

Е.А. Бугулов, Б.А. Толасов

**Сборник задач для
подготовки к
математическим олимпиадам**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-053.2
ББК 74.27
Е11

Е11 **Е.А. Бугулов**
Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам / Е.А. Бугулов,
Б.А. Толасов – М.: Книга по Требованию, 2012. – 222 с.

ISBN 978-5-458-33098-5

Книга представляет собой сборник олимпиадных задач по арифметике, алгебре, геометрии и тригонометрии, разбитый по темам, причем почти каждая тема предваряется теоретическими положениями. Пособие адресовано учителям математики и интересующимся математикой учащимся. Книга является библиографической редкостью.

ISBN 978-5-458-33098-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

5) Ставка пассажира Петрова — 200 руб.

6) Сидоров (из бригады) выиграл у кочегара партию в шахматы. Как фамилия машиниста?

37. Из трёх победителей математической олимпиады, набравших одинаковое число очков, надо было выделить самого сообразительного. Для этого поступили так: им показали пять колпаков — 3 белых, 2 серых. Завязав им затем повязками глаза, на голову каждого надели белый колпак. Когда повязки были сняты, было объявлено, что победителем турнира будет первый определивший цвет своего колпака.

Некоторое время соревнующиеся смотрели друг на друга. Наконец, один из них уверенно сказал, что на него надели белый колпак. Как он рассуждал?

• 38. Путешественник попал в один из соседних городов А или В. Ему известно, что жители города А говорят только правду, а жители города В всегда лгут, и что жители А бывают в В и наоборот. Как, задав первому встречному только один вопрос, путешественник может выяснить, в каком городе он находится?

• 39. На острове N с давних времен обосновались рокоманцы из ближайшего континента, воспринявшие все обычаи, язык и культуру местных туземцев. От коренных жителей отличаются пришельцы только тем, что они всегда врут, местные же всегда говорят только правду. Однажды капитан какого-то корабля, приставшего к острову, сошёл на берег и, увидев трёх стариков, спросил первого из них: «Ты рокоманец?» Старик был дряхлый и его ответ капитан не расслышал, поэтому он обратился к двум другим: «Этот старик, кажется, сказал, что он рокоманец?» «Да, он так и сказал», — ответил второй. «Нет, — он сказал, что он туземец», — сказал третий. Спрашивается: кем был второй старик и кем был третий?

40. Известны часы начала (но не минуты!) первого, второго, седьмого и восьмого сеансов: 12 ч., 13 ч., 23 ч. и 24 ч. Зная, что продолжительность всех сеансов одинакова, установить начала всех восьми сеансов.

41. В школьном саду квадратной формы пионеры посадили 21 дерево, образовав из них 16 рядов, причём на четырёх сторонах квадрата они разместили по 3 дерева, а в каждом из 12 внутренних рядов — по 5 деревьев. Как они это сделали?

42. Задача современного американского математика Крайчика. Пришли ко мне два друга. Оба отличные шахматисты. После обеда я с каждым из них сыграл по одной партии и обе проиграл, несмотря на то, что имел пешку в качестве «форы». Вошедшая в комнату двенадцатилетняя дочь приветствовала нас и сказала: «Папочка, я стыжусь за тебя. Если позволишь, я сыграю успешнее и без всякой «форы». Я буду играть одновременно на двух досках: с одним партнёром белыми, с другим — чёрными». (Кстати, дочь была едва лишь знакома с правилами движения фигур). К моему восторгу, смешанному с досадой,

она действительно сыграла с лучшим результатом, нежели я. Как она действовала?

43. Найти наименьшее натуральное число, половина которого есть пятая степень.

44. Вырежьте из картона пять одинаковых прямоугольных треугольников так, чтобы у каждого треугольника один катет был вдвое больше другого. Разрежьте один из треугольников на такие две части, чтобы можно было из остальных треугольников и этих частей сложить квадрат.

45. В какой системе счисления даны следующие таблицы сложения и умножения:

$1+1=2$; $1+2=3$; $1+3=4$; $1+4=10$; $2+2=4$;
 $2+3=10$; $2+4=11$; $3+3=11$; $3+4=12$; $4+4=13$;
 $2 \cdot 2=4$; $2 \cdot 3=11$; $2 \cdot 4=13$; $3 \cdot 3=14$; $3 \cdot 4=22$; $4 \cdot 4=31$;

46. В каких системах счисления выполнены действия:

$$\begin{array}{r} 1) \quad + 1206 \\ \quad \quad 362 \\ \hline \quad 1601 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad - 2304 \\ \quad \quad 517 \\ \hline \quad 1565 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3) \quad \times 35 \\ \quad \quad 27 \\ \hline \quad 268 \\ \quad \quad 71 \\ \hline 1078 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4) \quad 2300 \overline{) 43} \\ \quad 213 \overline{) 32} \\ \hline \quad 130 \\ \quad 130 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

Все результаты проверить с помощью обратных действий.

