**Л. Эдмунд**

# Основы анализа

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Л11

**Л. Эдмунд**
Л11 Основы анализа / Л. Эдмунд – М.: Книга по Требованию, 2021. – 182 с.

**ISBN 978-5-458-27328-2**

Задачи книги ясно изложены автором; она может быть интересна преподавателям и изучающим высшую математику, желающим глубже познакомится с её логическими основами.

**ISBN 978-5-458-27328-2**

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

## *Предисловие для учащегося*

1. Прошу не читать помещенного дальше предисловия для знатока!

2. Я предполагаю лишь владение логическим мышлением и языком; ничего — из школьной или, тем более, высшей математики.

Чтобы предупредить возражения: *одно* число, *ни одного* числа, *два* случая, *все* вещи из заданной совокупности и т. п., все это — ясные языковые словообразования. Теорема 1, теорема 2, ..., теорема 301 (и аналогично для аксиом, определений, глав, параграфов) или 1), 2) и т. п. при разбиениях на случаи — просто знаки, отличающие друг от друга теоремы, аксиомы, ..., случаи и более удобные при ссылках, чем если бы я, скажем, говорил светлосиняя теорема, темносиняя теорема и т. п. Введение так называемых положительных целых чисел только до „301" вообще не представило бы никакого труда; первая — преодолеваемая в главе 1 — трудность лежит в совокупности положительных целых чисел

$$1, \ldots$$

с таинственным многоточием за запятой (называемых в главе 1 натуральными числами), в определении действий, которые можно над ними производить, и в доказательствах относящихся сюда теорем.

Я последовательно излагаю все необходимое в главе 1 — для натуральных чисел, в главе 2 — для положительных дробей и положительных рациональных чисел, в главе 3 —

для положительных (рациональных и иррациональных) чисел, в главе 4 — для вещественных чисел (положительных, отрицательных и нуля), в главе 5 — для комплексных чисел; таким образом я говорю лишь о таких числах, с которыми ты встречался еще в школе.

В этом смысле:

**3.** Прошу — забудь все, чему ты учился в школе; потому что ты этому не научился.

Прошу, однако, всюду вызывать в своем представлении соответствующие разделы школьного курса; потому что тебе все же не следует его забывать.

**4.** Никакой таблицы умножения, даже теоремы

$$2 \cdot 2 = 4,$$

я не даю; однако, я рекомендую тебе, в качестве упражнения к главе 1, § 4, определить

$$2 = 1 + 1,$$
$$4 = ((1 + 1) + 1) + 1$$

и доказать указанную теорему.

Эдмунд Ландау

*Берлин, 28 декабря 1929 г.*

## *Предисловие для знатока*

Эта книжечка является уступкой коллегам (к сожалению, составляющим большинство), не разделяющим мою точку зрения на следующие вопросы.

В то время как в школе, разумеется, приходится отказаться от строгого построения элементарной математики без всяких пробелов, математическое преподавание в высшей школе должно знакомить слушателя не только с материалом и результатами, но и с методами доказательств. Даже тот, кто изучает математику главным образом ради ее приложений к физике или другим наукам и кто поэтому часто вынужден самостоятельно разбираться в новом математическом материале, может лишь тогда уверенно сойти с протоптанной тропы, когда он научился ходить, т. е. различать неверное от верного, предположения от доказательств (или, как некоторые изящно говорят, — нестрогие доказательства от строгих).

Поэтому я — в согласии с некоторыми моими учителями и коллегами, с некоторыми авторами, из трудов которых я черпал, и с большинством моих учеников — считал правильным, чтобы студент уже в первом семестре узнавал, на каких основных фактах как на аксиомах можно без пробелов построить анализ и как это построение можно начать. При выборе аксиом, как известно, можно поступать различным образом. Поэтому я считаю отнюдь не неправильным, но лишь почти диаметрально противоположным моей личной точке зрения, когда для вещественных чисел в качестве аксиом постулируют многочисленные обычные законы действий и основную теорему Дедекинда (теорему 205 этой книжки). Разумеется, я не доказываю непротиворечивости пяти аксиом Пеано (по той причине, что этого сделать нельзя); однако, каждая из них явно независима от предыдущих. С другой стороны, при указанном расширенном числе аксиом учащемуся сразу навязывается вопрос, нельзя ли какие-нибудь из них доказать (а хитрец добавил бы: или опровергнуть) с помощью предшествующих; и так как доказуемость всех этих вещей известна уже многие десятилетия, то почему же не дать учащемуся уже в самом начале ознакомиться с этими (всюду совершенно простыми) доказательствами.

