

А.Н. Крылов

Лекции о приближенных вычислениях

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А11 **А.Н. Крылов**
Лекции о приближенных вычислениях / А.Н. Крылов – М.: Книга по Требованию, 2024. – 331 с.

ISBN 978-5-458-56736-7

ISBN 978-5-458-56736-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Заключающііся въ этой книгѣ курсъ лекцій о приближенныхъ вычисленіяхъ былъ прочитанъ мною въ 1906 году небольшому кружку лицъ, собиравшихся въ помѣщеніи гимназіи К. Мая и образовавшихъ вольный математическій факультетъ, руководимый проф. Н. М. Гюнтеромъ. Этотъ курсъ тогда-же былъ отлитографированъ въ ограниченномъ числѣ экземпляровъ, которые вскорѣ и разошлись.

Въ настоящее изданіе вошло все то, что заключалось въ литографированномъ и кромѣ того добавлено въ главѣ VI-ой объ интерполированіи и о механическихъ квадратурахъ и написана вновь глава VII о приближенномъ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій.

Содержаніе курса видно изъ оглавленія его, что-же касается изложенія, то оно предполагаетъ читателя знакомаго съ основаніемъ Высшей Алгебры и Дифференціального и Интегрального исчисленія и имѣющаго нѣкоторый навыкъ въ производствѣ численныхъ вычисленій.

Причина побудившая меня къ составленію этого курса слѣдующая: въ современныхъ руководствахъ Математическаго Анализа преимущественное вниманіе обращается на исполнѣ строгое установленіе основныхъ понятій и на строгое доказательство всѣхъ получаемыхъ изъ нихъ выводовъ. Въ виду этого зачастую весьма обстоятельно доказывается существованіе рѣшенія какого либо вопроса и устанавливается теоретическая возможность полученія его съ любой степенью точности, и гораздо меньшее вниманіе удѣляется практической части дѣла, т. е. дѣйствительному полученію рѣшенія съ даннымъ, обыкновенно грубымъ приближе-

ніемъ, которое только и требуется въ приложеніяхъ, но которое надо получить съ возможно меньшею затратою труда и времени. Составленный мною курсъ лекцій о приближенныхъ вычисленіяхъ и имѣеть цѣлью показать дѣйствительно примѣнимые практическіе приемы и способы вычисления корней численныхъ уравненій, вычисления опредѣленныхъ интеграловъ, пользованія тригонометрическими рядами и приближеннаго рѣшенія дифференціальныхъ уравненій. Главная забота при этомъ была о томъ, чтобы показать какъ и когда тѣмъ или инымъ приемомъ или способомъ пользоваться, а не о теоретической строгости обоснованія самого приема или способа.

Я не касался разложеній функций въ ряды расположенныя по степенямъ перемѣнной независимой и пользованія ими для вычисленій, ибо этотъ вопросъ обыкновенно весьма обстоятельно разсматривается въ обычныхъ руководствахъ. Анализа, отдѣль-же объ опредѣленіи истинныхъ значеній выраженій принимающихъ неопредѣленный видъ можетъ доставить множество упражненій, если вычислять значеніе этихъ выраженій для значеній перемѣнной независимой близкихъ къ тѣмъ, при которыхъ имѣетъ мѣсто неопредѣленность.

Въ заключеніе считаю своимъ долгомъ принести глубочайшую благодарность Совѣту Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I-го, удостоившаго этотъ курсъ напечатанія въ Сборникѣ Института.

А. Крыловъ.

Мартъ, 1911 г.



Глава I.

Введение. Общія правила приближенныхъ вычисленій.

§ 1. Математика прилагается теперь къ рѣшенію многихъ вопросовъ, встрѣчающихся не только въ такихъ прикладныхъ наукахъ, какъ Астрономія, Геодезія, Физика, но и въ разныхъ отрасляхъ Техники. При такихъ приложеніяхъ требуется часто не только установить зависимость между разными величинами, входящими въ вопросъ, т. е. не только составить надлежащую формулу, но и примѣнить эту формулу къ опредѣленнымъ частнымъ случаямъ, и найти численные величины искомымъ по даннымъ.

