М. К. Куренский

Дифференциальные уравнения

Книга 2. Дифференциальные уравнения в частных производных

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М11

М. К. Куренский
М11 Дифференциальные уравнения: Книга 2. Дифференциальные уравнения в частных производных / М. К. Куренский – М.: Книга по Требованию, 2021. – 335 с.

ISBN 978-5-458-63834-0

Состоит из разделов: Линейные уравнения с частными производными первого порядка. Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка. Уравнения с частными производными второго порядка одной неизвестной функции. Уравнения с частными производными первого и второго порядков функции двух и больше переменных. Понятия об интегральных уравнениях. Уравнения математической физики.

ISBN 978-5-458-63834-0

ГЛАВА VII.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 1-го ПОРЯДКА.

Эта глава представляет собой первую и основную главу, в которой изучается теория интегрирования уравнений с частными производными. Ей надо уделить достаточное внимание и основательно проработать, не опуская ни одного абзаца и параграфа, кроме разве § 61, где идет речь о приложении теории интегрирования одного линейного уравнения с частными производными к решению ряда геометрических задач: в этом параграфе, в крайнем случае, можно ограничиться рассмотрением дифференциального уравнения цилиндрических поверхностей и уравнения поверхностей тел вращения.

Изучивши основательно первый и второй параграфы этой главы, где даны основные понятия об уравнениях и о системах уравнений с частными производными 1-го порядка и где изложена более подробная, чем в главе I, теория интегралов уравнений и систем уравнений — общих, полных, особенных и полуособенных, и где даны указания о том, как от полного интеграла перейти к общему, — следует приступить к изучению в §§ 60, 62 и 63 способов интегрирования уравнений и систем уравнений только тогда, когда как следует усвоены будут такие основные понятия, как, например, понятие о полноте системы, об инволюционности ее и т. д. Ни в коем случае нельзя пропускать примеров, помещенных в тексте, и, переходя к усвоению дальнейшего материала, обязательно надо решить самостоятельно соответствующий пример из тех, которые находятся в конце главы. Для интегрирования систем уравнений даны 2 способа: способ Майера и способ Якоби. Для решения задач на практике, — большие преимущества на стороне первого из них.

Некоторые мои выводы читатель найдет в конце § 59. Они относятся к теории перехода от полного к общему интегралу для нелинейных уравнений.

Литература:

В. Г. Имшенецкий — Об интегрировании уравнений с частными производными 1-го порядка. Казань, 1865 (фр. перевод в Archiv f. Math. u. Physik, 1869).

Г. В. Пфейффер — Интегрирование уравнений с частными производными, ч. I, Киев, 1914 (литогр.) — Обобщение способа Jacobi интегрирования полных систем линейных однородных уравнений; обобщение соответствующих исследований Clebsch'a (Известия Академии наук СССР, 1931; Доклады Академии наук СССР, 1930) (также статьи в Записках фiз.-мат. Вiд. Укр. Акад. Наук, 1921—1933).

М. А. Тихомандрицкий — Курс диффер. и интегр. исчислений, т. II: инт. диф. уравнений, Харьков, 1903, гл. XXI.

Euler — De infinitis curvis ejusdem gradis... (Com. Ac. Sc. Petrop., t. 7, 1734—1735; 1740, p. 174, 184).

D'Alambert — Sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration (Histoire de l'Académie de Berlin, 1747, t. 3, p. 14—49).
Euler — Institutiones Calculi Integralis, t. 3, 4 éd., 1914, pp. 35—87.
Lagrange — Sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre (Oeuvres complètes, t. 3, 547, t. 4, 5).
Monge — Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles (Histoire de l'Acad. des Sc., 1784, p. 527).
N. N. Saltykow — Méthodes classiques d'intégration des équations aux derivées partielles du premier ordre (Mémorial des Sc. Math., fs. 50, Paris, 1931).
E. Goursat — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 1-er ordre, Paris, 1921, Ch. II—III.
P. Mansion — Théorie des équations aux dérivées partielles du 1-er ordre. Paris, 1891.
A. R. Forsyth — Theory of differentiel equations, vol. V, Cambridge, 1906; Ch. III, V, VII.
М. Куренський — Про інтегрування диф. рівнянь з частк. похідними при багатьох залежних змінних, Київ, 1927, розд. VI.

