В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин

Лекции и задачи по элементарной математике

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
В11

В. Г. Болтянский
В11 Лекции и задачи по элементарной математике / В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин – М.: Книга по Требованию, 2013. – 590 с.

ISBN 978-5-458-25545-5

Книга содержит теоретический материал и задачи по курсу элементарной математики. Теоретический материал включает изложение наиболее трудных вопросов школьного курса алгебры и элементарных функций. Особое внимание обращено на те разделы курса, которые недостаточно полно освещены в учебной литературе. Значительная часть задач, содержащихся в книге, предлагалась на вступительных экзаменах в МФТИ. Многие задачи специально составлены авторами для этой книги. Книга предназначена для учителей математики, студентов педагогических вузов, университетов и особенно для старшеклассников, готовящихся в вузы

ISBN 978-5-458-25545-5

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга предназначена для учащихся старших классов средней школы, для поступающих в вузы, для учителей и студентов пединститутов и университетов. Она содержит теоретический материал по некоторым разделам элементарной математики и задачи. Теоретический материал не охватывает всего школьного курса математики. Мы ограничились изложением некоторых разделов, которые недостаточно полно изложены в учебной литературе.

Некоторые разделы книги содержат теоретический материал, формально выходящий за рамки школьной программы по математике. Так, в гл. I рассказывается о простейших понятиях математической логики, в гл. II несколько полнее, чем это принято в школьных учебниках, излагается теория действительного числа, а в гл. VII, VIII глубже изучаются некоторые вопросы теории элементарных функций. Однако в действительности эти вопросы *изучаются* в школе (хотя, может быть, не так глубоко), и на приемных экзаменах в вузах требуется их ясное понимание. Например, учащиеся обязаны знать, что такое условие и заключение теоремы, в чем сущность метода доказательства от противного, должны уметь правильно формулировать обратные и противоположные теоремы, уметь делать правильные логические выводы. Поэтому гл. I, в которой эти вопросы подробно рассматриваются, фактически полностью соответствует школьной программе. Во всяком случае, поступающие в вузы с повышенными математическими требованиями и претендующие на оценку «отлично», должны хорошо разбираться в этом. То же можно сказать и по поводу остальных глав книги. Вместе с тем теоретический материал книги изложен достаточно подробно, с большим количеством примеров и потому будет доступен любому успевающему по математике старшекласснику.

Книга содержит свыше тысячи задач, значительная часть которых предлагалась на приемных экзаменах в МФТИ; другая же часть задач составлена авторами при написании книги. В конце книги приведены ответы к задачам, а также указания или решения для наиболее трудных из них.

Авторы

ГЛАВА I
НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

§ 1. Высказывания

В математике мы имеем дело с различными *высказываниями*. Вот некоторые примеры:

$A \equiv$ {число 100 делится на 4},

$B \equiv$ {число 17 делится на 8},

$C \equiv$ {три меньше пяти},

$D \equiv$ {число 2 является единственным корнем уравнения $x^2 - 4 = 0$}.

Сразу же видно, что в некоторых из этих высказываний утверждается нечто правильное; такие высказывания называются *истинными*. В других же из приведенных выше высказываний утверждается нечто неверное; такие высказывания называются *ложными*. В приводимой ниже таблице поставлена буква *И* под обозначением истинных высказываний и буква *Л* под обозначением ложных высказываний:

Высказывание	A	B	C	D
Его истинность	*И*	*Л*	*И*	*Л*

Указанные выше высказывания мы обозначали большими латинскими буквами. Так мы будем обозначать высказывания и в дальнейшем.

Всякое высказывание является предложением и может быть выражено словами. Однако при записи высказываний математики пользуются не только буквами, но и специальными математическими знаками. Каждый знак заменяет собой слово (или даже несколько слов). Используются знаки для сокращения записи. Например, высказывание C можно с помощью знаков записать следующим образом: $3 < 5$.

Мы уже говорили, что всякое высказывание является предложением. Однако далеко не каждое предложение является высказыванием в математическом смысле. Вот несколько предложений, которые высказываниями не являются:

1) число 0,00000001 очень мало,

2) существует ли число, квадрат которого равен 2?

3) $x > 2$,

4) $x + 5 = 12$.

Первое из этих предложений не является высказыванием потому, что оно не имеет точного смысла и мы не можем сказать, истинно оно или ложно. Один скажет, что число это в самом деле очень мало, другой же с этим не согласится. Второе предложение вообще ничего не утверждает, а содержит вопрос. Бессмысленно говорить, истинно оно или ложно.

Наконец, третье и четвертое предложения содержат букву x. При одних значениях x получается истинное высказывание, при других ложное. Значит, в таком виде (пока не сказано, чему равен x) мы не можем сказать, истину или ложь выражают эти предложения.

