М. Гэри, Д. Джонсон

Вычислительные машины и труднорешаемые задачи

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М11

М. Гэри
М11 Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон – М.: Книга по Требованию, 2012. – 420 с.

ISBN 978-5-458-26100-5

Монография американских ученых, посвященная вопросам сложности решения комбинаторных задач, возникающих в дискретной оптимизации, математическом программировании, алгебре, теории чисел, теории автоматов, математической логике, теории множеств, теории графов и т.п. Книга отличается строгим и систематическим изложением теории, в приложении содержится более 300 труднорешаемых задач из различных разделов математики.

ISBN 978-5-458-26100-5

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

МНОЖЕСТВО ВЕРШИН, РАЗРЕЗАЮЩИХ КОНТУРЫ (feedback vertex set) 100
- ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ (hitting set) 86
Мультираскраска графа 182
Набор значений истинности (truth assignment) 56
НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ПОДГРАФ 99
НДМТ-программа 46
Недетерминированная машина 26
- одноленточная машина Тьюринга, или НДМТ 46
- оракульная машина Тьюринга, или НОМТ 202
НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО 74
Неразрешимая задача (undecidable) 25
НЕУНИВЕРСАЛЬНОСТЬ РЕГУЛЯРНОГО ВЫРАЖЕНИЯ 217
НЕЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РЕГУЛЯРНОГО ВЫРАЖЕНИЯ, НЕ СОДЕРЖАЩЕГО ЗВЕЗДОЧЕК 100
- ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ 207
НУМЕРАЦИЯ ГРАФА ПО ГРУНДИ 101
ОБОБЩЕННЫЙ ГЕКС (generalized Hex) 216
ОМТ-программа 144
Оптимальное решение задачи 156
Оракульная машина Тьюринга, или ОМТ (oracle) 141
Остовное дерево (spanning tree) 86, 165, 258
ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО ОГРАНИЧЕННОЙ СТЕПЕНИ 86
Отношение Rм (relation) 198
Параметр 16
- числовой 122
Паросочетание (matching) 167, 169
- максимальное 169
Переборная задача (search problem) 139
Погрешность алгоритма (performance ratio) 162
Подзадача (subproblem) 105
Покрытие множества (cover) 86
Полиномиальная ДМТ-программа 42
- ОМТ-программа 144
- память (space) 212
- схема 173
- сводимость (polynomial transformation) 51—52
Полиномиально эквивалентны (polynomialy related) 35
Построение компоненты (component design) 84, 96
Правильно построенное слово (structured string) 36
Принимаемое программой слово (accepted) 39
ПРИНЯТИЕ С ЛИНЕЙНОЙ ПАМЯТЬЮ 218
Программа ДМТ (DTM) 38
- НДМТ (NDTM) 46
Псевдополиномиальная сводимость (pseudo-polynomial transformation) 130
Псевдополиномиальный алгоритм 121
РАЗБИЕНИЕ (partition) 66, 81
- НА ГАМИЛЬТОНОВЫ ПОДГРАФЫ 99
- - ПУТИ ДЛИНЫ 2, 100
- - ТРЕУГОЛЬНИКИ 90—91
разбиение, 3, 124
разбиение, 4, 125
Размер задачи (size) 17—18
РАЗМЕР МИНИМАЛЬНОГО ЭКВИВАЛЕНТНОГО ВЫРАЖЕНИЯ 205

РАСКРАШИВАЕМОСТЬ ГРАФА В colorability, цвета, 3, 3, 101, 110, 182
РАСПИСАНИЕ ДЛЯ МУЛЬТИПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЫ 87
- - ОБРАТНОГО ДЕРЕВА ЗАДАНИЙ 112
- - ПРЯМОГО ДЕРЕВА ЗАДАНИЙ 112
- С ОТНОШЕНИЕМ ПРЕДШЕСТВОВАНИЯ (precedence constrained scheduling) 107
Распознавание языка (recognition)
РАСЩЕПЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА (splitting) 100
РЕБЕРНОЕ ПОКРЫТИЕ (edge cover) 112
Регулярное выражение 217
Релятивизация 230
Решение задачи алгоритмом (solution) 17
РЮКЗАК (knapsack) 87, 171
САМЫЙ ДЛИННЫЙ ПУТЬ 99, 112
Сводимость консервативная (parsimonious transformation) 210
- по Куку 150
- полиномиальная 51—52
- по Тьюрингу 141
- псевдополиномиальная 130
- log-space 222
- Y(v-reducibility) 198
Словарное отношение (string relation) 140
Слово алфавита (string) 33
- - — правильно построенное (structured) 36
Сложность алгоритма временная (time complexity function) 18, 137
СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА (composite numbers) 194
Степень вершины графа (degree) 110
Сужение задачи (restriction) 85
Схема кодирования (encoding scheme) 18
- приближенная 173
- - «разумная» 24, 34, 36
Теория графов 110
ТОЧНОЕ ПОКРЫТИЕ множествами, тп, 3, 3, 73
- - множествами, 4, 100
ТРАНЗИТИВНАЯ РЕДУКЦИЯ 112
ТРЕХМЕРНОЕ СОЧЕТАНИЕ (с, 3, 65, 70
Угадывающее устройство (guessine device) 47
Упаковка в контейнеры 157
УПАКОВКА МНОЖЕСТВ 99
УПОРЯДОЧЕНИЕ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛОВ (sequencing within intervals) 93
- С МИНИМАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ (tardiness) 97
Управляющее устройство ДМТ (finite state control) 38
Функция, конструируемая по времени (time constructible) 227
- - по памяти (space constructible) 227
Цепочка символов (string) 18
Цикл простой в графе (simple circuit) 53
Числовой параметр (number) 122
Читающая/пишущая головка ДМТ 38
Эвристический алгоритм 155
Эйлеров граф 166
- маршрут (tour) 166
Эквивалентность полиномиальная 35
Язык в алфавите 33—34
- контекстно-зависимый (context-sensitive) 220
- распознаваемый программой 39, 47
- рекурсивный 193
- log-space-полный 223
- NP-полный 55