Въ Астрономіи и Геодезіи обыкновенно и начинаютъ изложеніе съ указанія тѣхъ приемовъ и способовъ, которыми надо пользоваться при выполненіи встрѣчающихся въ этихъ наукахъ численныхъ вычисленій. Мы не будемъ останавливаться на этихъ спеціальныхъ методахъ, но позаимствуемъ лишь общія ихъ основанія, одинаково приложимыя ко всякого рода вычисленіямъ, изъ которыхъ мы будемъ имѣть въ виду главнымъ образомъ тѣ, которыя встрѣчаются въ приложеніяхъ математики къ вопросамъ техническимъ.

§ 2. Необходимыя для численнаго опредѣленія какой бы то ни было искомой величины данныя доставляются обыкновенно наблюденіями или измѣреніями.

Всякому извѣстно, что никакое измѣреніе не можетъ быть произведено *абсолютно* точно; напротивъ результатъ всегда заключаетъ нѣкоторую погрѣшность, которая и обнаруживается при повтореніи измѣренія тѣмъ, что получается результатъ отличающійся отъ перваго. По этимъ отклоненіямъ результатовъ другъ отъ друга судятъ и о предѣлахъ погрѣшности въ нихъ.

Само собою понятно, что погрѣшности въ данныхъ переходятъ и въ опредѣляемыя по этимъ даннымъ искомыя, даже и въ томъ случаѣ, когда вычисленіе или расчетъ производятся по совершенно точнымъ формуламъ и съ полнѣйшею точностью.

Въ техническихъ вопросахъ искомыя опредѣляются обыкновенно для того, чтобы быть осуществленными или исполненными на дѣлѣ. Здѣсь

опять возникают неизбежныя погрѣшности исполненія или выдѣлки; для всякаго издѣлія существуютъ такъ называемые «допуски» т. е. предѣлы погрѣшностей, при которыхъ издѣліе признается годнымъ.

Отсюда ясно, что для прикладныхъ вопросовъ нѣтъ надобности производить вычисленія по абсолютно точнымъ формуламъ и съ совершенною точностью, напротивъ можно пользоваться завѣдомо неточными формулами или приемами, лишь бы была увѣренность, что происходящая отъ этого погрѣшность не превышаетъ тѣхъ предѣловъ, которые въ данномъ вопросѣ допускаются.

Къ такому пользованію неточными или приближенными формулами и приемами вычисленія побуждаетъ слѣдующее обстоятельство: въ приложеніяхъ обыкновенно интересуется не процессъ вычисленія, а результатъ его; поэтому и стараются получить этотъ результатъ съ достаточной точностью при наименьшей затратѣ труда и времени.

Этой технической точки зрѣнія мы и будемъ придерживаться въ этихъ лекціяхъ, предметомъ которыхъ будетъ служить изложеніе общихъ приемовъ и способовъ приближенныхъ вычисленій въ приложеніи: а) къ рѣшенію численныхъ уравненій, б) къ нахожденію численной величины определенныхъ интеграловъ простыхъ и кратныхъ, в) къ нахожденію суммъ рядовъ и г) къ интегрированію нѣкоторыхъ уравненій. При этомъ мы будемъ знакомить и съ тѣми механическими приспособленіями, которые имѣются для автоматическаго выполненія нѣкоторыхъ изъ вышеупомянутыхъ операций.

§ 3. Прежде всего необходимо остановиться на самомъ понятіи о *точности* какого-либо результата.

Разность между истиннымъ и приближеннымъ значеніемъ какой-либо величины, называется *абсолютною погрѣшностью* этого послѣдняго.