§ 58. Типы уравнений с частными производными. Системы вполне интегрируемые. Переходя к интегрированию дифференциальных уравнений с частными производными, начнем с уравнений 1-го порядка *при одной неизвестной функции z от n независимых переменных $x_1, x_2, \dots x_n$.*

Теория интегрирования таких уравнений достаточно хорошо разработана и может считаться теорией вполне законченной в своих основах. Большим недостатком в теории интегрирования уравнений с частными производными 1-го порядка является то обстоятельство, что *интегрирование как одного только уравнения 1-го порядка, так и системы таких уравнений сводится к интегрированию системы совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка*, а интегрирование таких уравнений мы можем довести до конца только в некоторых специальных, простых случаях.

С интегрированием уравнений 2-го и высших порядков при одной неизвестной функции дело обстоит гораздо хуже: теперь рассматривают и пишут больше об уравнениях 2-го порядка при одной неизвестной функции z и при 2 ее аргументах x, y, разрабатывая более основательно теорию таких уравнений; теория уравнений 2-го порядка и выше при 3 независимых переменных и больше значительно сложнее.

Что касается уравнений 1-го и высших порядков при двух и больше неизвестных функциях $z_1, z_2, \dots$, — то их начали изучать только в недавнее время.

Теории уравнений с частными производными в этом году исполняется 200 лет: родилась она в 1734 г., в Петербурге, в виде статьи знаменитого Эйлера „De infinitis curvis ejusdem gradis...“ [Com. Ac. Sc. Petrop., t. 7 (1734—1735), 1740, p. 174, 184]. Идея Эйлера состояла в том, чтобы свести интегрирование уравнений с частными производными к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Это положение осталось неизменным на протяжении двух сот лет, — в настоящее время всякий прогресс в области интегрирования уравнений с частными производными тесно связан с применением упомянутой идеи Эйлера. Через 13 лет Даламбер, в знаменитой работе о колебании струны, устанавливает два принципа для процесса интегрирования уравнений с частными производными: 1) величина второй производной функции двух независимых переменных не зависит от порядка дифференцирования относительно аргументов, — теорема Эйлера; 2) для интегрирования уравнения с частными производными надо образовать полный дифференциал, чтобы посредством двух зависимостей

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

найти интеграл последнего уравнения. Спустя еще 20 лет, в 1768—1770 годах появляются знаменитые Эйлеровы Institutiones Calculi Integralis, третий том которых посвящен был уравнениям с частными производными. Здесь Эйлером применяются только что указанные принципы и интегрируется целый ряд уравнений. Все время Эйлер придерживается двух положений: 1) свести задачу интегрирования уравнения с частными производными к задаче интегрирования уравнений обыкновенных; 2) свести к квадратуре 1-е уравнение в полных дифференциалах с помощью заданного 2-го из вышенаписанных уравнений. Наконец, он пишет условие для полного дифференциала, если в выражении

$$dz = pdx + qdy$$

p и q будут функциями от x, y и z, — это классическое условие вида:

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z} p.$$

Впоследствии Лагранж установил теорему обратную Эйлеровой: предпоследнее выражение становится уравнением в полных дифференциалах, как только переменная q, функция от x, y, z, удовлетворяет последнему уравнению, — условию Эйлера. Заметим, в заключение этого исторического очерка, что все интегралы, найденные Эйлером, связаны с *произвольной* функцией; приписывая ей частные значения, Эйлер получает интегралы, называемые им частными интегралами.