- \gamma-полный 199
DLB-автомат детерминированный линейно ограниченный 220
GA-алгоритм 171
К-е ПО ПОРЯДКУ ПОДМНОЖЕСТВО (K-th largest set subset) 145
КР-полная задача (#P-complete) 210
Length [I] 35, 119
Max [I] 119—120
MM-алгоритм 167—168
MST-алгоритм 166
NLB-автомат (недетерминированный линейно ограниченный) 220
NN-алгоритм 163—164
NP-легкая задача (easy) 149
NP-полная задача 27, 45, 48, 51
- - в сильном смысле 123
NP-трудная задача (hard) 145
NP-эквивалентная задача 149
P-space-полная задача 213

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Математике всегда было присуще стремление разрабатывать эффективные методы решения как можно более широких классов задач. Многолетний опыт развития теории дискретных и комбинаторных задач и практика их решения показали, что эти две стороны — общность метода и его эффективность — находятся в известном антагонизме. Вместе с тем, очень важно знать, и в особенности это касается задач дискретной математики, можно ли в принципе надеяться на создание достаточно общих и эффективных методов или надо сознательно идти по пути разбиения задач на все более узкие классы и, пользуясь их спецификой разрабатывать для них эффективные (хорошие) алгоритмы.

Неудачи, постигшие исследователей на этом пути, привели к необходимости анализа сложности задач. На наших глазах возникло новое и интенсивно развивающееся "сложностное" направление исследований. Число публикаций в этой области быстро растет, так что появление настоящей книги, посвященной вопросам сложности дискретных и комбинаторных задач, вполне закономерно. Проблематика эта весьма актуальна, поскольку такие задачи часто возникают на практике (в экономике, технике, военном деле, в исследовании операций и т. д.), а их решение средствами ЭВМ наталкивается на трудности, связанные с большими затратами машинного времени и памяти.

Предисловие авторов и вводная глава, где обсуждается содержание книги, позволяют читателю ознакомиться (на интуитивном уровне) с основными идеями, понятиями и вопросами, освещаемыми в книге. Поэтому мы, не повторяясь, заострим внимание читателя на некоторых принципиальных вопросах.

Большинство дискретных и комбинаторных задач, вообще говоря, допускает решение с помощью некоторого процесса перебора. Так, например, булевскую задачу о рюкзаке вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b, \ x_i = 0,1$$

можно решить, перебирая булевские n-мерные векторы (варианты). Такие задачи называются переборными. Однако число шагов переборного метода растет экспоненциально в зависимости от размеров задачи. Для некоторых задач этого типа удается построить эффективные (существенно менее трудоемкие, чем полный перебор вариантов) методы решения, (это удается сделать например, для решения в $\mathbf{Z}^n$ систем линейных уравнений с целыми коэффициентами для потоковых задач, для нахождения паросочетаний в графе и т. д.). Однако, число таких задач невелико.

Анализ трудностей, встретившихся на пути создания эффективных методов решения дискретных задач, привел к постановке центральной теоретико-методологической проблемы всей дискретной математики — можно ли исключить перебор при решении дискретных задач? Другими словами, речь идет о принципиальной возможности найти нужное решение (например, оптимальное), не перебирая всех или почти всех вариантов в задаче. Эта проблема имеет не только чисто математическое, но и глубокое познавательное значение. Оно заключается в том, что при поиске эффективных точных методов решения широкого класса дискретных задач надо учитывать возможность *отсутствия таких методов* и, следовательно, уметь вовремя ограничить "аппетит", признав что существуют "труднорешаемые задачи". До настоящего времени эта проблема остается открытой.

