45° правые страницы таблиц соответствуют синусам (Δy), а левые — косинусам (Δx); число минут румба берется в левом столбце страницы; для румбов от 45 до 90° правая страница соответствует косинусу (Δx), а левая — синусу (Δy), и число минут румба берется в правом столбце страницы.

При азимутальной росписи число градусов поставлено на каждой странице над или под соответствующим столбцом минут. Так, на стр. 52 и 53 числа градусов 197°, 17° и 107°, 287° относятся к левому столбцу минут, идущему сверху вниз, а числа 162°, 342° и 72°, 252° относятся к правому столбцу минут, идущему снизу вверх.

Знаки + или —, поставленные при числе градусов, указывают знак находимого приращения.

---

[1] В связи с введением в СССР системы координат Гаусса-Крюгера имеет смысл различать азимут и дирекционный угол линии.

При вычислениях прямоугольных координат за ось X-ов принимают всегда линию на плоскости, параллельную осевому или условному меридиану. Угол, считаемый в направлении движения часовой стрелки между положительным направлением оси X-ов и направлением горизонтальной проекции данной линии, и есть дирекционный угол. В практике обычных съемок его называют азимутом, хотя это не совсем правильно.

На каждой странице таблиц имеются с правой стороны таблички под заглавием „Cent.“. Они дают поправки на десятые и сотые доли расстояния, причем верхние таблички соответствуют верхней половине страницы, а нижние таблички — нижней половине страницы. Для удобства пользования каждая страница разделена пополам жирной горизонтальной чертой.

По середине между верхними и нижними табличками помещены таблички для отыскания поправок на десятые доли минуты.

При составлении настоящих таблиц применялись следующие правила:

a) если отбрасываемая при округлении часть числа более 0,5 предшествующей (оставляемой) единицы, то последняя оставляемая цифра числа увеличивается на единицу, например число 7,19374 округляется до 7,194;

b) если отбрасываемая часть числа менее 0,5 предшествующей (оставляемой) единицы, то оставляемая часть числа берется без изменения, например 19,1427 округляется до 19,14;

c) если отбрасываемая часть числа равна 0,5 предшествующей (оставляемой) единицы, то число округляется так, чтобы оно оканчивалось четной цифрой, например число 27,165 округляется до 27,16, а число 38,475 округляется до 38,48.

Если в первых двух случаях (a и b) последняя цифра после округления окажется цифрой 5, то над ней ставится в первом случае (a) знак (—), т. е. пишется $\bar{5}$, а во втором случае ставится точка, т. е. пишется $\dot{5}$. Цифры $\dot{5}$ и $\bar{5}$ могут встречаться и не на конце числа, например $23,\dot{5}00$; это обозначает, что число заключается между 23,500 и 23,501.

Такие значки над цифрой 5 могут быть полезны при дальнейшем округлении, например $4,26\bar{5}$ следует при округлении представить в виде 4,26, а число $4,26\dot{5}$ при округлении получает вид 4,27.

Для уяснения правил пользования таблицами ниже приводятся соответствующие примеры.

РУМБИЧЕСКАЯ РОСПИСЬ

Пример 1-й.

$$s = 248{,}56; \quad r = 25°27' \ \ldots \ \text{СЗ}.$$

Непосредственно из таблиц со страниц 68 и 69 выписываем:

	Δx	Δy
Для расстояния 200	180,59	85,94
„ „ 40	36,12	17,19
„ „ 8	7,224	3,438
„ „ 0,56	0,51	0,24
	224,444	106,808

Принимая во внимание название румба (СЗ), получим:

$$\Delta x = +224{,}44; \quad \Delta y = -106{,}81.$$

Пример 2-й.

$$s = 536{,}82; \quad r = 38°46' \ \ldots \ \text{ЮВ}.$$

Так как в таблицах приращения даны до тысячных долей лишь для расстояний 10, 20 и 30, то для расстояния 400 и выше следует сотни разбивать на слагаемые, состоящие из 200 и 300. Имея это в виду, в нашем случае получим:

	Δx	Δy
Для расстояния 200	155,94	125,23
„ „ 300	233,91	187,85
„ „ 30	23,391	18,785
„ „ 6	4,678	3,757
„ „ 0,82	0,64	0,51
	418,559	336,132

Отсюда

$$\Delta x = -418{,}56, \quad \Delta y = +336{,}13.$$

Пример 3-й.

$$s = 307{,}24; \quad r = 52°17',4 \ \ldots \ \text{ЮЗ}.$$

Применяя таблицы поправок на десятые доли минуты, будем иметь:

	Δx	Δy
Для расстояния 300	183,52	237,32
„ „ 7	4,282	5,537
„ „ 0,24	0,15	0,19
	187,952	243,047

Отсюда

$$\Delta x = -187{,}95; \quad \Delta y = -243{,}05.$$

АЗИМУТАЛЬНАЯ РОСПИСЬ

Пример 1-й.

$$s = 357{,}73; \quad \alpha = 218°24'.$$

На стр. 94 и 95 из таблиц на развороте, соответствующем 218° (вверху, слева на обеих страницах разворота), находим.

