

А.М. Гинзбург

Симетрия на плоскости

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
А11

А11 **А.М. Гинзбург**
Симетрия на плоскости / А.М. Гинзбург – М.: Книга по Требованию, 2021. – 52 с.

ISBN 978-5-458-56858-6

ISBN 978-5-458-56858-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

жение плоской симметрии к нескольким практическим вопросам, в том числе к композиции узоров. Первым начавшим исследовать симметрическое строение узоров был мой сын Виктор Александрович Гинзбург, умерший в 1920 г. 20 лет от роду. После него работу по узорам закончил я. Из других авторов только Поля (G. Polja, Zürich) вскользь упомянул об этом. Следующие две части работы — симметрия на сфере и в пространстве — готовятся к изданию. Последние две части — стержневая и точечная симметрия — вчерне разработаны.

Вследствие обратного порядка выводов, т. е. перехода от плоскости к пространству, а не наоборот, как делают другие авторы, получается большая простота и наглядность выводов, что имеет значение с педагогической стороны и в практических применениях симметрии. В этом легко убедиться, сравнивая мой метод с методом Федорова, Niggli и других.

Настоящая работа появится в свет благодаря содействию Института математики и механики в Харькове. Считаю долгом выразить свою признательность директору института проф. М. Х. Орлову, его заместителю проф. А. К. Сушкевичу и руководителю секции геометрии проф. Д. М. Синцову.

I. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИМЕТРИИ

Симметрия до сих пор еще сохранила следы своего происхождения от кристаллографии. Ее содержание не выходит за пределы комбинаций, возможных в заполненном материей пространстве, а ее методы основаны на кристаллографических построениях. Не выработано даже точное определение симметрии и нет единой системы изложения всех ее разделов. Между тем симметрия может и должна быть чисто геометрической дисциплиной, вытекающей из точно сформулированных определений и постулатов и излагаемой по единому методу. Подобно прочим отделам геометрии, симметрия должна выводиться из отвлеченных положений, которые можно вообразить, но для оправдания которых нет надобности искать эмпирических подтверждений в природе, как это делает кристаллография. Настоящее исследование — попытка дать такую систематическую и отвлеченную теорию симметрии.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Симметрия занимается квантованием пространства: из пространства методами симметрии можно выделить равные части — кванты пространства. Симметрия может проявляться только в таких пространствах, которые повсюду одинаковы, ибо иначе не могут существовать количественно и качественно неразличимые кванты. Кванты могут быть совмещаемы друг с другом. Следовательно, в симметрическом пространстве возможны такие изменения положения кванты: отражение, перенос, вращение. Области, в которых возможна симметрия, — те же, в которых возможны перечисленные изменения положения кванты, т. е.: 1) Эвклидово пространство, 2) плоскость, 3) сфера, 4) винтовая линия, 5) круг, 6) прямая линия.

Кванта есть конечная ограниченная часть области, т. е. это геометрическая фигура, в виде: отрезка линии, плоской или сферической фигуры или тела.

Симметрия изучает метрические и топологические свойства фигур. Если отвлечься от метрики фигур, то остается их топология, и всем выводам симметрии соответствуют выводы топологии. Фигуры могут быть правыми и левыми, одинаково и разно направленными. Одинаковые фигуры равны, если их

можно совместить друг с другом при помощи переноса и вращения. Разные фигуры равны, если их совмещение достигается отражением, переносом и вращением. Фигуры отражаются в зеркалах. Каждое зеркало имеет две отражающих стороны. Зеркалами могут быть: на линии — точка; на плоскости — прямая линия; на сфере — большой круг; в пространстве — плоскость.

Пара фигур, отраженных одним зеркалом, взаимна. Простое отражение совершается в одном зеркале, сложное — в совокупности зеркал.

Для совмещения двух равных пространственных фигур надо, чтобы они были одинаково ориентированы. Поэтому, если они разноразно ориентированы, то надлежит одну из них отразить для перемены ориентации в произвольной плоскости. В первой фигуре намечаются две произвольные точки m_a и n_a на прямой линии A . Во второй фигуре на соответственной прямой B намечаются соответственные точки m_b и n_b . Вторая фигура переносится параллельно самой себе так, что точка n_b совпадет с точкой n_a . Поворотом вокруг n_a приводятся в совпадение линии A и B и точки m_a и m_b . Окончательным поворотом вокруг линии A фигуры первая и вторая приводятся к совпадению.

Для приведения двух равных фигур к совпадению нужны следующие операции: отражение, перенос, вращение.