При интегрировании уравнений с частными производными 1-го порядка *могут встретиться такие случаи*: 1) заданное для интегрирования уравнение есть линейное и однородное относительно производных; коэффициенты его—функции только от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$; 2) уравнение линейное неоднородное, с коэффициентами—функциями зависимого переменного z и независимых $x_1, x_2, \ldots x_n$; 3) система m линейных уравнений; 4) одно уравнение, нелинейное относительно производных; 5) система m нелинейных уравнений. В дальнейшем мы рассмотрим отдельно каждую из этих 5 категорий.

Можно доказать такую *основную общую теорему о существовании интегралов уравнений 1-го порядка*, пригодную для всех наших 5 отдельных случаев.

Пусть задана будет система m независимых уравнений 1-го порядка с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n$ при одной неизвестной функции z. Пусть, далее, эта система решена относительно производных $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_m}$ и записана в таком *нормальном виде:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = f_1\left(x_1, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n, z, \dfrac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \ldots \dfrac{\partial z}{\partial x_n}\right) \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2} = f_2(\ldots); \ldots \dfrac{\partial z}{\partial x_m} = f_m(\ldots). \end{cases}$$

Если: 1) заданные функции $f_1, \dots f_m$ удовлетворяют особым дифференциальным зависимостям, которые называются условиями совместимости дифференциальных уравнений и будут изложены подробно в следующих параграфах, причем число этих условий будет

$$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2},$$

т. е. для одного уравнения, когда $m = 1$, будет $m - 1 = 0$ и никаких условий совместимости не требуется; если, далее, 2) функции $f_1, \dots f_m$ представляют собой функции однозначные, конечные и такие, что их можно, по теореме Тейлора, разложить в бесконечные ряды степеней разностей вида

$$x_1 - a_1, \dots x_m - a_m, \dots x_n - a_n; \; z - b; \; \frac{\partial z}{\partial x_{m+1}} - c_1, \dots \frac{\partial z}{\partial x_n} - c_{n-m},$$

или, как говорят, если наши функции $f_1, \dots f_m$ будут *голоморфны в области точки* $(a_1, \dots a_n, b, c_1, \dots c_{n-m})$ многомерного пространства; если, наконец, 3) выбрать какую-угодно функцию

$$\varphi(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n),$$

лишь бы она была голоморфной около точки $(a_{m+1}, \dots a_n)$ и для

$$x_{m+1} = a_{m+1}, \dots x_n = a_n$$

принимала бы вместе со своими первыми производными заранее заданные численные значения b и c по формулам

$$\varphi(a_{m+1}, \dots, a_n) = b; \; \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+1}}\right|_{x_{m+1} = a_{m+1}, \dots x_n = a_n} = c_1; \dots \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right|_{x_{m+1} = a_{m+1}, \dots x_n = a_n} = c_{n-m},$$

тогда *наша система дифференциальных уравнений 1-го порядка допускает один и только один интеграл*

$$z = F(x_1, \dots x_n)$$

такой, который будет голоморфным около точки $(a_1, \dots a_m, a_{m+1} \dots a_n)$ и обращается в заранее заданную функцию $\varphi(x_{m+1}, \dots x_n)$, как только в выражение $F(x_1, \dots x_n)$ подставим численное значение первых m x-ов:

$$x_1 = a_1, \dots x_m = a_m.$$

Интеграл, удовлетворяющий указанным условиям, называется *интегралом Коши.*

Условия совместимости системы m дифференциальных уравнений, упомянутые в пункте 1), могут удовлетворяться либо на основании самих уравнений заданной системы, либо могут представлять собою тождества. В первом случае систему заданных уравнений будем называть *системой вполне интегрируемой*, а во-втором — *инволюционной.*

Надо иметь в виду следующее обстоятельство, которым иногда приходится пользоваться при интегрировании уравнения или системы уравнений 1-го порядка.