Заметим, что не о всяком высказывании можно сразу же, только услышав его, ответить, истинно оно или ложно. Речь идет о **принципиальной** возможности решить вопрос, истинно или ложно данное высказывание, хотя для ответа на этот вопрос, может быть, надо сделать столько действий, что и жизни человеческой не хватит. Вот два примера высказываний, вопрос об истинности которых принципиально может быть решен, но требует огромного количества вычислений:

$$E \equiv \{\text{число } (126^{3728} + 15^{15\,876})^{2387} + (111^{35\,933} - 189^{1183})^{4914} + 4 \text{ является простым}\},$$

$$G \equiv \{\text{в записи числа } \sqrt{2} \text{ в виде бесконечной десятичной дроби } \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots \text{ на } 1\,000\,000\text{-м месте после запятой стоит цифра } 7\}.$$

Предложения E и G мы также считаем высказываниями, поскольку принципиально возможно ответить на вопрос, истинны они или ложны.

Всякое высказывание является либо истинным, либо ложным (**закон исключенного третьего**).

Никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным (**закон противоречия**).

Предложение, о котором невозможно однозначно решить вопрос, истинно оно или ложно, высказыванием не является.

§ 2. Отрицание

Из всякого высказывания A можно получить новое высказывание, *отрицая* его, т. е. утверждая, что высказывание A не имеет места, не выполняется. *Отрицание высказывания* A обозначается символом $\neg A$ (или символом $\bar{A}$). Запись $\neg A$ читается как «отрицание высказывания A» или, короче, «не A».

Отрицание высказывания можно получить, сказав: «утверждение A места не имеет» или «A не выполняется». Однако в ряде случаев отрицание можно получить еще проще. Если, например, высказывание A выражается простым предложением с одним сказуемым, то для получения его отрицания $\neg A$ нужно лишь добавить к сказуемому частицу «не». Приведем примеры высказываний и их отрицаний:

1) $A \equiv \{$число 23 делится на 7$\}$,
$\neg A \equiv \{$число 23 не делится на 7$\}$;

2) $B \equiv \{3 > 5\}$ (т. е. три больше пяти),
$\neg B \equiv \{$три не больше пяти$\}$ (т. е. $3 \leqslant 5$);

3) $C \equiv \{5 + 3 = 8\}$,
$\neg C \equiv \{5 + 3 \neq 8\}$;

4) $D \equiv \{30$ (есть) простое число$\}$,
$\neg D \equiv \{30$ не (есть) простое число$\}$.

Рассмотрим теперь вопрос об истинности высказываний A и $\neg A$. Если высказывание A *истинно* (т. е. то, что утверждается в этом высказывании, действительно имеет место), то высказывание $\neg A$, утверждающее, что A места не имеет, *ложно*. Итак, если A истинно, то $\neg A$ ложно. Наоборот, если A *ложно*, то высказывание $\neg A$ (как раз и утверждающее, что A места не имеет) *истинно*. Итак, если A ложно, то $\neg A$ истинно.

Мы видим, что, *каково бы ни было высказывание A, из двух высказываний A, $\neg A$ одно является истинным, а другое ложным.*

Например, из высказываний, указанных выше, $\neg A$, $\neg B$, C, $\neg D$ истинны, а A, B, $\neg C$, D ложны.

Самый простой прием образования отрицания заключается, как мы отмечали, в том, что к сказуемому добавляется частица «не». Например:

$$A \equiv \{11 \text{ делится на } 3\},$$
$$\neg A \equiv \{11 \text{ не делится на } 3\}.$$

Однако этот простой прием будет неприменим, если само высказывание уже является отрицательным, т. е. уже содержит частицу «не» перед сказуемым. Рассмотрим, например, высказывание

$$B \equiv \{18 \text{ не делится на } 5\}.$$

Для образования отрицания $\urcorner B$ мы уже не можем добавить еще одно отрицание к сказуемому (т. е. не можем сказать: «18 не не делится на 5»). Поэтому отрицание приходится формулировать так:

$$\urcorner B \equiv \{\text{высказывание «18 не делится на 5» места не имеет}\}.$$

Но что означает это утверждение? Оно означает, что 18 *делится* на 5, т. е. отрицание $\urcorner B$ можно проще сформулировать так:

$$\urcorner B \equiv \{18 \text{ делится на } 5\}.$$

Таким образом, *если в некотором высказывании B перед сказуемым уже стоит отрицательная частица «не», то для образования отрицания $\urcorner B$ достаточно выбросить частицу «не».*

Пусть теперь A — произвольное высказывание. Его отрицание $\urcorner A$ также является высказыванием. Значит, можно рассматривать и его отрицание, т. е. высказывание $\urcorner\urcorner A$. Оно называется *двойным отрицанием* высказывания A. Его можно сформулировать словами так: *утверждение о том, что высказывание A не выполняется, места не имеет.* Но это по смыслу ничем не отличается от утверждения о справедливости самого высказывания A.