Симметрию можно более детально определить как свойство равных фигур заполнять при помощи отражения, поворота и переноса ту область, часть которой составляет фигура, таким образом, чтобы фигуры не перекрывали друг друга и чтобы между ними не было незаполненных промежутков. Из этого следует, что симметрическое заполнение одинаковыми фигурами — самый экономный вид заполнения. Так как совпадение фигур может произойти как следствие их движения в пространстве, а это движение может быть только трех родов, а именно: в виде прямолинейного переноса, в виде вращения вокруг оси и в виде винтообразного движения, то следовательно симметрия может проявиться только в этих трех видах. Содержание симметрии для удобства изложения можно разделить таким образом: симметрия на линии, симметрия на плоскости, симметрия на шаровой поверхности, объемная симметрия в пространстве, сетчатая или, иначе, стержневая симметрия в пространстве и точечная симметрия в пространстве.

2. СИМЕТРИЯ НА ЛИНИЯХ

На прямой линии зеркало в виде точки A удваивает фигуру и дает две реальных фигуры — правую и левую (рис. 1). Это — первая схема симметрии на линии. Если дано еще другое зеркало B , то оба зеркала, отражаясь друг в друге, дают ряд

зеркал и ряд отраженных попарно фигур — правых и левых (рис. 2). Это вторая схема целой симметрии $1/1$ — схема отражения. Совместное действие зеркал A и B дает третью схему симметрии. Реальная фигура, отражаясь в A , дает промежуточную мнимую фигуру, которая, отражаясь в B , дает уже реальную фигуру (рис. 3). Число реальных фигур вдвое меньше, чем во второй схеме. Симметрия получается $1/2$ — половинная. Эта схема есть схема переноса. Расположение фигур в схеме уже не зависит от положения зеркал A и B на прямой, а только от расстояния между зеркалами A и B : шаг переноса равен удвоенному расстоянию AB . В дальнейшем операция переноса будет обозначаться толстой линией, длина которой равна шагу переноса. На прямой, на которой находятся два зеркала A и B , третьего зеркала C не может быть, так как если отрезки AC и BC несоизмеримы, то отражения приводят к бесконечному дроблению промежутка между смежными зеркалами. Если же промежутки соизмеримы, то получится новая схема из двух видов зеркал C и D .

На круге очевидно могут быть те же три схемы симметрии, как и на прямой линии. Но разница в том, что расстояния между зеркальными точками на круге не могут быть произвольными. Если отрезок AB несоизмерим с окружностью, то получится бесконечное дробление расстояния между соседними точками. Если отрезок AB укладывается нечетное число раз в окружности, то точки A и B совпадут и между ними появятся новые точки C . Если отрезок AB укладывается четное число раз в окружности, то других точек кроме A и B в схеме не будет.

Операции отражения на винтовой линии не может быть вследствие однозначной ориентированности этой линии: она либо правая, либо левая. Но операция переноса может быть, и ее мера выражается отрезком той же винтовой линии. Симметрия получается $1/2$ — половинная. Очевидно, что величина отрезка переноса произвольна по отношению к полному обороту винта.

Итак, на линиях может быть всего десять видов симметрии:

Род линий	Отсутствие симметрии	Простая схема $1/1$ отражения	Сложная схема $1/1$ отражения	Сложная $1/2$ схема переноса
Прямая	○	○	○	○
Круг	○	○	○	○
Винт	○	—	—	○
Итого	3	2	2	3 = 10

○ есть; — нет.

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИМЕТРИИ

На прямолинейной симметрии основано устройство масштабов; на круговой симметрии — устройство делительных кругов; на винтовой симметрии основано устройство микрометрических винтов.

Винтовая симметрия объясняет расположение листьев на стебле. Оно является следствием стремления растений к максимальному использованию световой энергии. Наблюдениями установлены такие законы распределения листьев вдоль и вокруг стебля:

1. Черенки листьев располагаются вокруг стебля по винтовой линии.

2. Расстояния между соседними черенками по винтовой линии одинаковы.

3. Листья расположены равномерно, так что тень от каждого листа как можно меньше затеняет нижние листья.