Указаніе одной только абсолютной погрѣшности обыкновенно недостаточно характеризуетъ достоинство результата. Такъ напр., если сказать, что погрѣшность нѣкоторой длины составляетъ $1^{мм}$, то еще нельзя сказать, хорошо или плохо произведено измѣреніе,—необходимо знать и самую величину. Такъ если-бы сказанная погрѣшность отпосилась къ базису длиною въ 10 километровъ, то можно сказать, что результатъ полученъ съ небывалою еще до сихъ поръ точностью, если-же измѣрялся напр. діаметръ проволоки или толщина металлическаго листа и вмѣсто 3-хъ миллиметровъ, намѣрили $2^{мм}$, то вѣроятно всякій скажетъ, что это измѣреніе никуда не годится.

Достоинство результата гораздо лучше характеризуется указаніемъ такъ называемой *относительной погрѣшности*, которая представляетъ собою отношеніе абсолютной погрѣшности къ самому значенію величины.

Ясно, что относительная погрѣшность выражается всегда *отвлеченнымъ* числомъ, такъ въ первомъ изъ нашихъ примѣровъ она составляетъ $\frac{1}{10.000.000}$ во второмъ $\frac{1}{2}$.

Чѣмъ меньше относительная погрѣшность, тѣмъ больше точность, съ которою величина извѣстна, поэтому относительная погрѣшность и принимается за мѣру точности результата.

Результатъ всякаго вычисленія и измѣренія выражается числомъ; условимся писать эти числа такъ, чтобы по самому ихъ начертанію можно было судить о степени точности; для этого стоитъ только принять за правило писать число такъ, чтобы въ немъ *всѣ* значащія цифры *кроме послѣдней* были вѣрны, и лишь послѣдняя цифра была бы сомнительна и при томъ не болѣе, какъ на одну единицу.

Наиболѣе точные результаты получаются при взвѣшиваніи; здѣсь для грузовъ около 1 килограмма достигается точность до $\frac{1}{100}$ миллиграмма, такъ что относительная погрѣшность составляетъ всего $\frac{1}{100.000.000}$, и слѣдовательно первыя восемь цифръ числа были бы вѣрны и, лишь девятая сомнительная, или какъ говорятъ результатъ вѣрный до девятого знака. Но за то такое взвѣшиваніе требуетъ такихъ предосторожностей, что продолжается напр. въ Bureau International des Poids et Mesures около 24 часовъ.

Самое точное измѣреніе длинъ не превышаетъ какъ до седьмого знака. Въ большей части техническихъ вопросовъ точность до $\frac{1}{1000}$ достаточна, значить и всѣ вычисленія могутъ быть производимы на четыре знака.

Обратимъ еще вниманіе на способъ написанія большихъ чиселъ. Пусть напр., въ числѣ 12732000 четвертая цифра уже сомнительна, тогда мы это число будемъ писать такъ $1,273.10^7$; если бы была сомнительна пятая цифра, то это число написали бы такъ $1,2732.10^7$.

Точно также чтобы показать, что въ величинѣ, выражающейсѣ цѣлымъ числомъ напр. 37 ошибка начинается лишь съ пятого знака, надо это число писать такъ 37,000.

§ 4. Разсмотримъ теперь, какъ отражается на точности результата производство разнаго рода ариѳметическихъ дѣйствій надъ приближенными числами.

а) Сложеніе. Пусть даны числа

$$N_1 \ N_2 \ . \ . \ . \ N_k$$

относительныя погрѣшности коихъ соотвѣтственно суть:

$$\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ . \ . \ . \ \varepsilon_k$$

легко видѣть, что относительная погрѣшность ε суммы этихъ чиселъ за-

ключается между наибольшею и наименьшею изъ относительныхъ погрѣшностей слагаемыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ:

$$\delta_1 \delta_2 \dots \delta_k$$

абсолютныя погрѣшности слагаемыхъ, видимъ что

$$\epsilon = \frac{\delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_k}{N_1 + N_2 \dots + N_k}.$$

Съ другой стороны имѣемъ равенства

$$\epsilon_1 = \frac{\delta_1}{N_1}; \epsilon_2 = \frac{\delta_2}{N_2}; \dots \epsilon_k = \frac{\delta_k}{N_k} \dots (*)$$

а такъ какъ всѣ дроби (*) разсматриваются лишь по ихъ численной величинѣ, то дробь

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 \dots + \delta_k}{N_1 + N_2 \dots + N_k}$$

представляющая отношеніе суммы числителей къ суммѣ знаменателей, заключается между наибольшею и наименьшею изъ дробей (*).

