

О. Бюрклен

**Сборник задач по
аналитической геометрии**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
О-11

О-11 **О. Бюрклен**
Сборник задач по аналитической геометрии / О. Бюрклен – М.: Книга
по Требованию, 2021. – 136 с.

ISBN 978-5-458-34616-0

С 597 задачами и 22 чертежами. Авторизованный перевод с последнего
немецкого издания Инж. А. И. КОСМОДЕМЬЯНСКОГО.

ISBN 978-5-458-34616-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Отдел I.

Точки и отрезки прямых.

§ 1. Точки и отрезки на оси координат.

Основная прямая называется осью X -ов, нулевая точка, или начало координат, обозначается через O .

1. Найти на основной прямой с делениями точки, абсциссы которых $+5$, $+3\frac{1}{2}$, -3 , $-5\frac{2}{3}$, $-2\frac{1}{4}$, $\frac{ab}{c}$, $\frac{a^2+b^2}{c}$, $\sqrt{a_2-b_2}$ (a , b , c заданные отрезки).

2. Какие точки на оси X -ов соответствуют уравнениям:

- 1) $3x = 15$, 2) $7x = -28$, 3) $2x = a + b$,
4) $cx = a \cdot b$, 5) $\frac{x+a}{x-a} = \frac{5}{4}$, 6) $ax = a^2 - b^2$,
7) $a^2x = b^3$?

(a , b , c заданные отрезки; для 3), 4), 6), 7), дать построение).

3. Найти точки, соответствующие уравнениям

- 1) $x^2 - 7x + 12 = 0$, 2) $x^2 - x + 20 = 0$,
3) $x^2 + 4x = 0$, 4) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$,
5) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$, 6) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$,
7) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Отв.: 5) $a+b$, $a-b$; 6) -1 , 3 , $\frac{1}{3}$; 7) ± 2 , ± 3 .

4. Абсциссы точек P_1 и P_2 на оси X -ов равны:

$$x_1 = 3; -2; +3; -4; +a; 2a - b;$$

$$x_2 = 12; +7; -5; -6; -3a; a - 2b.$$

а) Каковы отрезки P_1P_2 по длине и знаку? б) Каким уравнением может быть представлена каждая из пар точек x_1 и x_2 ?

5. Какие уравнения соответствуют парам точек, а также трем точкам: 1) 2, 3; 2) 3, -5; 3) 0, -7; 4) 3, ∞ ; 5) 1, 2, 3; 6) 0, a , $-b$; 7) ∞ , 5, -2?

6. Отрезок P_1P_2 делится точкой Q в отношении $\lambda:1$ ($m:n$); требуется найти абсциссу a точки деления, если абсциссы точек P_1 и P_2 суть x_1 и x_2

Примеры:

$$a) x_1 = +3, \quad x_2 = +11, \quad \lambda:1 = 3:1;$$

$$b) -3, +7, 4:1; c) +1, +7, -3:1;$$

$$d) +1, -7, -1/2:1; e) +8, -4, 1/8:1;$$

$$f) -3, -18, 2:5.$$

7. Для гармонических точек P_1, P_2, Q_1, Q_2 (P_1 и P_2 — сопряженные точки) с абсциссами $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ задано: 1) $a_1 = 2, a_2 = 15, \alpha_1 = 8$; 2) $a_1 = -12, a_2 = +6, \alpha_1 = +3$; 3) $a_1 = +9, \alpha_1 = +1, \alpha_2 = -8$. Вычислить недостающие абсциссы.

Отв.: -76; 10,5; -1,88.

8. Исследовать, будут ли точки с абсциссами 3, 8, 11, 23 гармоническими или нет.

9. Доказать, что, если P_1, P_2, P_3, P_4 — гармонические точки (P_1 и P_2 — сопряженные точки) с абсциссами x_1, x_2, x_3, x_4 , то

$$P_1P_3^2 + P_2P_4^2 = (P_1P_2 + P_3P_4)^2.$$

10. Доказать, что, если P_1, P_2, Q_1, Q_2 — гармонические точки (P_1 и P_2 — сопряженные точки) и O есть середина $P_1 P_2$, то $OP_1^2 = OP_2^2 = OQ_1 \cdot OQ_2$.