Феномен труднорешаемых задач не нов для математики. После уточнения понятия алгоритма было обнаружено наличие алгоритмически неразрешимых проблем. В качестве наиболее известного примера укажем десятую проблему Гильберта: "Существует ли алгоритм, который по данному многочлену $p(x_1, \ldots, x_n)$ с целыми коэффициентами распознает, имеет ли уравнение $p=0$ решение в целых числах". Как показал Ю. В. Матиясевич [376], такого алгоритма в принципе не существует.

В переборных задачах, как правило, имеется конечное множество вариантов, среди которых нужно найти решение. Так, в задаче о рюкзаке решение отыскивается среди 2^n булевских векторов длины n, и перебрав это экспоненциальное множество векторов, мы обязательно решим задачу. Но с ростом n число векторов быстро растет и задача становится "труднорешаемой", т. е. практически неразрешимой. Поэтому в конечной области аналогом алгоритмической неразрешимости является перебор экспоненциального числа вариантов, а аналогом алгоритмической разрешимости — существование алгоритма существенно более экономичного, чем перебор. Стало общепринятым считать переборную задачу решаемой эффективно, если имеется алгоритм, решающий ее за время, ограниченное полиномом от "размера задачи".

В настоящей книге систематически излагается концепция эффективной (полиномиальной) сводимости переборных задач, развитая в работах С. Кука [91], Р. Карпа [280], Л. Левина

[340], а также освещаются более поздние результаты в этой области. Роль основного инструмента здесь играет понятие *сводимости* задач, возникшее в математической логике. Говорят, что переборная задача Π_1 сводится к переборной задаче Π_2, если метод решения задачи Π_2 можно преобразовать в метод решения задачи Π_1. Сводимость называется полиномиальной, если подобное *преобразование* можно осуществить за полиномиальное время. Главными объектами теории являются: класс NP всех переборных задач и класс P переборных задач, разрешимых за полиномиальное время на машине Тьюринга. Очевидно, что $P \subseteq NP$. Центральным в теории сводимости является вопрос о том, *совпадают ли классы* P и NP — такова математическая формулировка проблемы элиминации перебора.

В классе NP выявлены так называемые универсальные (или NP-полные) задачи, к которым полиномиально сводится любая задача из NP. В этом смысле универсальные задачи как бы дают эталон сложности. В настоящее время установлена универсальность многих задач, эквивалентных между собой относительно полиномиальной сводимости. В книге приведено много примеров NP-полных задач. Если бы удалось доказать, что хотя бы какая-то одна NP-полная задача принадлежит классу P, то тем самым было бы доказано, что $P = NP$, и можно было бы в принципе надеяться на построение эффективных алгоритмов для различных классов дискретных задач. Если же классы P и NP различны, то придется разрабатывать эффективные алгоритмы для все более узких классов задач. Однако возможна и такая ситуация, что гипотезу $P \neq NP$ (принимаемую многими математиками) нельзя ни доказать, ни опровергнуть (аналогично континуум-гипотезе).

Большой практический опыт решения дискретных задач дает основание считать, что NP-полные задачи и задачи из P сильно отличаются по трудоемкости решения, но в строгом смысле до сих пор это различие и, следовательно, различие между классами P и NP не доказано. Это, в частности, объясняется тем, что классы P и NP определяются с помощью понятия времени работы вычислительного устройства с потенциально неограниченной памятью. Однако хорошо известно, что время выполнения алгоритма на машине плохо поддается описанию и анализу общематематическими средствами. Следует отметить, что еще в 1965 г. Кобхэм [80] попытался описать сложность вычисления функций внутренним образом, в рамках последовательности алгебраических операций, порождающих эти функции. К сожалению, эта работа оказалась в тени, поскольку в то время не было еще теории сводимости переборных задач.

Излагаемая в книге и ставшая уже классической теория полиномиальной сводимости была построена для задач распознавания свойств. Оказывается, можно построить аналогичную теорию (полиномиальной) сводимости для экстремальных дискретных задач [16*, 31*, 32*]. Более того, при построении указанной теории можно не пользоваться моделью вычислительного устройства, т. е. сделать ее машинно независимой, а все изложение вести в терминах вычислимых операторов над функциями [16*, 21*, 22*].