Поэтому въ томъ случаѣ, когда всѣ слагаемыя приблизительно одинаковой величины (отношеніе наибольшаго изъ нихъ къ наименьшему менѣе 10) надо всѣ ихъ писать съ однимъ и тѣмъ же числомъ знаковъ—столько же вѣрныхъ знаковъ будетъ и въ суммѣ.

Но часто приходится складывать числа хотя и извѣстныя съ одинаковою степенью точности, но сильно разнящіяся по величинѣ, тогда безъ ущерба точности окончательнаго результата можно упростить дѣйствіе.

Пусть на примѣръ надо сложить числа:

$$52,374; 2,8235; 0,52181 \text{ и } 0,014253,$$

которыя всѣ четыре пятизначныя, тогда не слѣдуетъ дѣлать сложенія такъ:

$$\begin{array}{r} 52,374 \\ 2,8232 \\ 0,52181 \\ 0,014253 \\ \hline 55,733263 \end{array}$$

ибо очевидно что послѣднія три цифры въ суммѣ не могутъ быть вѣрны;

не зачѣмъ было и выписывать какъ ихъ, такъ и тѣ цифры, изъ которыхъ они получились, а слѣдуетъ поступать такъ:

$$\begin{array}{r} 52,374 \\ 2,823 \\ 0,522 \\ 0,014 \\ \hline 55,733 \end{array}$$

т. е. написавъ наибольшее изъ слагаемыхъ удерживать въ остальныхъ лишь столько цифръ послѣ запятой, сколько ихъ у наибольшаго изъ слагаемыхъ (въ нашемъ примѣрѣ—три), отбрасывая остальные цифры, послѣднюю изъ удержанныхъ усиливать на 1, когда первая отброшенная цифра 5 или болѣе.

Въ связи съ сложеніемъ приближенныхъ чиселъ находится такой вопросъ: погрѣшность обыкновенно можетъ быть какъ положительною, такъ и отрицательною, слѣдовательно при сложеніи можетъ происходить взаимная компенсація погрѣшностей, въ особенности когда число слагаемыхъ велико. Этотъ вопросъ разсмотрѣнъ и рѣшенъ въ теоріи вѣроятностей, и мы еще вернемся къ нему въ главѣ, о разложеніи функций въ тригонометрическіе ряды.

Умноженіе. Покажемъ, что при умноженіи относительная погрѣшность произведенія равна суммѣ относительныхъ погрѣшностей множителей. Въ самомъ дѣлѣ пусть множители суть N_1 и N_2 и ихъ относительныя погрѣшности ϵ_1 и ϵ_2 , слѣдовательно истинныя величины этихъ множителей суть

$$N_1' = N_1 (1 + \epsilon_1) \quad \text{и} \quad N_2' = N_2 (1 + \epsilon_2).$$

Значитъ истинная величина произведенія будетъ:

$$\begin{aligned} N_2' N_1' &= N_1 N_2 (1 + \epsilon_1) (1 + \epsilon_2) \\ &= N_1 N_2 [1 + (\epsilon_1 + \epsilon_2) + \epsilon_1 \epsilon_2] \end{aligned}$$

обыкновенно дроби ϵ_1 и ϵ_2 весьма малыя напр. $\frac{1}{1000}$, тогда дробь $\epsilon_1 \epsilon_2$ будетъ весьма мала по сравненію съ суммою $\epsilon_1 + \epsilon_2$ и ея можно пренебречь, а тогда имѣемъ:

$$N_2' N_1' = N_1 N_2 [1 + (\epsilon_1 + \epsilon_2)] = N_1 N_2 + N_1 N_2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

что и подтверждаетъ высказанное свойство для случая двухъ множителей.