47. Число 138 перевести в пятеричную систему.

48. Число 247_8 перевести в десятичную систему.

49. Число 1024_9 перевести в восьмеричную систему двумя способами.

50. Какое двузначное число, будучи записано в двоичной, четверичной и восьмеричной системах счисления, изображается каждый раз в одних и тех же цифрах (различных счислениях).

51. Задумано число, кратное 3. Если изобразить его в восьмеричной системе и приписать к нему справа 0, то получится четырехзначное число, сохраняющее прежнее значение если считать, что оно теперь изображено в системе с основанием 4. Найти задуманное число.

52. Найти число, являющееся точным квадратом, если известно, что оно четырехзначное в пятеричной системе, а если его записать в семеричной системе, то оно выражается одинаковыми цифрами.

53. Показать, что любое целое число можно представить в

виде суммы степеней числа 2; суммы и разности степеней числа 3.

54. Показать, что правило извлечения квадратного корня одинаково во всех системах счисления.

55. Доказать, что во всякой системе счисления и при $a \geq 5$ четырёхзначное число $N = (a-3)(a-3)44$ является точным квадратом.

56. Задача древнеримского геометра Эпафродита. Найти число всех деревьев, посаженных на пятифутовом расстоянии друг от друга на прямоугольном участке земли, стороны которого 120 футов и 70 футов. (Обобщить эту задачу для прямоугольника со сторонами a и b).

57. Задача из древнекитайского трактата «Киу-Чанг» (2637 г. до н. э.). В клетке находится неизвестное число фазанов и кроликов. Известно только, что вся клетка содержит 35 голов и 94 ноги. Требуется узнать число фазанов и число кроликов.

58. Задача из древнееврейского трактата «Бава-батра» (около IV века до н. э.). Пять дворов расположены один за другим, соединены проходами, но выход в переулок общий. Расходы по содержанию дворов распределены так, что живущие на заднем дворе принимают участие в расходе по всем 5 дворам, живущие в следующем — по четырём дворам и т. д. Наконец, живущие в переднем дворе принимают участие только по этому последнему. Какая часть расходов падает на каждый двор?

59. Задача из сборника «Задачи для изощрения ума» английского учёного Алкуина (735—804). Собака гонится за кроликом, находящимся в 150 футах от неё. Она делает прыжок в 9 футов каждый раз, когда кролик делает прыжок в 7 футов. Сколько прыжков должна сделать собака, чтобы догнать кролика?

60. Задачи из трактата «Чародей-математик» английского математика Д. Валлиса (1616—1703). 1) Даны три сосуда в 3; 5 и 8 единиц объёма. Первые два пустые, а третий полный. Разделить путём переливания содержимое третьего сосуда на две равные части. 2) Существует ли на свете два человека с одинаковым числом волос на голове?

61. Задача французского математика Б. Паскаля (1623—1662). Найти общий признак делимости на произвольное число.

62. Задачи французского математика Б. де Мезириака (1581—1638). 1) Рота пехоты подходит к берегу реки, но оказывается, что мост сломан, а брода нет. У берега два мальчика играют в челноке, но таком маленьком, что в нём может переправиться только один взрослый или двое детей. Спрашивается, как с помощью этого челнока может вся рота переправиться на другой берег? 2) Каким наименьшим числом гирь и какого веса можно отвесить на весах любое целое число фунтов от 1 до 40 при условии, что при взвешивании гири можно класть на обе чашки весов?

63. Задача из «Курса математики» французских авторов Ал-

лез, Билли, Пюиссан и Будро (XIX в.). Желая определить среднюю дальность полёта из некоторого артиллерийского орудия, сделали 100 пробных выстрелов и нашли, что

18	выстрелов	дали	дальность	632 м,
25	—>—	—>—	—>—	628 м,
53	—>—	—>—	—>—	620 м,
4	—>—	—>—	—>—	640 м.

Какова средняя дальность полёта снаряда?