11. Доказать, что для произвольных четырех точек P_1, P_2, P_3, P_4 на прямой справедливо соотношение:

$$P_1 P_3 \cdot P_2 P_4 = P_1 P_2 \cdot P_3 P_4 + P_1 P_4 \cdot P_2 P_3.$$

12. Точка P имеет абсциссу x , точка O' — абсциссу a . Как велика будет абсцисса x' точки P , если точку O' принять за новое начало координат?

Отв.: $x' = x - a$.

§ 2. Точки и отрезки прямых на плоскости; точки деления отрезка.

В тех задачах, в которых угол между осями координат не задан, следует исходить из прямоугольной системы координат.

13. Точка P имеет координаты $a \mid b$; как велико расстояние ее от O^1).

1) $a = 8, b = 6$; 2) $-5 \mid 12$; 3) $21 \mid 20$.

14. Точки P_1 и P_2 имеют координаты $a_1 \mid b_2$ и $a_1 \mid b_2$. Какова длина $P_1 P_2$?

1) $a_1 = 5, b_1 = 4, a_2 = 9, b_2 = 7$; 2) $a_1 = -2, b_1 = 7, a_2 = 5, b_2 = -17$; 3) $a_1 = 0, b_1 = 6, a_2 = 5, b_2 = 18$.

Отв.: 1) 5; 2) 25; 3) 13.

15. Задача предыдущая — но угол между осями равен 45° .

Отв.: 1) $\sqrt{25 + 12\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{625 - 168\sqrt{2}}$;
3) $\sqrt{169 + 60\sqrt{2}}$.

¹⁾ В числовых примерах следует вычерчивать фигуры: для прямоугольной системы координат выгодно пользоваться клетчатой, так называемой, миллиметровой бумагой.

16. Задача. — 14, но угол между осями равен 60° .

Отв.: 1) $\sqrt{37}$; 2) $\sqrt{793}$; 3) $\sqrt{229}$;

17. Правильный шестиугольник расположен так, что центр его совпадает с O , и две противоположные вершины лежат на оси X -ов. Каковы координаты вершин, если длина стороны равна a ?

18. Построить на клетчатой миллиметровой бумаге, принимая за единицу делений один или два сантиметра:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{26}$;
 $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{21}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{51}$,

a) взять соответствующие размеры циркулем;

b) определить с точностью до 1—2 десятичных знаков числовые значения корней.

19. Координаты конечных точек P_1 и P_2 отрезка прямой суть $x_1 | y_1$ и $x_2 | y_2$. Каковы координаты точки Q , делящей $P_1 P_2$ в отношении $m : n$?

1) $x_1 = 5$, $y_1 = 10$, $x_2 = 35$, $y_2 = 20$, $m : n = 1 : 2$.

2) $-3 | 8, 12 | -12$, $3 : 2$.

3) $7 | -8, 6 | 6$, $4 : 3$.

4) $11 | 2, 24 | -3$, $-2 : 3$.

5) $x_1 = 3p - q$, $y_1 = q - 2p$, $x_2 = p + 2q$, $y_2 = 5p - 3q$,
 $m : n = 4 : -3$.

Отв.: 4) $-15 | 12$; 5) $-5p + 11q | 26p - 15q$.

20. Даны координаты вершин треугольника $a | b, a_1 | b_1, a_2 | b_2$. Каковы длины сторон треугольника, координаты их середин и центра тяжести тр-ка?

1) $a = 2$, $b = -3$, $a_1 = 8$, $b_1 = 5$, $a_2 = 14$, $b_2 = 11$.

2) $-5 | 17, 11 | 3, 3 | 15$.

Отв.: 1) $10, \sqrt{340}, \sqrt{72}$, $5 | 1, 11 | 8, 8 | 4$; $8 | 4\frac{1}{3}$.

2) $\sqrt{452}, \sqrt{68}, \sqrt{208}$; $3 | 10, 7 | 9, -1 | 16$; $3 | 11\frac{2}{3}$.