Книга Гэри и Джонсона — это, насколько нам известно, первая монография по теории полиномиальной сводимости дискретных задач. В ней систематически изложен материал, разбросанный по журнальным статьям и отчетам. Авторы не ограничились описанием концепции Кука — Карпа — Левина, а дополнили ее новыми вопросами, в том числе своими собственными результатами. Особый интерес в этом смысле представляют гл. 6—7, где собран большой теоретический материал по новым направлениям исследований и намечаются "точки роста" теории. О разнообразии и богатстве материала этих глав свидетельствует краткий перечень вопросов, освещаемых в них: оценки алгоритмов, их отклонения от оптимума, оценки в худшем случае и в среднем для различных классов задач; структура класса NP, существование в NP труднорешаемых задач, отличных от NP-полных; полиномиальная по сложности иерархия задач; сложность задач определения числа решений без их предъявления; различные типы вычислительных ресурсов, используемых при решении задач; взаимосвязь между сложностью по времени и сложностью по памяти; задачи с логарифмической памятью, сводимость с логарифмической памятью; доказательства труднорешаемости задач.

Книга содержит поистине уникальное приложение — в нем собрано более 300 задач из различных областей науки: теории графов, математического программирования, теории расписаний, теории языков и автоматов, математической логики, и отдельно — открытых задач. Здесь для каждой задачи, помимо основной формулировки и источника, приводится комментарий, включающий сводку результатов о задаче и ее модификациях (с указанием авторов), а также смежные вопросы. Все это делает приложение исключительно ценным справочным пособием.

В конце книги дана обширная библиография — около 600 работ. Мы сочли целесообразным несколько расширить библиографический список, добавив ряд работ — либо вышедших позже, либо оказавшихся вне поля зрения авторов. Эти работы дают представление о новых направлениях исследований и результатах в рассматриваемой области. (Добавленные при переводе работы сведены в отдельный список и их номера помечены звездочкой.)

Книга хорошо написана и читается достаточно легко, хотя новизна материала и, как следствие, не вполне установившаяся терминология затрудняли работу переводчиков и редактора. Неудивительно, что при большой насыщенности и разнообразии материала в книге обнаружились некоторые неточности, погрешности, опечатки, которые переводчики и редактор постарались устранить путем введения соответствующих примечаний или небольшого исправления авторского текста.

Книга предназначена для математиков, а также для всех, кто интересуется дискретными и комбинаторными задачами и их приложениями. Она отражает новое направление в развитии теории дискретных и комбинаторных задач. Внимательный читатель найдет в ней новый взгляд на дискретные задачи, свежие идеи, подходы, много открытых вопросов, порождающих и стимулирующих интерес к самостоятельной творческой работе.

В заключение хочется поблагодарить Ю. И. Хмелевского, М. Р. Когаловского, В. П. Гришухина, А. Л. Семенова, С. Г. Влэдуца, А. Б. Ароновича за помощь в работе над переводом книги: их замечания и советы помогли устранить ряд неточностей и способствовали улучшению качества перевода.

А. Фридман

ПРЕДИСЛОВИЕ

Найдется немного научных терминов, так быстро завоевавших широкую известность, как понятие "NP-полная задача". За короткий отрезок времени с момента возникновения этого понятия в начале 70-х годов оно стало символом громадных трудностей, с которыми все чаще приходится сталкиваться разработчикам алгоритмов по мере того, как они берутся за решение задач постоянно возрастающей размерности и усложняющейся структуры. Многочисленные и разнообразные задачи, часто встречающиеся в математике, теоретическом программировании и исследовании операций, оказались NP-полными, и список таких задач пополняется почти ежедневно. NP-полные задачи настолько широко распространены, что для всех, кто в своей работе соприкасается с вычислительными аспектами указанных областей, очень важно понимать смысл и значение этого понятия.

Настоящая книга задумана как подробное руководство по теории NP-полных задач; здесь особое внимание уделено тем понятиям и приемам, которые представляются наиболее полезными для применения теории к практическим задачам. Книгу можно условно разбить на три части.

В первой части (гл. 1—5) изложены основы теории NP-полных задач. Гл. 1 представляет собой сравнительно элементарное введение в некоторые центральные понятия вычислительной сложности, и в этом контексте обсуждается значение NP-полных задач. В гл. 2—5 подробно изложены определения и методы доказательства, необходимые для того, чтобы глубже понять теорию и научиться ею пользоваться на практике.

Во второй части (гл. 6 и 7) дан обзор двух альтернативных направлений дальнейшего изучения. В гл. 6 внимание сосредоточено на поиске эффективных "приближенных" алгоритмов решения NP-полных задач, т. е. области, тесно связанной с теорией NP-полноты. В гл. 7 обсуждаются многочисленные теоретические вопросы сложности вычислений, многие из которых возникли в результате развития теории NP-полных задач, изложенной в предыдущих главах. Обе эти главы (особенно гл. 7) следует рассматривать исключительно как введение в соответствующие области. Читателю, желающему более детально ознакомиться с теми или иными вопросами, следует обратиться к указанной нами литературе.