Более точно, *двойное отрицание $\urcorner\urcorner A$ истинно в том и только в том случае, если истинно само высказывание A* (т. е. если A истинно, то и $\urcorner\urcorner A$ истинно, а если A ложно, то и $\urcorner\urcorner A$ ложно).

Это правило называется *законом отрицания отрицания.*

§ 3. Неопределенные высказывания

Будем обозначать через N множество всех натуральных чисел. Через x условимся обозначать *произвольное* натуральное число, т. е. произвольный элемент множества N. Рассмотрим теперь следующие предложения:

$$A(x) \equiv \{\text{число } x \text{ делится на } 5\},$$
$$B(x) \equiv \{x > 10\},$$
$$C(x) \equiv \{x \text{ — простое число}\},$$
$$D(x) \equiv \{(x-5)^2 < 10\}.$$

Предложения $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ высказываниями не являются. Действительно, об истинности, например, $A(x)$ мы ничего не можем сказать, пока нам неизвестно число x. Однако, подставляя в $A(x)$ вместо x различные натуральные числа, мы будем получать высказывания о натуральных числах — иногда истинные, иногда ложные. Подставляя в $A(x)$ вместо x различные натуральные числа, мы получаем, например, следующие высказывания:

$A(5) \equiv$ {число 5 делится на 5} — истинное высказывание,
$A(13) \equiv$ {число 13 делится на 5} — ложное высказывание

и т. д. Можно составить следующую *таблицу истинности* для этих высказываний:

$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	$A(4)$	$A(5)$	$A(6)$	$A(7)$	$A(8)$	$A(9)$	$A(10)$	...
Л	*Л*	*Л*	*Л*	*И*	*Л*	*Л*	*Л*	*Л*	*И*	...

Указанные выше предложения $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, содержащие переменное x, можно назвать *неопределенными высказываниями* (в математике их называют также предикатами). Каждое из них выражает некоторое *свойство* натурального числа x. Например, $C(x)$ выражает свойство быть простым числом, $A(x)$ — свойство делиться на 5 и т. п. Если вместо x подставить любое натуральное число, то мы получим обычное высказывание.

Неопределенное высказывание может быть задано на любом множестве, а не только на множестве натуральных чисел. Оно представляет собой высказывание о каком-то элементе x рассматриваемого множества. Для одних элементов эти высказывания истинны, для других — ложны.

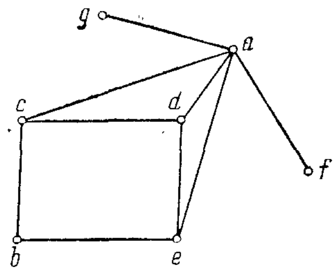

Рис. 1.

Пример 1. На рис. 1 изображены точки, соединенные несколькими отрезками. На множестве M, состоящем из точек a, b, c, d, e, f, g, задано неопределенное высказывание:

$S(x) \equiv$ {к точке x в рассматриваемой фигуре примыкают три отрезка}.

Вот таблица истинности этого неопределенного высказывания:

$S(a)$	$S(b)$	$S(c)$	$S(d)$	$S(e)$	$S(f)$	$S(g)$
Л	Л	И	И	И	Л	Л

Часто приходится рассматривать неопределенные высказывания, в которые входит не одно, а два или большее число переменных. Рассмотрим, например, следующие предложения, в которых под x и y понимаются произвольные натуральные числа:

$$A(x,y) \equiv \{x < y\},$$
$$B(x,y) \equiv \{x + y = 10\},$$
$$C(x,y) \equiv \{x \text{ делится на } y\},$$
$$D(x,y) \equiv \{x + y \text{ — простое число}\}.$$

Мы ничего не можем сказать об истинности или ложности этих утверждений, пока нам не указано, какие значения принимают x и y. Но если точно указано, чему равны x и y, каждое из сформулированных утверждений превращается в *высказывание* — для одних пар (x,y) истинное, для других ложное. Вот примеры высказываний, получающихся из указанных предложений при конкретных значениях x и y:

$A(1;\ 3) \equiv \{1 < 3\}$ — истинное высказывание,
$A(2;\ 2) \equiv \{2 < 2\}$ — ложное высказывание,
$A(5;\ 4) \equiv \{5 < 4\}$ — ложное высказывание,
$B(1;\ 3) \equiv \{1 + 3 = 10\}$ — ложное высказывание,
$B(8;\ 2) \equiv \{8 + 2 = 10\}$ — истинное высказывание

и т. д.