21. Даны координаты $a_1 | b_1$ начальной точки отрезка $P_1 P_2$, и координаты $\alpha | \beta$ точки, делящей $P_1 P_2$ в отношении $m : n$. Требуется найти координаты $a_2 | b_2$ конечной точки отрезка.

$$1) a_1 = 0, b_1 = 0, \alpha = 5, \beta = 3, m : n = 1 : 2.$$

$$2) a_1 = 7, b_1 = 2, \alpha = 12, \beta = -1, m : n = 5 : 3.$$

$$\text{Отв.: } a_2 = \frac{\alpha(m+n) - n a_1}{m}, \quad b_2 = \frac{\beta(m+n) - n b_1}{m}.$$

22. В треугольнике заданы координаты $a | b$ и $a_1 | b_1$ двух вершин и координаты центра тяжести $\alpha | \beta$. Найти координаты $a_2 | b_2$ третьей вершины треугольника.

$$1) a = -7, b = -1, a_1 = -2, b_1 = -9, \alpha = 0, \beta = 0.$$

$$2) a = 2, b = 11, a_1 = 15, b_1 = 3, \alpha = 8, \beta = 2.$$

$$\text{Отв.: } a_2 = 3\alpha - (a + a_1), \quad b_2 = 3\beta - (b + b_1).$$

23. В четырехугольнике $P_1 P_2 P_3 P_4$ даны координаты вершин $a_1 | b_1, a_2 | b_2, a_3 | b_3, a_4 | b_4$. Стороны делятся пополам последовательно в точках Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , диагонали же в точках Q_5 и Q_6 . Определить координаты $\alpha_1 | \beta_1, \alpha_2 | \beta_2, \alpha_3 | \beta_3$ точек, делящих пополам $Q_1 Q_3, Q_2 Q_4, Q_5 Q_6$.

$$\text{Отв.: } \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}, \quad \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{4}.$$

Каков будет ответ, если четырехугольник с его диагоналями принять за проекцию тетраэдра?

24. В пятиугольнике $P_1 P_2 \dots P_5$ заданы координаты вершин $a_1 | b_1$ и т. д. Стороны делятся последовательно пополам в точках $Q_1, Q_2, \dots, Q_5$. Середина M линии $Q_1 Q_3$ соединяется с P_5 , и $P_5 M$ в точке S делится в отношении 4 : 1. Вычислить координаты точки S .

Что будет, если принять $Q_2 Q_4$ за $Q_1 Q_3$ и P_1 за P_5 ?

25. Стороны произвольного шестиугольника делятся последовательно пополам в точках $Q_1 Q_2 \dots Q_6$; определить центр тяжести $\Delta Q_1 Q_3 Q_5$, а также $\Delta Q_2 Q_4 Q_6$; что оказывается в результате?

26. Некоторый отрезок удлиняется по λ раз за пределы его конечных точек $a_1 | b_1$ и $a_2 | b_2$; каковы будут абсциссы конечных точек продолженного отрезка?

Отв.: $(1 + \lambda) a_1 - \lambda a_2$; $(1 + \lambda) a_2 - \lambda a_1$.

27. Координаты трех точек, лежащих на прямой линии, суть $a_1 | b_1$, $a_2 | b_2$, $a_3 | b_3$. Требуется вычислить координаты четвертой гармонической точки, если первая и третья — сопряженные точки.

Что получится, если $a_2 | b_2$ есть середина между $a_1 | b_1$ и $a_3 | b_3$?

Отв.:
$$\frac{2 a_1 a_3 - a_2 (a_1 + a_3)}{a_1 + a_3 - 2 a_2}.$$

28. Найти точку, которая одинаково удалена от Q и от точек $6 | 2$ и $3 | 7$.

Отв.: $2^5/18 | 31/6$.

Отдел II.

Прямая линия.

§ 3. Точка и прямая; несколько прямых⁶ линий.

29. Исследовать, лежат ли точки $3 | 5$, $-2 | 1$, $5 | 0$, $0 | -7$ на одной из прямых, заданных, уравнениями:

$$a) 6x + 7y = 53; \quad b) 2x - 3y = 10;$$

$$c) 4y - 9x = 22; \quad d) 7x - 5y = 35.$$

30. То же самое относительно

$$\text{точки } a | b \text{ на прямой } \left(a - \frac{p}{2}\right) y = b \left(x - \frac{p}{2}\right),$$

$$\text{точки } a \left| \frac{b}{2} \right. \text{ на прямой } bx - (2a - \alpha)y - b \frac{\alpha}{2} = 0,$$

$$\text{точки } \frac{2a + c}{2} \left| \frac{h}{2} \right. \text{ на прямой } y - \frac{h}{2} = \frac{2a - c}{h} \left(x - \frac{c}{2} - a\right),$$

$$\text{точки } -f | 0 \text{ и } 0 | -\frac{bf^2}{\beta^2} \text{ на прямой } \frac{x}{f} - \frac{\beta^2 y}{bf^2} = 1,$$

31. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $-2 | 7$ и отсекает на оси Y -ов отрезок длиной 19.