Всякое дифференциальное уравнение, а равным образом и *всякая система уравнений могут быть преобразованы в такие, которые не содержат явно неизвестной функции*. Однако в этом новом уравнении или в системе уравнений *количество независимых переменных увеличивается на единицу*. Разъясним это для одного уравнения

$$f\left(x_1, \dots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0. \tag{1}$$

Проинтегрировать это уравнение—это значит найти такую функцию $F(x_1, \dots x_n, z)$, чтобы уравнение

$$F(x_1, \dots x_n, z) = 0$$

определяло функцию z, удовлетворяющую заданное дифференциальное уравнение.

Дифференцируя предыдущее уравнение, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} = 0, \dots \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \dots \frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

и подстановка выражений для производных

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

в заданное дифференциальное уравнение приводит к новому уравнению с $(n+1)$-й независимой переменной $x_1, \dots x_n, z$ и с одной новой неизвестной функцией F вида:

$$f\left(x_1, \dots x_n, z, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \dots -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right) = 0,$$

или иначе

$$f_1\left(x_1, \dots x_n, z, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = 0. \tag{2}$$

Очевидно, что всякая функция $F(x_1, \dots x_n, z)$, удовлетворяющая этому уравнению, будет удовлетворять также и уравнению (1). Однако интегрированием уравнения (2) нельзя получить всех интегралов уравнения (1): мы сможем, как это не трудно доказать,— получить все неособенные интегралы уравнения (1) из интегралов уравнения (2) и не получим интегралов особенных. Если уравнению (2) удовлетворяет некоторая функция $F(x_1, \dots x_n, z)$, то ему будет удовлетворять также и функция $F + C$. Поэтому всякий интеграл z уравнения (1), не зависящего от параметра C, будет содержаться в интеграле, содержащем произвольный параметр C и определяемом конечным уравнением

$$F(x_1, \dots x_n, z) + C = 0.$$

Для той же самой цели употребляется еще так называемая *вторая подстановка Якоби,* вида

$$y = zt,$$

где t есть новая независимая переменная, y — новая функция и z — старая функция от $x_1, \ldots x_n$, не зависящая от нового аргумента t. Значение этой 2-й подстановки Бертран нарушил, между прочим, настолько, что В. Г. Имшенецкий считал ее совсем бесполезной; однако дальнейшие работы выдающихся специалистов в области теории уравнений с частными производными, Софуса Ли и Майера, дали ей в науке все права гражданства.

§ 59. Об интегралах уравнений с частными производными 1-го порядка. В главе I мы назвали *общим интегралом одного уравнения 1-го порядка* с n независимыми переменными $x_1, \ldots x_n$ такой интеграл, который содержит одну произвольную функцию φ от $(n-1)$-го независимых аргументов $u_1, \ldots u_{n-1}$, являющихся определенными функциями независимых переменных $x_1, \ldots x_n$ и зависимой z. *Для системы m уравнений* 1-го порядка общий интеграл должен содержать в своем выражении одну произвольную функцию φ от $n-m$ аргументов $u_1, \ldots u_{n-m}$.

Полный интеграл для одного уравнения должен иметь n существенных произвольных постоянных $C_1, \ldots C_n$, а для системы m уравнений — всего $n-m+1$ постоянных $C_1, \ldots C_{n-m+1}$

Интегралы с меньшим количеством аргументов $u_1, u_2, \ldots$ в произвольной функции φ и с меньшим числом постоянных $C_1, C_2, \ldots$ будут лишь *частными интегралами.* Простейшими из частных интегралов дифференциальных уравнений, которыми пользуются обычно для построения полных и общих интегралов, являются те, которые имеют в своих выражениях лишь по одной произвольной постоянной C. Независимых интегралов этого рода будет n для одного уравнения и $n-m+1$ для системы m уравнений. Эти независимые интегралы должны быть разрешимыми относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots$; тогда в уравнениях

$$C_1 = u_1(x_1, \ldots x_n, z); \; C_2 = u_2(x_1, \ldots x_n, z); \ldots$$

первые части $u_1, u_2, \ldots$ и будут теми функциями u, о которых мы говорили в начале этого параграфа. Для интегрирования уравнений с частными производными 1-го порядка и надо как раз найти n таких независимых функций $u_1, u_2, \ldots$, в случае одного дифференциального уравнения, и $n-m+1$ независимых функций $u_1, \ldots u_{n-m+1}$ для того случая, когда задана для интегрирования система m уравнений.