64. Задача, названная именем французского математика С. Пуассона (1781—1840). Некто имеет 12 пинт вина и хочет подарить из него половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. У него два сосуда, один в 8, другой в 5 пинт. Спрашивается: каким образом налить 6 пинт в сосуд в 8 пинт?

65. Задача Л. Ф. Магницкого (1669—1739). Некий человек на вопрос, сколько он имеет денег, ответил: «Аще придастся к моим деньгам толико же, елико имам, и полтолико, и $\frac{3}{4}$ и $\frac{2}{3}$, и убавится из всего 41 рублѣв, и тогда будет у меня 100 рублѣв, и ведательно есть, колико той человек имяше денег».

66. Осетинская народная задача. Три брата косили сено на трёх участках. Старший брат, выйдя на работу раньше других, захватил третью часть имевшихся у них яблок. Второй брат, не зная, что старший уже взял свою долю, забрал треть остатка и, наконец, проспавший третий брат — треть второго остатка. Собравшись после работы, братья заметили, что оставшиеся яблоки они могут поделить поровну, не разрезая их. Сколько было у братьев всего яблок?

§ 2. Элементы теории чисел

1. Если остаток от деления некоторого целого числа на 9 есть одно из чисел 2, 3, 5, 6 и 8, то это число не может быть точным квадратом. Доказать.

2. Доказать, что если даны два числа a и b , из которых второе делится на 3, и если их приближённое частное, вычисленное с точностью до 0,01, равно точному частному, то и a делится на 3. (Показать, что вместо 3 можно взять любое число, взаимно простое с 10).

3. Доказать, что число

$$70a + 21b + 15c - N$$

делится на 105, если a , b и c — остатки от деления целого числа N соответственно на 3, 5 и 7.

Доказать, что дроби

$$\frac{2n+1}{2n(n+1)} \quad \text{и} \quad \frac{14n+3}{21n+4}$$

при любом натуральном n несократимы.

5. Доказать, что дробь

$$\frac{a^2b^2}{a^3+b^2}$$

несократима, если a и b — взаимно простые числа.

6. Дана несократимая дробь

$$m = \frac{n+17}{n-4}, \quad \text{где } n \text{ — целое число.}$$

1) Определить значение n , при котором данная дробь будет иметь приближённое значение с точностью до 0,01 по недостатку, равное 8,47;

2) Если дробь сократима, то какие значения может иметь наибольший общий делитель числителя и знаменателя?

3) Найти значение n , при котором дробь m равна квадрату некоторой несократимой дроби $\frac{a}{b}$.

7. Дана дробь $\frac{a}{b}$. Какому условию должна удовлетворять дробь $\frac{m}{n}$, чтобы было:

$$\frac{a+m}{b+n} = \frac{m}{n} ?$$

8. Дана несократимая дробь $\frac{a}{b} > 1$.

1) Будут ли несократимыми дроби $\frac{a-b}{a}$ и $\frac{a+b}{b}$?

2) Будет ли несократимой дробь $m = \frac{a-b}{a} \cdot \frac{a+b}{b}$?

3) Может ли дробь m быть выражена точной десятичной дробью?

9. Найти дробь, равную $\frac{399}{1064}$, зная, что сумма её компонентов составляет куб простого числа.

10. Доказать, что при любом натуральном n дробь

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

обращается в смешанную периодическую десятичную дробь.

11. Доказать, что при делении двух чисел на их разность получаются равные остатки, а частные отличаются на 1.

12. Доказать, что если a и b — целые числа и $a^2 + b^2$ делится на 7, то каждое из чисел a и b делится на 7.

13. Показать, что всякое чётное число можно представить как разность произведений двух пар последовательных чисел.

14. Показать, что всякое нечётное число и половина следующего за ним числа взаимно просты.

15. Найти число, кратное 2, 3, 7, и имеющее 42 делителя.

16. Найти число, зная, что оно имеет нечётное число делителей и при делении на 39 даёт в частном простое число, а в остатке 1.

17. Доказать, что если чётное число есть сумма двух квадратов, то и половина его есть сумма двух квадратов.

18. Доказать, что если

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

то xyz делится на 60.

19. Доказать, что выражение $ab(a^4 - b^4)$ при любых нечётных значениях a и b делится на 240.

20. Доказать, что при любом натуральном n :

1) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ делится на 11;

2) $10^n + 18n - 28$ делится на 27;

3) $9^{n+1} - 8n - 9$ делится на 64;

4) $5 \cdot 49^{n+1} + 8^n$ делится на 41;

5) $49^n - 48n - 1$ делится на 2304;

6) $3^{2n+1} \cdot 5^n - 3^{n+1} \cdot 2^n$ делится на 117;

7) $11^{6n+3} + 1$ делится на 148;

8) $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ делится на 25;

9) $\frac{n^6 - 5n^3 + 4n}{n+2}$ делится на 24;

10) $n^2 + 1$ не делится на 9.