Отв.: $y = 6x + 19$.

32. Найти отрезки координатных осей, образованных прямыми из задач № 29 и № 30.

33. Начертить прямые, представленные нижеследующими уравнениями, если угол между осями а) 90° , б) 60° .

- 1) $x = 5$; 2) $y = +3$; 3) $y = -7$,
 4) $x - y = 0$; 5) $x - y = 2$; 6) $x - y = -2$;
 7) $x + y = 2$; 8) $y = 2x$; 9) $y = \frac{x}{2}$;
 10) $y = 2x + 3$; 11) $4x - 3y = -24$;
 12) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$; 13) $-\frac{x}{5} - \frac{y}{6} = 1$.

34. Найти уравнение прямой, соединяющей точки $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$.

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 3 \end{cases} \begin{vmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2a \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{p}{2} \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{a_1 + a_2}{2} \\ \frac{b_1 + b_2}{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} -5 & 2 & 8 \\ +5 & -3 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2a_2 - a_1 \\ 2b_2 - b_1 \end{vmatrix}$$

Отв.: $x - 2y = -1$, $x - y = -10$;
 $-3x + 5y = -21$; $3x - 8y = 0$;
 $b_1x + (2a - a_1)y = 2ab_1$;
 $\left(a - \frac{p}{2}\right)y - bx = \frac{bp}{2}$;

$$(a_1 - a_2)y - (b_1 - b_2)x = a_1b_2 - a_2b_1.$$

35. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $x_1 | y_1$, с углом направления (угол с осью X -ов) α

- 1) $x_1 = 8$, $y_1 = 3$, $\alpha = 60^\circ$; 2) $3 | 0$, 135° ;
 3) $0 | -2$, 70°

36. Вычислить координаты точки пересечения прямых L_1 и L_2 .

$$a) L_1: 6x + 11y = 67, \quad L_2: 2x - 5y = 31;$$

$$b) \quad 3x + 5y = 28, \quad 11x + 3y = -20;$$

$$c) \quad 8x - 3y = 5, \quad 9y - 24x = -15;$$

$$d) \quad ax - by = a^2 - b^2, \quad (a+b)x + (a-b)y = a^2 + 2ab - b^2;$$

$$e) \quad (a+b)x + (a-b)y = (a-b)x + (a+b)y = 2(a^2 - b^2), \quad (a-b)x + (a+b)y = 2(a^2 - b^2).$$

37. Исследовать, лежат ли на одной и той же прямой следующие три точки, и каково будет в положительном случае уравнение прямой?

$$a) 6 \mid 6, 3 \mid 5, -6 \mid 2;$$

$$b) 7 \mid 10, -4 \mid 7, 0 \mid 8;$$

$$c) a \mid -b, a+b \mid a-b, a+2b \mid 2a-b.$$

$$\text{Отв.: } a) x - 3y = -12; c) ax - by = a^2 + b^2.$$

38. Исследовать, проходят ли три прямые, удовлетворяющие одной из нижеприведенных групп уравнений, через одну и ту же точку, или нет? Каковы координаты общей точки?

$$a) 7x + 3y = 41, 3x - 4y = 7, -10x + y = -48;$$

$$b) 5x - 6y = -31, 7x - 3y = -24,5, 3x + 11y = 32,5;$$

$$c) 4x + 5y = 19, 2x + 9y = -29, 11x - 10y = -8;$$

$$d) 7x + 3y = 14a + 3b, 2x - 5y = 4a - 5b, \\ 3ax + 7by = 6a^2 + 7b^2.$$

$$\text{Отв.: } a) 5 \mid 2, b) -2 \mid 3\frac{1}{2}, d) 2a \mid b.$$

Ход решения: А) Определить по двум из данных уравнений общие значения x и y и исследовать, будет ли удовлетворяться ими третье уравнение?