	Δx	Δy
Для расстояния 300	235,11	186,34
„ „ 50	39,18	31,06
„ „ 7	5,486	4,348
„ „ 0,73	0,57	0,45
	280,346	222,198

Учитывая знаки при числе 218°, получаем:

$$\Delta x = -280{,}35; \quad \Delta y = -222{,}20.$$

Пример 2-й.

$$s = 443{,}48; \quad \alpha = 158°48'.$$

На стр. 60 и 61 на развороте, соответствующем 158° (в верхнем углу, направо на каждой странице), находим, пользуясь правым столбцом минут:

	Δx	Δy
Для расстояния 200	186,46	72,32
„ „ 200	186,46	72,32
„ „ 40	37,29	14,46
„ „ 3	2,80	1,08
„ „ 0,48	0,45	0,17
	413,46	160,35

Принимая во внимание знаки в таблицах при числе 158°, будем иметь:

$$\Delta x = -413{,}46; \quad \Delta y = +160{,}35.$$

Пример 3-й.

$$s = 867{,}32; \quad \alpha = 232°17'.$$

На развороте, соответствующем числу 232° (стр. 92 и 93), находим:

	Δx	Δy
Для расстояния 300	183,53	237,31
„ „ 300	183,53	237,31
„ „ 200	122,35	158,21
„ „ 60	36,71	47,46
„ „ 7	4,28	5,54
„ „ 0,32	0,20	0,25
	530,60	686,08

Учитывая знаки приращений при числе 232°, будем иметь:

$$\Delta x = -530{,}60; \quad \Delta y = -686{,}08.$$

Пример 4-й.

$$s = 328{,}73; \quad \alpha = 285°43',7.$$

На развороте таблиц, соответствующем числу 285° (стр. 48 и 49), находим, пользуясь левым столбцом минут и учитывая, что в нем подписи возрастают сверху вниз:

	Δx	Δy
Для расстояния 300	81,32	288,77
„ „ 20	5,42	19,25
„ „ 8	2,17	7,70
„ „ 0,73	0,20	0,70
	89,11	316,42

Учитывая знаки при 285°, получим:

$$\Delta x = +89{,}11; \quad \Delta y = -316{,}42.$$

Рассматриваемые таблицы могут иметь значительно более широкое применение, а не только для вычисления приращений координат. Так, по ним можно **вычислять горизонтальное проложение линий.**

Формула для определения горизонтального проложения:

$$s = L \cos \alpha,$$

где L — длина наклонной линии,

α — угол наклонения этой линии.

Пример.

Пусть

$$L = 246{,}28;$$

$$\alpha = 7\frac{1°}{4}.$$

Из таблиц находим для 7°15' величину $L\cos\alpha$ (стр. 32):

	$L\cos\alpha$
Для расстояния 200	198,40
„ „ 40	39,68
„ „ 6	5,952
„ „ 0,28	0,28
	244,312

Горизонтальное проложение линии равно 244,31.

Применение таблиц приращений при тахеометрических работах. Известно, что при работах круговым тахеометром горизонтальное проложение s расстояния между станцией и пикетом и разность высот h этих точек определяются при нормальном коэфициенте дальномера по формуле:

$$s = n\cos^2\alpha$$

и

$$h = n\sin\alpha\cos\alpha,$$

где n — число делений отвесно стоящей рейки, заключающееся между дальномерными нитями (отсчет по рейке),

α — угол наклонения линии визирования.

Простыми преобразованиями можно найти, что

$$h = \frac{1}{2}n\sin 2\alpha$$

и

$$s = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n\cos 2\alpha.$$

Следовательно, для нахождения величин h и s нужно взять половину отсчета по рейке $\left(\frac{n}{2}\right)$, удвоить величину угла наклонения (2α) и, пользуясь этими данными, найти по таблицам приращений произведения

$$\frac{1}{2}n\sin 2\alpha \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}n\cos 2\alpha.$$

Пример.