21. Показать, что $7^{40} - 1$ делится на 3300.

22. Показать, что выражение $1 + 2^n + 4^n$ делится на 7, если $n = 3k \pm 1$.

23. Показать, что выражение:

$$625^{2a+1} + 4 \cdot 125^{2a+1} + 6 \cdot 25^{2a+1} + 4 \cdot 5^{2a+1} + 1$$

делится на 1296, если a — натуральное число.

24. Доказать, что при любом целом n выражение

$$n^7 - 14n^5 - 49n^3 - 36n$$

делится на 5040.

25. Показать, что если a — нечётное число, не делящееся на 3 и 5, то выражение

$$(a^2 - 1)(a^4 - 16) \cdot [a^2 - (2a + 1)^2]^2$$

делится на 23 040.

26. При каких значениях n числа:

$$N = 20^n + 16^n - 3^n - 1$$

делятся на 323?

27. Доказать, что выражение:

$$2(a-1)^{n+1} - (2-a)^n$$

делится на $2a - 3$.

28. Доказать, что если целое число, являющееся точным квадратом, содержит нечётное число десятков, то последняя его цифра есть 6.

29. Доказать, что у любого точного квадрата произведение двух последних цифр чётно.

30. Из цифр трёхзначного числа N составляются два новых числа M и m — самое большое и самое малое среди чисел, составленных из тех же цифр, что и N ; далее составляется разность $N_1 = M - m$, и с числом N_1 поступают так же, как ранее с числом N . Доказать, что, повторив некоторое число раз этот процесс, мы обязательно придём к числу 495. Каково наименьшее число k такое, что k — кратное повторение описанного процесса обязательно приводит к числу 495.

31. Доказать, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то произведение чисел, выражающих длины катетов, делится на 12.

32. Доказать, что неделимость целого числа n на 2 и 3 есть необходимое и достаточное условие делимости числа $4n^2 + 3n + 5$ на 6.

33. Доказать, что если из любого трёхзначного числа $\overline{abc}$ ($a \geq c + 2$) вычесть число $\overline{cba}$ и к полученному числу прибавить число, составленное из его же цифр, но взятых в обратном порядке, то в сумме получится 1089.

Например. Если $\overline{abc} = 542$, то имеем: $542 - 245 = 297$; $297 + 792 = 1089$.

34. Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных чисел не может быть точным квадратом.

35. Доказать, что если m — натуральное число, то разность между суммой цифр m -ой степени целого числа и m -ой степенью суммы цифр того же числа делится на 9.

(Пример. Если $m=3$, то для числа 17 имеем: $17^3 = 4913$, $4 + 9 + 1 + 3 = 17$; $17 - 512 = -495$ — делится на 9).

36. Найти два числа, зная их наименьшее общее кратное 1620 и частное 0,75.

37. Найти дробь со знаменателем 241, зная, что её квадратный корень с точностью до 0,01 по недостатку равен 0,87.

38. Найти натуральные числа N , обладающие тем свойством, что сумма цифр чисел N^k равна N ($k=2, 3, 4$).

39. Доказать, что частное от деления $2^{p-1} - 1$ на p есть точный квадрат при p простым только в случаях $p=3; 7$.

40. Доказать, что сумма цифр всех чисел от 1 до 10^n имеет вид $9n + 1$.

41. При каком наименьшем n для k -го простого числа имеет место неравенство: $p_k^n > p_{k+1}$, если известно, что между p_k и $2p_k$ всегда имеется простое число?

42. Доказать, что если $ad - bc = \pm 1$, то при любом x числа $ax + b$ и $cx + d$ взаимно просты.

43. Найти сумму ряда:

$$a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \dots + \underbrace{\overline{aa\dots a}}_{n \text{ раз}}$$

44. Из таблицы

1	2	3	...	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	...	$2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	...	$3n$
$3n+1$	$3n+2$	$3n+3$	...	$4n$

$(n-1)n+1$ $(n-1)n+2$ $(n-1)n+3$... n^2
выбраны n чисел так, что никакие два из выбранных чисел не стоят в одной и той же строке или в одном и том столбце таблицы. Какова сумма выбранных чисел?