Я уже не буду подробно останавливаться на том, что часто в основу не кладется даже основная теорема Дедекинда (или равносильный ее суррогат при обосновании вещественных чисел с помощью фундаментальных последовательностей), так что такие вещи, как теорема о среднем значении из дифференциального исчисления, основывающаяся на ней теорема, что функция, производная которой на некотором интервале равна нулю, постоянна в этом интервале, или, например, теорема, что постоянно убывающая ограниченная последовательность чисел стремится к некоторому пределу, — остаются без всякого доказательства или же, что еще хуже, снабжаются мнимыми доказательствами, ничего на самом деле не доказывающими. Число представителей этой крайней разновидности другой точки зрения кажется мне не только монотонно убывающим, но и предел, к которому по упомянутой выше теореме стремится это число, повидимому, равен нулю.

Однако, с обоснования натуральных чисел начинают лишь в редких случаях. Признаюсь, что и я издавна придерживался построения теории вещественных чисел по Дедекинду, но раньше свойства целых и рациональных чисел предполагал известными. Во всяком случае, три последних раза я предпочел начинать с целых чисел. Из них, правда, один раз, — и делаю это также в наступающем летнем семестре, — в качестве уступки слушателям, желающим только дифференцировать, а выяснением понятия числа заняться не в первом семестре (если же возможно, — то и вообще никогда), я разбил мои лекции на две параллельно читаемые части, одну из которых назвал „основами анализа“. В этой части, отправляясь от пеановских аксиом для натуральных чисел, я дохожу до теории вещественных и комплексных чисел; правда, в первом семестре комплексные числа слушателям еще не нужны; однако, введение их после всего предшествующего столь просто, что никого не затруднит.

Но во всей математической литературе нет никакого учебника, который имел бы своей целью обосновать в указанном выше смысле *только* действия над числами. И даже в объемистых руководствах, где этому посвящены вводные главы, слишком многое оставляется (сознательно или бессознательно) на долю читателя.

Эта книжка дает возможность каждому коллеге, придерживающемуся другого педагогического направления и, значит, не входящему в изложение основ, по крайней мере сослаться (если он сочтет ее пригодной для этой цели) на источник, где все недостающее и только недостающее изложено в связном виде и без пробелов. Чтение ее не представит труда для того, кто — как это предполагается — знаком с излагаемыми результатами по школьному курсу и преодолел уже первые абстрактные четыре или пять страниц.

Я выпускаю эту книжку в свет с некоторым колебанием, так как тем самым выступаю в такой области, где (за исключением одного устного сообщения д-ра Кальмàра (Kalmàr)) ничего нового сообщить не имею; но ведь никто другой этого моего, частью скучного, труда не проделал.

Однако окончательный толчок этому „бегству в гласность“ дал следующий случай.

Представители другого направления всегда думают, что в процессе дальнейшей учебы учащийся сможет познакомиться с интересующим нас здесь предметом по запискам лекций или литературе. И ни один из этих моих уважаемых друзей и врагов не усомнился бы в том, что, например, в моих лекциях найдется все необходимое. Я также верил в это. И вот приключилось со мной следующее ужасное происшествие. Мой тогдашний ассистент и любезный коллега приват-доцент д-р Грандйо (Grandjot) (ныне профессор университета в Сант-Яго) читал по моим запискам основы анализа и отдал мне мою рукопись с замечанием, что он счел необходимым присоединить к аксиомам Пеано в дальнейшем еще другие, поскольку на обычном пути, которому я следовал, обнаружился некоторый пробел. Прежде чем входить в подробности, укажу, предвосхищая дальнейшее, что:

1. Возражение, которое сделал Грандйо, было обоснованным.

2. Аксиомы, которые нельзя перечислить в самом начале (поскольку они опираются на последующие понятия), весьма нежелательны.

3. Все аксиомы Грандйо (как можно было бы узнать, уже изучая Дедекинда) доказуемы, так что достаточно (см. все дальнейшее изложение) одних аксиом Пеано.