Или В) воспользоваться одной из следующих теорем:

1) Если $L_1 = 0, L_2 = 0$ уравнения двух прямых, то уравнение $L_1 + \lambda L_2 = 0$, в котором λ

— произвольный числовой множитель, изображает прямую, проходящую через точку пересечения двух первых (принцип λ , или принцип линейной комбинации).

2) Если $L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0$ — уравнения трех прямых, то прямые эти проходят через одну общую точку, если λ_1 или λ_1 и λ_2 могут быть определены так, чтобы

$$L_1 + \lambda_1 L_2 \equiv L_3,$$

или чтобы

$$L_1 + \lambda_1 L_2 + \lambda_2 L_3 \equiv 0.$$

39. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $x_1 | y_1$ 1) параллельно, 2) перпендикулярно к L .

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a) $x_1=0$, $y_1=0$, | $L: mx + ny = c$; |
| b) $5 6$, | $7x + 4y = 12$; |
| c) $4 -3$, | $9x - 11y = 0$; |
| d) $a 2b$, | $(a+b)x + (a-b)y = c$; |
| e) $4 -2$, | $y = 3x - 8$; |
| f) $0 -8$, | $y = \frac{2}{5}x + 3$. |

Отв- 2): b) $4x - 7y = -22$; c) $11x + 9y = 17$;

d) $(a-b)x - (a+b)y = a^2 - 3ab - 2b^2$;

e) $x + 3y = -2$; f) $5x + 2y = -16$.

40. В параллелограмме $P_1 P_2 P_3 P_4$ даны координаты вершин P_1, P_2, P_3 ; найти координаты вершины P_4

Отв.: $x_4 = x_1 + x_3 - x_2$.

41. Определить на прямой $x - 3y + 6 = 0$ точку так, чтобы она находилась на расстоянии 5 от другой точки прямой, абсцисса которой 1.

Отв.: $x = 1 \pm \sqrt{22,5}$,

$y = \frac{7 \pm \sqrt{22,5}}{3}$. (Две точки.)

42. Даны две точки P_1 и P_2 . В середине M отрезка $P_1 P_2$ восставлен перпендикуляр; найти на последнем такую точку, которая отстоит от M на данном расстоянии d .

$$P_1 : 3 \mid -2, P_2 : 11 \mid 12, d = \frac{1}{7} \sqrt{260}.$$

$$\text{Отв.: Две точки: } 9 \mid \frac{27}{7}, 5 \mid \frac{43}{7}.$$

43. В первом и втором квадранте расположен квадрат таким образом, что одна вершина его лежит в O , а другая в точке $x_1 \mid y_1$.

Каковы координаты других вершин?

$$\text{Отв.: } x_1 - y_1 \mid x_1 + y_1, -y_1 \mid x_1$$

44. Найти для треугольника, заданного в № 22, уравнения и длины сторон, уравнения линий тяжести и средних перпендикуляров к серединам сторон, затем из уравнений или общим приемом вывести доказательство, что три высоты, три линии тяжести и три перпендикуляра к серединам сторон пересекаются в точках H, S, M ; показать затем, что эти три точки лежат на одной прямой и что $HS : SM = 1 : 2$.

$$\text{Отв.: Высоты: 1) } 19y + 11x = -96;$$

$$11y + 16x = -131; 8y - 5x = 35.$$

$$2) 8x + 11y = 137; 5x - 19y = 18; 13x - 8y = 155.$$

$$\text{Линии тяжести: 1) } x - 7y = 0; 9x - 2y = 0;$$

$$10x - 9y = 0. 2) 3x + 2y = 28; x - 7y = -6;$$

$$10x - y = 78.$$

$$\text{Перпендикуляры: 1) } 19y + 11x = 48;$$

$$11y + 16x = 65\frac{1}{2}; 8y - 5x = -17\frac{1}{2},$$

$$2) 13x - 8y = 54,5; 8x + 11y = 60,5; 5x - 19y = 6.$$

Примечание: Для общего доказательства относительно точек H, S, M можно принять сторону $P_1 P_2$ за ось X -ов и середину $P_1 P_2$ за начало координат.