Очевидно, что оно тотчас же распространяется и на любое ихъ число.

Дѣленіе. Такъ какъ дѣленіе на число N равносильно умноженію на число $\frac{1}{N}$, то при дѣленіи относительная погрѣшность частнаго равна суммѣ относительныхъ погрѣшностей дѣлимаго и дѣлителя. Здѣсь надо замѣтить, что этой величины она достигнетъ, когда абсолютныя погрѣшности дѣлимаго и дѣлителя разныхъ знаковъ.

Возвышеніе въ степень. Изъ сказаннаго объ умноженіи непосредственно слѣдуетъ, что относительная погрѣшность квадрата числа равна удвоенной относительной погрѣшности этого числа, куба-утроенной и т. д. Это свойство справедливо и для дробныхъ степеней, въ самомъ дѣлѣ пусть N_1 есть приближенная величина возвышаемаго количества и ϵ_1 относительная погрѣшность его.

Тогда истинная величина есть $N = N_1 (1 + \epsilon_1)$ откуда возвышая въ степень p имѣемъ.

$$N^p = N_1^p (1 + \epsilon_1)^p = N_1^p \left(1 + p\epsilon_1 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \cdot \epsilon_1^2 + \dots \right)$$

обыкновенно дробь ϵ_1 настолько мала, что всѣми членами, содержащими эту дробь въ степени выше первой можно пренебречь и тогда будетъ

$$N^p = N_1^p (1 + p\epsilon) = N_1^p + p\epsilon_1 N_1^p$$

откуда слѣдуетъ, что относительная погрѣшность величины N_1^p есть $p\epsilon_1$, что и подтверждаетъ высказанное свойство.

При многихъ вычисленіяхъ приходится пользоваться квадратами и кубами чиселъ. Для квадратовъ и кубовъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до 10000 составлены таблицы, гдѣ квадраты и кубы и показаны вполне точно.

При пользованіи этими таблицами надо избѣгать выписыванія лиш-нихъ знаковъ. Такъ напр. пусть дано число

$$N_1 = 11,66.$$

Значитъ за послѣднюю цифру нельзя ручаться и истинное значеніе числа могло бы быть напр. и 11,67, но

$$11,66^2 = 135,9556 \text{ и } 11,66^3 = 1585,242296$$

и

$$11,67^2 = 136,1889 \text{ и } 11,67^3 = 1589,324463.$$

Отсюда ясно насколько бесполезно было бы выписывать всѣ циффы, слѣдующія за четвертой или даже за третьей, ибо всѣ эти циффы для нашего приближеннаго числа невѣрны, и выписываніе ихъ составляетъ лишь напрасную трату труда и времени.

§ 5. При вычисленіяхъ съ приближенными числами особенно невыгоднымъ дѣйствіемъ является *вычитаніе*, въ томъ случаѣ, когда разность мала по отношенію къ уменьшаемому и вычитаемому. Въ самомъ дѣлѣ пусть даны числа 52,287 и 51,939, какъ видно въ каждомъ изъ нихъ мы можемъ ручаться за первыя четыре цифры, а такъ какъ въ послѣдней погрѣшность не болѣе 1, то относительная погрѣшность нашихъ данныхъ не болѣе $\frac{1}{50000}$. Между тѣмъ въ разности этихъ чиселъ 0,348 послѣдняя цифра можетъ быть невѣрна на 2 единицы и относительная погрѣшность можетъ составить $\frac{2}{348}$ или $\frac{1}{174}$ т. е. въ 30 разъ большую величину, нежели въ данныхъ.

Поэтому при вычисленіяхъ *надо стараться такъ преобразовывать формулы, чтобы малыя разности двухъ величинъ вычислялись непосредственно не вычисляя самихъ величинъ*. Если же этого сдѣлать нельзя, то необходимо имѣть въ виду, что относительная погрѣшность разности во столько же разъ больше относительной погрѣшности въ слагаемыхъ, во сколько разъ сама разность меньше каждаго изъ нихъ.