Пусть

$$n = 256; \quad \alpha = +4°12'.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}n = 128; \quad 2\alpha = +8°24'.$$

Пользуясь таблицами приращений, находим:

	$\frac{1}{2}n\sin 2\alpha$	$\frac{1}{2}n\cos 2\alpha$
Для расстояния 100	14,61	98,93
" " 20	2,92	19,79
" " 8	1,17	7,91
	18,70	126,63
		128
		254,63

Таким образом, в нашем случае

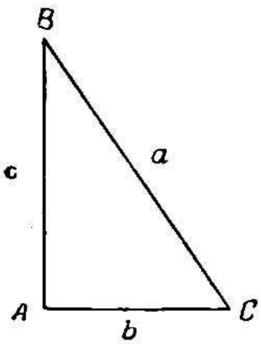
$$h = 18{,}70 \text{ м} \quad \text{и} \quad s = 254{,}6 \text{ м}.$$

По таблицам логарифмов находим для тех же данных:

$$h = 18{,}70 \text{ м} \quad \text{и} \quad s = 254{,}62 \text{ м}.$$

Применение таблиц приращений при тригонометрических вычислениях.

Настоящие таблицы весьма удобны для тригонометрического решения треугольников, особенно в тех случаях, которые обычно имеют место в геодезической практике.



Черт. 1.

Придерживаясь обозначений черт. 1, будем иметь для прямоугольного треугольника известные формулы тригонометрии:

$$b = a \sin B,$$
$$c = a \cos B$$

Таким образом, если даны гипотенуза и один из острых углов прямоугольного треугольника, то определение катетов производится по таблицам в порядке отыскания приращений координат.

Если даны катет и один из острых углов, то таблицы применяются в этом случае в порядке обратного решения вопроса, т. е. подобно отысканию по данному логарифму соответствующего ему числа.

Пример.

$$b = 156{,}43; \quad B = 31°48'.$$

Имеем:

$$a = \frac{b}{\sin B}.$$

Применяя таблицы, находим на стр. 81

$$b = (156{,}43).$$

Для приращения	$\frac{105{,}39}{(51{,}04)}$	200
" "	$\frac{47{,}43}{(3{,}61)}$	90
(из таблиц „Cent.")	$\frac{3{,}16}{(0{,}45)}$	6 0,86
		296,86

Итак,

$$a = 296{,}86.$$

Теперь для определения c применяем формулу:

$$c = a \cos B.$$

Получим:

	c
Для расстояния 200	169,98
" " 90	76,49
" " 6	5,099
" " 0,86	0,73
	252,299

$$c = 252{,}30,$$

$$\angle C = 58°12'.$$

Нетрудно видеть, что все вычисления весьма удобно могут быть объединены в одну компактную схему.

Если применить для отыскания катета c формулу

$$c = b \operatorname{ctg} B,$$

то для решения вопроса по таблицам нужно представить эту формулу в виде:

$$c = \frac{b \cos B}{\sin B},$$

или

$$c = \frac{b}{\sin B} \cdot \cos B.$$

Отсюда видно, что практически придется вести решение по выше приведенной схеме.

Указанный прием применим для отыскания тангенса угла.

Пример. Угол равен 42°36′. Положим b равным 100.

По таблицам ищем:

$$b \cdot \sin B = 100 \cdot \sin 42°36'.$$

Находим число 67,69. Теперь определяем выражение

$$\frac{67{,}69}{\cos 42°36'}.$$

По таблицам находим 91,96.

Отсюда, деля на 100, получим:

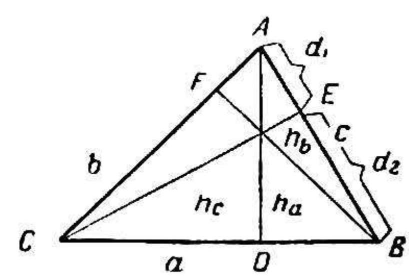
$$\operatorname{tg} 42°36' = 0{,}9196.$$

Логарифмическое вычисление даёт:

$$\operatorname{tg} 42°36' = 0{,}91954.$$

Решение косоугольных треугольников при помощи таблиц сводится фактически к последовательному решению прямоугольных треугольников, которые получаются в косоугольном треугольнике путем проведения высот.

Обозначим в треугольнике ABC (черт. 2) стороны его через a, b и c, противолежащие углы через A, B и C, соответствующие высоты через h_a, h_b и h_c и площадь треугольника через S.



Черт. 2.

Рассмотрим применение таблиц в наиболее употребительных в геодезии случаях решения косоугольных треугольников.

1. Даны:

$$a, \ B \text{ и } C.$$

Для определения остальных элементов треугольника имеем обычные формулы тригонометрии:

$$A = 180° - (B + C),$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

$$S = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{\sin A}.$$

Но из чертежа видно, что

$$h_b = a \sin C,$$
$$h_c = a \sin B,$$
$$b = \frac{h_c}{\sin A},$$
$$c = \frac{h_b}{\sin A},$$
$$S = \frac{1}{2} h_b \cdot b = \frac{1}{2} h_c \cdot c.$$

Эти формулы и решают вопрос.

