

С.В. Ковалевская

Научные работы

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С11

С.В. Ковалевская
С11 Научные работы / С.В. Ковалевская – М.: Книга по Требованию, 2012. – 368 с.

ISBN 978-5-458-32336-9

В настоящее издание вошли все научные труды Ковалевской, в частности мемуары по теории уравнений с частными производными, по абелевым интегралам, механике и т. д. Работы Ковалевской снабжены обширными примечаниями исторического и специального характера (в которых, между прочим, приложена статья А. М. Ляпунова «Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжёлого твёрдого тела, имеющего неподвижную точку») и не менее обширной библиографией трудов как самой Ковалевской, так и о ней, также в сборнике размещен обстоятельный очерк жизни С. В. Ковалевской, в котором содержится и оценка её научной деятельности.

ISBN 978-5-458-32336-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ *

ВВЕДЕНИЕ

Дано алгебраическое дифференциальное уравнение

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (1)$$

где G обозначает целую рациональную функцию независимой переменной x , величины y , определяемой как функция этой независимой переменной, и ее производных по x до n -го порядка включительно.

Аналитическая функция полностью определяется, как только задана какая-нибудь регулярная ветвь ее ⁽¹⁾. ** Задача, следовательно, сводится к определению в самом общем виде степенного ряда

$$\sum_{v=0}^{\infty} b_v \frac{(x-a)^v}{v!}$$

* Эта статья появилась одновременно как вступительная диссертация на соискание докторской степени на философском факультете в Геттингене.

** Цифры обозначают номера ссылок в Приложении, относящемся к данной статье. В приложении VI, стр. 312, указано, где были опубликованы научные работы С. В. Ковалевской. *Прим. ред.*

где $a, b_0, b_1, \dots$ обозначают постоянные, таким образом, чтобы он, будучи подставлен вместо y , удовлетворял заданному дифференциальному уравнению и сходиллся внутри некоторого круга, окружающего точку a .

Следовательно, при подстановке этого ряда вместо y в выражение

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

и при разложении последнего по степени $x - a$ каждый отдельный коэффициент этого разложения должен обратиться в нуль.

Таким образом, прежде всего, мы получаем уравнение между $a, b_0, b_1, \dots, b_n$

$$G(a, b_0, b_1, \dots, b_n) = 0 \quad (2)$$

Затем, если y является какой-нибудь регулярной функцией ⁽¹⁾ от x , будем иметь для производной λ -го порядка от

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

выражение

$$G'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) \frac{d^{n+\lambda} y}{dx^{n+\lambda}} + H_\lambda\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n+\lambda-1} y}{dx^{n+\lambda-1}}\right)$$

где G' обозначает частную производную от G по $\frac{d^n y}{dx^n}$, а H_λ — целую рациональную функцию от

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n+\lambda-1} y}{dx^{n+\lambda-1}}$$

Следовательно (для $\lambda = 1, 2, \dots, \infty$), должно быть

$$G'(a, b_0, b_1, \dots, b_n) b_{n+\lambda} + H_\lambda(a, b_0, b_1, \dots, b_{n+\lambda-1}) = 0 \quad (3)$$

так как должен обращаться в нуль коэффициент при $(x - a)^\lambda$ в указанном разложении в ряд выражения

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

Обратно, принятое для y разложение в ряд будет формально удовлетворять уравнению (1), если будут выполняться уравнение (2) и все уравнения (3).

Но по уравнениям (3) однозначно определятся коэффициенты b_ν , индекс которых $> n$, как только будут заданы $a, b_0, b_1, \dots, b_n$, причем в то же время $G'(a, b_0, b_1, \dots, b_n)$ будет иметь отличное от нуля значение.

Таким образом, получаем теорему:

„Если выбрать постоянные

$$a, b_0, b_1, \dots, b_n$$

произвольно, однако так, что уравнение

$$G(a, b_0, b_1, \dots, b_n) = 0$$

будет иметь простой корень b_n , то величины

$$b_{n+1}, b_{n+2}, \dots$$

могут всегда быть определены однозначно таким образом, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

будучи подставлена вместо y , будет формально удовлетворять уравнению (1) *.

* Эта теорема впервые была дана Вейерштрассом⁽²⁾ в статье „Zur Theorie der analytischen Facultäten“ (Crelles Journal, Bd 51, S. 43) и вскоре после этого была доказана Брио и Буке (Briot et Bouquet. Journal de l'Ecole polytechnique, cah. 36). Она сохраняет силу, если выражение, стоящее в левой части уравнения (1), представляет собой однозначную функцию, разлагающуюся во всюду сходящийся степенной ряд по степеням величин

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}.$$

y_0 — вспомогательную величину, связанную с $x, y_1, \dots, y_n$ неприводимым алгебраическим уравнением

$$G(x, y_0, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (6)$$

$G, G_1, \dots, G_n$ — целые рациональные функции от $x, y_0, y_1, \dots, y_n$, G' — частную производную от G по y_0 *.

Положим теперь для $\lambda = 0, 1, \dots, n$

$$y_\lambda = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\lambda\mu} \frac{(x-a)^\mu}{\mu!} \quad (7)$$

и возьмем

$$a, b_{10}, b_{20}, \dots, b_{n0}$$

такими, чтобы уравнение

$$G(a, b_{00}, b_{10}, \dots, b_{n0}) = 0$$

решенное относительно b_{00} , имело конечный простой корень, и принимаем его за b_{00} ; тогда, разлагая выражения, стоящие в левой части уравнений (5), (6), по степеням $x-a$ и полагая коэффициенты отдельных степеней равными нулю, определим однозначно величины

$$\begin{array}{c} b_{01}, b_{02}, \dots \\ b_{11}, b_{12}, \dots \\ \dots \dots \dots \\ b_{n1}, b_{n2}, \dots \end{array}$$

таким образом, чтобы уравнения (5), (6) *формально* удовлетворялись.