Отсюда понятна и выгода доставляемая вычисленіемъ ряда значеній какой либо величины, мало разнящихся между собою производя это вычисленіе такъ: — вычисливъ лишь одно изъ этихъ значеній непосредственно, для полученія остальныхъ вычислять тѣ поправки, которыя надо къ сказанному значенію присовокупить, чтобы получить всѣ прочія. Поправки эти можно вычислять съ тѣмъ меньшею относительною точностью, чѣмъ онѣ меньше по сравненію съ самою величиною.

Большая часть вычисленій въ Астрономіи и производится подобно вышесказанному — всегда стараются вычислять поправки и отклоненія.

§ 6. **Логарифмы.** При большей части вычисленій вспомогательнымъ средствомъ служатъ логарифмы, поэтому необходимо рассмотреть, какая при вычисленіи по логарифмамъ съ разнымъ числомъ знаковъ происходитъ относительная погрѣшность.

Наиболѣе употребительныя таблицы логарифмовъ т. е. 4-хъ, 5-ти и 7-ми значныя располагаются всегда такъ, чтобы для пріисканія логарифмовъ чиселъ въ таблицѣ непосредственно не указанныхъ, можно было пользоваться лишь первыми разностями, или пропорціональными частями. Это достигается тѣмъ, что разность между двумя смежными аргументами достаточно мала по сравненію съ ними. Въ самомъ дѣлѣ, пусть N и $N + h$ два послѣдовательныхъ аргумента, тогда разность ихъ логарифмовъ (обыкновенныхъ) будетъ:

$$\Delta = \log (N + h) - \log N = \log \frac{N + h}{N} = \log \left(1 + \frac{h}{N} \right)$$

но по известной формулѣ

$$\log \left(1 + \frac{h}{N} \right) = M \left[\frac{h}{N} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{N} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{N} \right)^3 - \dots \right] \quad (*)$$

причемъ M есть модуль обыкновенныхъ логариемовъ, равный 0,43429...

Чтобы при приисканіи логариемовъ пользоваться лишь пропорціональными частями, надо, чтобы въ формулѣ (*) члены

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h}{N} \right)^2, \quad \frac{1}{3} \left(\frac{h}{N} \right)^3$$

и т. д. были настолько малы по сравненію съ первымъ, чтобы не вліять на послѣдній знакъ показаннаго въ таблицѣ логариема; такъ какъ для четырехзначныхъ таблицъ если взять (какъ и сдѣлано)

$$\frac{h}{N} < \frac{1}{100},$$

то будетъ

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h}{N} \right)^2 < \frac{1}{20000}$$

т. е. меньше 5 единицъ пятого знака, поэтому въ четырех-значныхъ таблицахъ аргументы идутъ отъ 100 до 1000 черезъ 1.

Точно также въ пяти-значныхъ таблицахъ берутъ

$$\frac{h}{N} < \frac{1}{1000},$$

тогда

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h}{N} \right)^2 < \frac{1}{2.000.000}.$$

Наконецъ въ семи-значныхъ таблицахъ аргументами служатъ цѣлыя числа отъ 10000 до 100000 и слѣдовательно

$$\frac{h}{N} < \frac{1}{10000} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{h}{N} \right)^2 < \frac{1}{200.000.000}$$

т. е. меньше 0,000000005, что не оказываетъ вліянія на седьмой знакъ.

Такимъ образомъ для всякой таблицы логариемовъ табличная разность Δ т. е. разность между двумя послѣдовательными, соответствующими числамъ N и $N + 1$, логариемами съ достаточною точностью выражается формулой

$$\Delta = M \cdot \frac{1}{N} = 0,434 \cdot \frac{1}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Отсюда ясно, что когда данное число N_1 , для котораго надо найти логариемъ заключается между N и $N + 1$, такъ что

$$N < N_1 < N + 1$$