45. Расположенная внутри выпуклого n -угольника $A_1A_2\dots A_n$ точка O соединена со всеми вершинами. Стороны n -угольника произвольным образом нумеруются числами от 1 до n и независимо от этого n отрезков $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ нумеруются теми же числами, причём никакие две стороны или два отрезка не получают одинаковых номеров.

а) при $n=9$ указать такую нумерацию сторон и отрезков,

при которой сумма номеров сторон любого из треугольников $OA_{k-1}A_k$ будет одна и та же;

б) доказать, что при $n=10$ такую нумерацию осуществить нельзя.

46. В числовом треугольнике

					1							
					1	1	1					
				1	2	3	2	1				
			1	3	6	7	6	3	1			
		1	4	10	16	19	16	10	4	1		
	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1	
1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1

каждое число равно сумме трёх чисел, стоящих в предыдущей строке над ним, справа от него и слева от него. Каковы номера тех строк этого треугольника, в которых ни одно число не делится на 3? А на 5? А на 7?

47. Выписаны подряд все числа, кратные девяти:

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117,...

и для каждого из этих чисел находится сумма его цифр:

9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 18, 9, 9,...

Требуется указать закон, описывающий чередование чисел последней последовательности.

На каком месте этой последовательности впервые появится число 81 и каково будет следующее за ним число? Что раньше встретится в этой последовательности — 4 раза подряд число 27 или 3 раза подряд число 36?

48. Зная, что $2^n - 1 = av$, где n , a и v — целые числа, большие единицы, доказать, что $a+1$ и $v-1$ суть чётные, кратные одной и той же степени 2.

Аналогичный вопрос о числах $p-1$ и $q-1$ при условии

$$2^n + 1 = p \cdot q.$$

49. Доказать, что если $8n+1$ и $24n+1$ — полные квадраты, то $8n+3$ при $n>1$ — составное число.

50. Если p и $8p^2+1$ — простые, то доказать, что $8p^2-p+2$ также простое число.

51. Доказать, что если n — нечётное число, не кратное 3, то $N=16^n-4^n+1$ при $n>1$ не может быть простым.

52. Доказать, что квадрат всякого простого числа, больше 5, даёт при делении на 30 остаток 1 или остаток 19.

53. Доказать, что если $a^3 - 4a$, где a и a — целые отличные от нуля числа, является полным квадратом, то $a^3 - 3a$ не может быть полным кубом.

54. Доказать, что произведение наибольшего общего делителя двух чисел на их наименьшее общее кратное равно произведению данных чисел.

55. Определить два числа, зная их общее наименование кратное 360 и сумму квадратов 5409.

56. Найти два треугольных числа, сумма которых — треугольное число.

(Треугольными называются числа вида $N = \frac{n(n+1)}{2}$. Последовательность их такова: 1, 3, 6, 10, 15, ...; n -ое треугольное число есть сумма первых n натуральных чисел).

57. Показать, что при $1 < k < p$ и p — простом числа C_p^k кратны p .

58. Может ли точный корень 17-ой степени из двадцатитрёхзначного числа оканчивается на 5?

59. Один из математиков — горячий болельщик футбольной команды своего города. Однажды, после одного из удачных матчей восторженный математик пожелал пожать руки всем игрокам любимой им команды. Но тренер команды, сам любитель математики, поставил ему условие:

„Нас 12 человек. Мы стоим по кругу. Начните с меня и, пропуская одно и то же число футболистов, пожмите руки всем“. Математик, подумав немного, выполнил требование тренера и, в свою очередь, предложил футболистам следующую задачу:

Точки окружности $A_1, A_2, \dots, A_n$ соединены хордами, начиная с A_1 . Сколько проведено хорд, если точки соединены через каждые k ? В каком случае число хорд равно n ? Может ли число хорд быть больше n ? Найдите решения этих задач.

60. Задача из трактата арабского математика Табит ибн-Курра (836—901). Если числа $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ — простые, то показать, что числа $a = 2^n \cdot pq$ и $b = 2^n \cdot r$ будут дружественными. Применить к частному случаю $n = 2$.

Примечание. Два числа называются дружественными, если сумма всех делителей каждого из них равна сумме самих чисел. Например, 220 и 284; 17 296 и 18 416; 9 363 584 и 9 437 056. Эйлером было найдено 64 пары дружественных чисел. Среди них имеются и нечётные.

61. Задача французского математика Ш. Бувелля (конец XV и начало XVI века). Показать, что всякое совершенное число, кроме 6, имеет вид $s = 9k + 1$.