*Каким образом можно каждую систему алгебраических дифференциальных уравнений привести к этому „каноническому“ виду, показывает Якоби в статьях „De investigando ordine systematis differentialium vulgarium cujuscunque“ (Borchardt's Journal, Bd 64, S. 237) и „De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocanda“ (Vorlesungen über Dynamik, Anhang, S. 550).

Но тогда полученные так $n + 1$ рядов (7) также будут всегда сходящимися внутри определенной области и представят собой, если ограничить x этой областью, систему из $n + 1$ функций, которые действительно будут удовлетворять рассматриваемым здесь уравнениям.

Из этой системы получится тогда система (однозначных или многозначных) аналитических функций, обладающих тем свойством, что каждые $n + 1$ соответствующие регулярные ветви этих функций также будут удовлетворять уравнениям (5), (6).

Обратно, если система из $n + 1$ аналитических функций удовлетворяет уравнениям (5), (6), но не удовлетворяет одновременно уравнению

$$\frac{\partial G(x, y_0, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_0} = 0$$

(т. е. если последняя не является особым решением системы уравнений в частных производных), то тогда, если только будут исключены специальные значения a , каждая система соответствующих элементов* этих функций может быть представлена в виде рядов, составленных вышеописанным способом.

Но особые решения мы получаем, комбинируя вышеприведенные уравнения (5), (6) с уравнением

$$\frac{\partial G(x, y_0, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_0} = 0$$

Эти теоремы в приведенной формулировке взяты мною из лекций моего уважаемого учителя господина *Вейерштрасса*. В настоящей работе я занимаюсь исследованием вопроса о том, можно ли вообще и как далеко можно эти теоремы распространить на тот случай, когда для определения аналитических функций многих переменных даются алгебраические дифференциальные уравнения в частных производных.

* См. § III вначале.

§ I

Рассмотрим сначала следующую систему дифференциальных уравнений с частными производными, в которых $x, x_1, \dots, x_r$ обозначают независимые переменные и $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — подлежащие определению функции последних, а $G_{\alpha\beta}^{(r)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ являются заданными функциями от $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, представленными в форме обыкновенных, сходящихся внутри некоторой области степенных рядов:

$$(1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= \sum_{\beta=1}^n G_{l\beta}^{(1)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_1} + \dots + \sum_{\beta=1}^n G_{r\beta}^{(1)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_r} \\ &\vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} &= \sum_{\beta=1}^n G_{l\beta}^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_1} + \dots + \sum_{\beta=1}^n G_{r\beta}^{(n)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_r} \end{aligned}$$

Для краткости изложения будем в последующем подразумевать под степенным рядом многих переменных $(x, x_1, \dots, x_r)$ всегда такой ряд, который содержит только целые и положительные степени этих величин.

При таком предположении будут иметь место следующие теоремы.

А. Если

$$\varphi(x_1, \dots, x_r)_{10}, \dots, \varphi(x_1, \dots, x_r)_{n0}$$

суть n произвольно взятых степенных ряда, обладающих общей, хотя бы и ограниченной областью сходимости, и в точке

$$(x_1=0, x_2=0, \dots, x_r=0)$$

все обращаются в нуль, то имеется n определенных степенных рядов от $(x, x_1, \dots, x_r)$, которые при $x=0$ переходят соответственно в

$$\varphi(x_1, \dots, x_r)_{10}, \dots, \varphi(x_1, \dots, x_r)_{n0}$$

и при подстановке их вместо $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в заданные дифференциальные уравнения *формально* им удовлетворяют.

последних составляется из конечного числа коэффициентов от выражений $G_{\alpha\beta}^{(r)}$ посредством лишь сложения и умножения.

Имея теперь

[illegible]

и подставляя

$$\varphi(x_1, \dots, x_r)_{\alpha v} = \sum_{v_1=0, \dots, \infty, \dots, v_r=0, \dots, \infty} \left(\varphi_{v_1 \dots v_r}^{(\alpha)} \frac{x_1^{v_1}}{v_1!} \dots \frac{x_r^{v_r}}{v_r!} \right) \quad (\alpha=1, \dots, n) \quad (3)$$

получим каждую из величин

$$\varphi_{\nu\nu_1\dots\nu_r}^{(\alpha)} \quad (\alpha=1, \dots, n)$$

в виде целой рациональной функции конечного числа величин

$$\varphi_{0\mu_1\ldots\mu_r}^{(\alpha)} \quad (\alpha=1, \ldots, n)$$

и коэффициентов функций

$$G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

и тогда заданные дифференциальные уравнения будут формально удовлетворяться, если положить

$$\varphi_\alpha = \sum_{\mu=0, \dots, \infty} \left(\varphi(x_1, \dots, x_r)_{\alpha\mu} \frac{x^\mu}{\mu!} \right) \quad (\alpha=1, \dots, n) \quad (4)$$

$$\varphi_\alpha = \sum_{\mu=0, \dots, \infty, \mu_1=0, \dots, \infty, \dots, \mu_r=0, \dots, \infty} \left(\varphi_{\mu\mu_1 \dots \mu_r}^{(\alpha)} \frac{x^\mu}{\mu!} \frac{x_1^{\mu_1}}{\mu_1!} \dots \frac{x_r^{\mu_r}}{\mu_r!} \right)$$