Легко видеть, что *исключение n произвольных постоянных* $C_1, \ldots C_n$ из конечного уравнения, содержащего эти n постоянных, и из n уравнений, полученных дифференцированием этого конечного уравнения соответственно по $x_1, \ldots x_n$, дает одно уравнение с частными производными 1-го порядка, а исключение $k = n-m+1$ произвольных постоянных $C_1, \ldots C_{n-m+1}$, при $m < n$, т. е. $n < k < 1$, из конечного уравнения с только что указанным количеством постоянных C и из n уравнений, полученных дифференцированием конечного уравнения по x_1, потом по x_2 и т. д., — приведет к системе m дифференциальных уравнений 1-го порядка.

При $m=n$, $k=1$, когда имеем для исключения одну произвольную постоянную C_1, получим, очевидно, систему $(n-1)$-го дифференциального уравнения 1-го порядка.

Гораздо сложнее обстоит дело в том случае, когда *для исключения имеем число произвольных постоянных k, большее или равное числу независимых переменных*, т. е. когда $k \geqslant n$. Для исключения всех постоянных $C_1, \ldots C_k$ из конечного уравнения, нельзя ограничиться только производными 1-го порядка, — конечное уравнение надо будет дифференцировать по $x_1, \ldots x_n$ два и большее число раз. В результате исключения получим дифференциальные уравнения 2-го и высших порядков, при этом, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, число уравнений с частными производными порядка 2-го и выше возрастает значительно быстрее порядка дифференциальных уравнений с частными производными. Произведем надлежащий расчет.

Число частных производных s-го порядка от одной функции z n независимых переменных $x_1, \ldots x_n$ будет

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+s-1)}{s!}$$

Поэтому число N всех частных производных от 1-го и до s-го порядка включительно будет:

$$N = n + \frac{n(n+1)}{2!} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+s-1)}{s!}$$

Число уравнений, полученных в результате дифференцирования конечного уравнения, вместе с этим конечным уравнением, содержащим k произвольных постоянных $C_1, \ldots C_k$, будет $N+1$. Если $N=k$, получим после исключения одно дифференциальное уравнение s-го порядка; если $N \neq k$, то надо взять такое число s, чтобы было $N > k$, — тогда будем иметь систему $N-k+1$ уравнений с частными производными s-го порядка.

Хотя нам и надо находить общий интеграл уравнения или системы уравнений, который только и дает совершенно полный ответ на задачу интегрирования, однако мы будем в дальнейшем искать и писать вообще только полный интеграл уравнения или системы уравнений 1-го порядка, так как, пользуясь интегралами $u_1, u_2, \ldots$, о которых мы только что говорили и к разысканию которых переходим в следующих параграфах, мы сможем построить вообще только полный интеграл с соответствующим числом произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots$ Исключение представляют *линейные однородные или неоднородные уравнения и системы таких уравнений*; для них можно, найдя соответственное число интегралов $u_1, u_2, \ldots$, *сразу написать и общий интеграл, и полный интеграл.* Что же касается *нелинейных уравнений и систем уравнений*, то для них будем строить *интегралы полные*. Существует, правда, *способ вариации произвольных постоянных* $C_1, C_2, \ldots$ для перехода от полного интеграла к общему интегралу, годный как для линейных, так и для нелинейных уравнений, однако вариация произвольных постоянных сложна для выполнения и может привести к общему интегралу, требующему определения неизвестных функций $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$, больше тогда, когда, например, для одного нелинейного уравнения полный интеграл имеет такую форму:

$$z=F(x_1,\dots x_n,\ C_1,\dots C_{n-1})+C_n,$$

или такую:

$$z=f_1(x_1,\dots x_n,\ C_1,\dots C_{n-1})+C_nf_2(x_1,\dots x_n).$$

Сущность способа вариации произвольных постоянных для одного дифференциального уравнения

$$f\left(x_1,\dots x_n,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\dots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0 \tag{3}$$