§ 4. Знаки общности и существования

Отрицание представляет собой операцию над высказываниями (или над неопределенными высказываниями). При помощи этой операции из любого, например неопределенного, высказывания $A(x)$ можно получить новое неопределенное высказывание $\urcorner A(x)$ — его отрицание.

Большое затруднение у учащихся вызывает нахождение правильной формулировки отрицания $\urcorner A$ в том случае, когда высказывание A содержит слова «все», «каждый», «хотя бы один», «найдется», «существует» и т. п.

Пусть, например, высказывание A имеет вид

$$A \equiv \{\text{каждое простое число нечетно}\}.$$

На вопрос о том, каково будет отрицание этого высказывания, многие отвечают, что отрицанием будет высказывание

$$B \equiv \{\text{каждое простое число четно}\}.$$

Легко убедиться в том, что здесь ошибка, поскольку ни одно из этих высказываний не является истинным. Правильным будет следующий ответ:

$$\neg A \equiv \{\text{не каждое простое число нечетно}\},$$

иными словами,

$$\neg A \equiv \{\text{найдется (существует) простое число, которое четно}\},$$

или еще

$$\neg A \equiv \{\text{хотя бы одно простое число четно}\}.$$

Это высказывание истинно: существует (только одно!) четное простое число, а именно 2.

Сравним два только что рассмотренных высказывания:

$$A \equiv \{\textit{каждое} \text{ простое число нечетно}\},$$
$$\neg A \equiv \{\textit{хотя бы одно} \text{ простое число четно}\}.$$

Мы видим, что если отбросить начальные слова в формулировках, то высказывание A будет иметь вид $\{\ldots$простое число нечетно$\}$, а его отрицание $\neg A$ будет иметь вид $\{\ldots$простое число четно$\}$, т. е. вторая часть высказывания просто заменится ее отрицанием. Но очень важно заметить, что при этом первое слово «каждое», стоявшее в высказывании A, заменится в высказывании $\neg A$ словами «хотя бы одно» (или словом «найдется» или «существует»). Этот факт является общим, и его понимание может избавить от многих неприятных ошибок. Итак, *если высказывание A начинается со слов «все», «каждый», «любой» и т. п., то для получения отрицания $\neg A$ надо либо, ничего не меняя, поставить отрицание «не» перед этими словами, либо же поставить отрицание «не» после этих слов, но тогда эти слова непременно надо заменить на «хотя бы один», «найдется», «существует» и т. п.* Разумеется верно и обратное: если в начале высказывания стоят слова «хотя бы один», «найдется», «существует», то при постановке отрицания «не» после этих слов они заменяются на «все», «каждый», «любой». Еще раз подчеркнем, что это происходит при постановке отрицания «не» после указанных слов. Если же отрицание «не» добавляется (или выбрасывается) перед указанными выше словами, то никакой замены слов не происходит.

Пример 2.

$$A \equiv \{\text{каждое из чисел } a, b, c \text{ делится на } 7\},$$

$$\neg A \equiv \{\text{не каждое из чисел } a, b, c \text{ делится на } 7\},$$

или иначе:

$$\neg A \equiv \{\text{хотя бы одно из чисел } a, b, c \text{ не делится на } 7\}.$$

Пример 3.

$$A \equiv \{\text{никакой ромб не может быть вписан в окружность}\}.$$

Это высказывание можно сформулировать иначе:

$$A \equiv \{\text{не существует ромба, который может быть вписан в окружность}\}.$$

Поскольку здесь «не» стоит впереди, для получения отрицания можно просто отбросить это «не»:

$$\neg A \equiv \{\text{существует ромб, который может быть вписан в окружность}\}.$$

Пример 4.

$$A \equiv \{\text{во всяком треугольнике три медианы пересекаются в одной точке}\},$$

$$\neg A \equiv \{\text{не во всяком треугольнике три медианы пересекаются в одной точке}\},$$

или иначе:

$$\neg A \equiv \{\text{найдется треугольник, в котором три медианы не пересекаются в одной точке}\}.$$

Иногда используют специальные знаки $\forall$, $\exists$. Первый из них (*знак общности* $\forall$) заменяется в словесных формулировках словами *всякий, каждый, любой, все*. Второй знак $\exists$ (*знак существования*) заменяется в словесных формулировках словами *существует, найдется, какой-нибудь, хотя бы один.* Именно, если $P(x)$ — некоторое неопределенное высказывание, заданное на множестве M, то запись

$$(\forall x)\, P(x)$$