П р и м е р.

$$a = 173{,}26; \quad B = 58°16'; \quad C = 41°52'.$$
$$A = 180° - (58°16' + 41°52') = 79°52'.$$

По таблицам находим

	$h_b = a \sin C$	$h_c = a \sin B$
Для 100	66,74	85,05
» 70	46,72	59,54
» 3	2,00	2,55
» 0,26	0,17	0,22
	115,63	147,36

Далее, по углу A и высотам h_b и h_c находим:

		$c = \frac{h_b}{\sin A}$
	(115,63)	
Для	− 98,44	100
	(17,19)	
»	− 9,844	10
	(7,346)	
»	− 6,891	7
	(0,455)	0,46
		117,46

		$b = \frac{h_c}{\sin A}$
	(147,36)	
Для	− 98,44	100
	(48,92)	
»	− 39,38	40
	(9,54)	
»	− 8,86	9
	(0,68)	0,69
		149,69

Площадь треугольника

$$S = 8654{,}4.$$

2. Даны:

$$b, \; c \text{ и } A.$$

Для определения остальных элементов треугольника имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$
$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}.$$

Поверка

$$A + B + C = 180°,$$
$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

Вводя в эти формулы значения высот и отрезков d_1 и d_2 стороны AB треугольника (черт. 2), будем иметь

$$h_b = c \sin A,$$
$$h_c = b \sin A,$$
$$d_1 = b \cos A,$$
$$d_2 = c - d_1,$$
$$a = \sqrt{h_c^2 + d_2^2},$$
$$\sin B = \frac{h_c}{a},$$
$$\sin C = \frac{h_b}{a}.$$

Поверка

$$A + B + C = 180°,$$
$$S = \frac{1}{2}\, b \cdot h_b = \frac{1}{2}\, c \cdot h_c.$$

Пример.

$$b = 149{,}69; \quad c = 117{,}46; \quad A = 79°52'.$$

По таблицам, согласно приведенным формулам, находим:

	h_c	d_1
Для 100	98,44	17,59
» 40	39,38	7,04
» 9	8,86	1,58
» 0,69	0,68	0,12
	147,36	26,33
		c = 117,46
		d_2 = 91,13

	h_b
Для 100	98,44
» 10	9,844
» 7	6,891
» 0,46	0,45
	115,625
	115,63

$$a = \sqrt{147{,}36^2 + 91{,}13^2} = 173{,}26.$$

Непосредственным делением получаем:

$$\sin B = \frac{h_c}{a} = \frac{147{,}36}{173{,}26} = 0{,}8505,$$
$$\sin C = \frac{h_b}{a} = \frac{115{,}63}{173{,}26} = 0{,}6674.$$

Непосредственно из таблиц по этим данным находим:

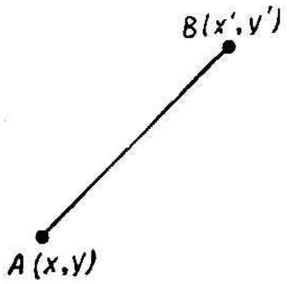
$$B = 58°16' \quad \text{и} \quad C = 41°52'.$$

Поверка

$$A + B + C = 180^\circ,$$

$$S = 8654,4.$$

Менее удобно, но возможно применение таблиц для решения обратной задачи на координаты, т. е. для определения длины и направления линии AB (черт. 3) по координатам x, y и x', y' концов этой линии.



Черт. 3.

Известны для этой цели в геодезии формулы

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y' - y}{x' - x}.$$

$$s = \frac{y' - y}{\sin \alpha} = \frac{x' - x}{\cos \alpha}.$$

$$s = \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2},$$

В случае применения таблиц формулы применяются в таком порядке:

$$s = \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2},$$

$$\sin \alpha = \frac{y' - y}{s}.$$

Поверка

$$\cos \alpha = \frac{x' - x}{s}.$$

Пример.

$$x = -648,25; \quad y = +105,21.$$

$$x' = -434,62; \quad y' = -76,05.$$

Непосредственным вычислением получаем:

$$x' - x = +213,63; \quad y' - y = -181,26$$

$$a = \sqrt{213,63^2 + 181,26^2} = 280,17.$$

$$\cos \alpha = +\frac{213,63}{280,17} = 0,7625.$$

$$r = 40^\circ 19' \ldots \text{СЗ}.$$

$$\alpha = 319^\circ 41'.$$

Для поверки вычисляем:

$$\sin \alpha = -\frac{181,26}{280,17} = -0,6470,$$

получим:

$$r = 40^\circ 19',$$

что вполне хорошо согласуется с выше найденным значением.

Переходя к вопросу о точности вычисления координат при помощи таблиц, нужно прежде всего отметить, что в таблицах по самому их устройству наименее точными являются столбцы, соответствующие числам 10 (для сотен) и 40 (для десятков). Наибольшая ошибка от округления в этих столбцах может достигнуть, соответственно, $\frac{1}{20000}$ и $\frac{1}{8000}$ расстояния.