состоит в следующем. Положим, что мы нашли полный интеграл этого уравнения

$$F(x_1,\dots x_n,\ z;\ \ C_1,\dots C_n)=0, \tag{4}$$

где $C_1,\dots C_n$ обозначают произвольные постоянные. Если бы мы продифференцировали последнее уравнение по x_1, по $x_2,\dots$ по x_n, то исключение n постоянных $C_1,\dots C_n$ из уравнения (4) и из n уравнений, полученных дифференцированием:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}=0,\dots\frac{\partial F}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_n}=0 \tag{5}$$

должно привести к уравнению (3). Будем теперь считать, что величины $C_1,\dots C_n$ также являются функциями всех переменных $x_1,\dots x_n$, z. Тогда дифференцирование уравнения (4) даст вместо (5) такие n уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_1}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)=0\\&\cdot\\&\frac{\partial F}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_n}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Очевидно, что уравнения (6) совпадут с уравнениями (5) и в результате исключения величин $C_1,\dots C_n$ с помощью уравнения (4) приведут к заданному дифференциальному уравнению (3) в том случае, когда n величин $C_1,\dots C_n$ будут определяться системой таких n уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_1}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)+0;\dots\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial C_k}\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_n}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0. \tag{7}$$

Этой системе уравнений можно удовлетворить такими тремя способами.

1) Полагая

$$\frac{\partial C_k}{\partial x_1}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}=0;\qquad \frac{\partial C_k}{\partial x_n}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}=0,$$

или иначе.

$$\frac{dC_k}{dx_1}=0;\qquad \frac{dC_k}{dx_n}=0,$$

т.-е.

$$C_1=\text{const},\ C_2=\text{const},\dots C_n=\text{const},$$

что соответствует *полному интегралу* (4).

2) Полагая
$$\frac{\partial F}{\partial C_1}=0, \frac{\partial F}{\partial C_2}=0, \dots \frac{\partial F}{\partial C_n}=0,$$

что дает n уравнений, получаемых из уравнения (4), для определения неизвестных n функций

$$C_1=f_1(x_1, \dots x_n, z); \qquad C_n=f_n(x_1, \dots x_n, z);$$

если внесем найденные таким путем выражения для $C_1, \dots C_n$ в уравнение (4), то мы можем получить интеграл, не содержащий произвольных элементов $C_1, C_2, \dots C_n$, т. е. интеграл вида

$$\omega(x_1, \dots x_n, z)=0,$$

который будет *особенным интегралом* заданного дифференциального уравнения, представляющим обертку всех полных интегралов—сверхповерхностей $(n+1)$-мерного пространства, получаемых при малых изменениях параметров $C_1, \dots C_n$.

3) Нашей системе n уравнений (7), линейных относительно n величин $\frac{\partial F}{\partial C_1}, \dots \frac{\partial F}{\partial C_n}$, входящих во все уравнения системы (7), можно удовлетворить, наконец, полагая, что эти n линейных уравнений зависимы между собою, т. е. что определитель из коэффициентов при упомянутых n величинах равен нулю. Этот определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x_1}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}, & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial x_1}+\frac{\partial C_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial C_1}{\partial x_n}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}, & \dots & \frac{\partial C_n}{\partial x_n}+\frac{\partial C_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1} \end{vmatrix}=0$$

или

$$\begin{vmatrix} \frac{dC_1}{dx_1}, & \frac{dC_1}{dx_n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \frac{dC_n}{dx_n}, & \frac{dC_n}{dx_n} \end{vmatrix}=0,$$

т. е.