Возражение захватывает три пункта:

I. Определение $x+y$ для натуральных чисел.

II. Определение $x \cdot y$ для натуральных чисел.

III. Определение $\sum\limits_{n=1}^{m} x_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{m} x_n$, когда в какой-нибудь числовой области уже имеются $x+y$ и $x \cdot y$.

Так как для всех трех случаев дело обстоит аналогично, то я буду говорить здесь только об $x+y$ для натуральных чисел $x, y$. Когда я, скажем, в лекции по теории чисел доказываю какую-нибудь теорему о натуральных числах, устанавливая ее справедливость сначала для 1, а затем выводя из ее справедливости для $x$ справедливость для $x+1$, то обычно какой-нибудь слушатель выдвигает возражение, что я ведь совсем не доказал предварительно утверждение для $x$. Это возражение не обосновано, но извинительно; студент никогда не слыхал об аксиоме индукции. Возражение Грандйо звучало похоже, с тем, однако, различием, что оно было обосновано, так что я и его должен был извинить. Основываясь на своих пяти аксиомах, Пеано определяет $x+y$ при фиксированных $x$ и $y$ следующим образом:

$$x+1=x',$$
$$x+y'=(x+y)';$$

как он, так и его последователи думали, что этим дано общее определение $x+y$, поскольку множество тех $y$, для которых $x+y$ определено, содержит 1 и вместе с $y$ также $y'$.

Но ведь $x+y$, стоящее во втором равенстве в скобках, не было еще определено.

Дело обстояло бы благополучно, если бы мы (чего на пеановском пути нет, поскольку порядок вводится лишь после сложения) имели понятие „числа $\leqslant y$“ и говорили о множестве тех $y$, для которых существует $f(z)$, определенное для $z \leqslant y$ и обладающее свойствами

$$f(1) = x',$$
$$f(z') = (f(z))' \text{ при } z < y.$$

Таково обоснование, предложенное Дедекиндом. При дружеской помощи моего коллеги фон Неймана (von Neumann) из Принстона я, введя предварительно порядок (что представило бы для читателя неудобство), разработал для этой книжки такой путь. Однако, в последний момент я узнал от д-ра Кальмара из Сегеда значительно более простое доказательство; теперь дело выглядит столь просто и доказательство столь сходно с остальными доказательствами из первой главы, что даже знаток не заметил бы этого пункта, если бы я так подробно не запротоколировал своего признания в вине и искуплении. С $x \cdot y$ дело обстоит совершенно так же; определение $\sum\limits_{n=1}^{m} x_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{m} x_n$, правда, возможно только на дедекиндовском пути; однако, начиная с § 3 главы 1, мы уже имеем множество чисел $z \leqslant y$.

Чтобы по возможности облегчить труд читателю, я некоторые (не очень объемистые) множества слов повторял в нескольких или всех главах. Разумеется,

## *Предисловие для знатока*

Эта книжечка является уступкой коллегам (к сожалению, составляющим большинство), не разделяющим мою точку зрения на следующие вопросы.

В то время как в школе, разумеется, приходится отказаться от строгого построения элементарной математики без всяких пробелов, математическое преподавание в высшей школе должно знакомить слушателя не только с материалом и результатами, но и с методами доказательств. Даже тот, кто изучает математику главным образом ради ее приложений к физике или другим наукам и кто поэтому часто вынужден самостоятельно разбираться в новом математическом материале, может лишь тогда уверенно сойти с протоптанной тропы, когда он научился ходить, т. е. различать неверное от верного, предположения от доказательств (или, как некоторые изящно говорят, — нестрогие доказательства от строгих).

Поэтому я — в согласии с некоторыми моими учителями и коллегами, с некоторыми авторами, из трудов которых я черпал, и с большинством моих учеников — считал правильным, чтобы студент уже в первом семестре узнавал, на каких основных фактах как на аксиомах можно без пробелов построить анализ и как это построение можно начать. При выборе аксиом, как известно, можно поступать различным образом. Поэтому я считаю отнюдь

Если же тому или иному коллеге другого направления весь этот материал покажется даже настолько простым, что он включит его в свои лекции для начинающих (придерживаясь предлагаемого мною или какого-либо иного пути изложения), то этим я достигну всего, на что только мог осмелиться.

ЭДМУНД ЛАНДАУ

*Берлин, 28 сентября 1929 г.*