$$D\left(\frac{C_1, C_2, \dots C_n}{x_1, x_2, \dots x_n}\right)=0,$$

что указывает на существование одной или нескольких зависимостей какого-угодно вида между функциями $C_1(x_1, \dots x_n, z), \dots C_n(x_1, \dots x_n, z)$. Пусть между функциями $C_1, \dots C_n$ существует одна зависимость. Напишем ее в виде

$$C_n=\varphi(C_1, \dots C_{n-1}),$$

где φ есть символ произвольной функции от независимых между собою аргументов $C_1, \dots C_{n-1}$, так что функциональный определитель $(n-1)$-го порядка не равен нулю. Дифференцирование по $x_1, \dots x_n$ дает:

$$\frac{\partial C_n}{\partial x_1}+\frac{\partial C_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial C_i}\left(\frac{\partial C_i}{\partial x_1}+\frac{\partial C_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial C_n}{\partial x_n}+\frac{\partial C_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial C_i}\left(\frac{\partial C_i}{\partial x_n}+\frac{\partial C_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right).$$

Подставляя во все n уравнений (7) вместо множителей в последних членах $\frac{\partial C_n}{\partial x_1}+\frac{\partial C_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial C_n}{\partial x_n}+\frac{\partial C_n}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}$, их выражения из последних равенств, получим такие n уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial F}{\partial C_k}+\frac{\partial F}{\partial C_n}\cdot\frac{\partial C_n}{\partial C_k}\right)\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_1}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)=0$$

$$\cdot \quad \cdot \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial F}{\partial C_k}+\frac{\partial F}{\partial C_n}\frac{\partial C_n}{\partial C_k}\right)\left(\frac{\partial C_k}{\partial x_n}+\frac{\partial C_k}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0.$$

Из них одно есть следствие остальных $(n-1)$-го. Взявши $(n-1)$ уравнений из всех n, будем иметь систему $(n-1)$-го независимых линейных однородных уравнений, для которых определитель из коэффициентов, представляющий собою функциональный определитель $(n-1)$-го порядка из $C_1, \dots C_{n-1}$ не равен нулю. Следовательно, по известному свойству алгебраических линейных однородных уравнений, должны равняться нулю все первые множители в левых частях уравнений (8), и, следовательно, система (8) равносильна такой системе $(n-1)$-го уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial C_1}+\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial C_1}=0; \dots \frac{\partial F}{\partial C_{n-1}}+\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial C_{n-1}}=0.$$

Интеграл, определяемый совокупностью n уравнений

$$F(x_1, \dots x_n, z, C_1, \dots C_{n-1}, \varphi)=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial C_1}+\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial C_1}=0; \dots \frac{\partial F}{\partial C_{n-1}}+\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial C_{n-1}}=0, \tag{9}$$

где φ обозначает произвольную функцию от функций $C_1, \dots C_{n-1}$, будет *общим интегралом. Задача определения вида функций $C_1, \dots C_n$* от аргументов $x_1, \dots x_n$, z посредством предшествующих уравнений довольно трудна для полного решения.

Если бы мы положили, что между функциями $C_1, \dots C_n$ существует не одна, а m зависимостей, тогда совершенно аналогичным путем пришли бы к интегралу, определяемому системой $(n-m+1)$-го уравнений

$$F(x_1, \dots x_n, z, C_1, \dots C_{n-m}, \varphi_1, \dots \varphi_m)=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial C_1}+\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial \varphi_h}\cdot\frac{\partial \varphi_h}{\partial C_1}=0; \qquad \frac{\partial F}{\partial C_{n-m}}+\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial \varphi_h}\cdot\frac{\partial \varphi_h}{\partial C_{n-m}}=0,$$

где $\varphi_1, \dots \varphi_m$ обозначают произвольные фукции от $n-m$ функций $C_1, \dots C_{n-m}$. Такой интеграл с m произвольными функциями от $n-m$ аргументов каждая будет менее общим, чем интеграл (9) с одной только произвольной функцией φ, но от $(n-1)$-го аргумента, и, по Мансьону, называется *полуособенным интегралом.*

Решение вопроса о переходе от полного интеграла к общему закончить,—как это обычно делается во всех полных руководствах по