Пусть 1, 2, 3, 4 — последовательные листья на развернутом цилиндре — поверхности стебля (рис. 4). Пусть длина окружности стебля есть 1, а проекция 1-2 есть x . Размеры прочих проекций:

$$\begin{array}{lll} 1-2=x, & 3-1=2x-1, & 3-2=1-x, \\ 1'-2=1-x, & 4-1'=2-3x, & 4-2=2x-1. \end{array}$$

При равномерном расположении листьев листья 4 и 3 делят одинаково проекции $1'-2$ и $2-1$, т. е. существует пропорция:

$$\frac{4-1'}{4-2} = \frac{3-1}{3-2}, \text{ или } \frac{2-3x}{2x-1} = \frac{2x-1}{1-x}, \text{ что дает } x^2 + x - 1 = 0,$$

т. е. $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$, а это есть золотое деление.

В природе через конечное число оборотов лист снова попадает на одну вертикаль с первым листом. Если взять $x = \frac{P}{n}$,

$1-x = \frac{Q}{n}$, причем $P+Q=n$, то приближенно

$$\frac{P}{n} + \frac{Q}{n} = 1 \pm \frac{1}{n}.$$

По мере увеличения n деление листьев приближается к золотому. Последовательные приближения даются непрерывной дробью, имеющей такой вид:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Они выражаются в следующей форме:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{6}, \quad n = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{5} = 1 + \frac{1}{15}, \quad n = 3 \cdot 5 = 15;$$

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{8} = 1 - \frac{1}{40}, \quad n = 5 \cdot 8 = 40;$$

$$\frac{5}{8} + \frac{5}{13} = 1 + \frac{1}{104}, \quad n = 8 \cdot 13 = 104$$

.....

$$\frac{m}{p} + \frac{m}{m+p} = 1 \pm \frac{1}{p(m+p)}; \quad n = p(m+p);$$

при увеличении m и p получается:

$$\frac{m^2}{p^2} + \frac{m}{p} - 1 = ,$$

или, положив $\frac{m}{p} = x$,

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x},$$

т. е. золотое деление.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В системах из нескольких зеркал последние могут действовать порознь или совместно. На линии зеркал — это точки; на поверхностях — зеркал линии; в пространстве — зеркал суть плоскости. Совместное действие зеркал может вызвать перенос и вращение фигур, порознь или совместно, а также в соединении с отражением. В пространстве при совместном действии зеркал симметрические преобразования происходят вокруг осей — линий пересечения двух плоскостей — и вокруг центров — точек пересечения трех плоскостей. На поверхностях преобразования происходят вокруг центров — точек пересечения двух линий. Дальше будет показано, что наибольшее число зеркал, могущих действовать в одной системе, не превышает шести. Но уже при меньшем числе зеркал затруднительно перечислить все возможные случаи их комбинаций. Для упрощения этого подсчета можно воспользоваться специальным алгоритмом — симметрическим групповым оператором.

Пусть даны равноценные зеркала $A, B, C...$ Совместное действие нескольких зеркал есть операция: ABC — операция третьей

степени. Несколько операций образуют группу операций: $ABC \parallel CDE \parallel {}^1F$. Группы и операции обладают такими свойствами: буквы в операции можно переставлять:

$$ABC = ACB = BCA.$$

Две одинаковые буквы в одной и той же операции взаимно уничтожаются: $ABBC = AC$.

Операции в группе можно переставлять:

$$A \parallel BC \parallel AD \parallel BD = BC \parallel DB \parallel A \parallel DA.$$

Повторение операции в группе не меняет результатов:

$$CA \parallel A \parallel BC \parallel AC \parallel BC \parallel A = A \parallel BC \parallel AC.$$

Можно складывать операции в группе не меняя ее результата:

$$A \parallel B \parallel C \parallel AB \parallel ABC \parallel CA = A \parallel B \parallel C.$$

Операции и группы можно подвергать преобразованиям в целях упрощения. При преобразовании групп нужно стремиться к возможному понижению степени группы:

$$A \parallel B \parallel C \parallel AB \parallel DE \parallel ABF = A \parallel B \parallel C \parallel F \parallel DE.$$

Добавление к группе нового элемента дает новые группы. Пусть дана группа $A \parallel B \parallel CD \parallel CE$ из пяти зеркал и к ней добавляется шестое зеркало F . Его можно присоединить

к одной из групп 1-й степени		1-й случай
к одной из групп 2-й	"	2-й "
к двум группам 1-й	"	3-й "
к двум группам 2-й	"	4-й "
к одной группе 1-й	" и 1 группе 2-й степени	5-й "
к двум группам 1-й	" и 1 " 2-й "	6-й "
к одной группе 1-й	" и 2 " 2-й "	7-й "
к двум группам 1-й	" и 2 " 2-й "	8-й "
отдельно		9-й "

Итого . . . 9 случаев.

Следовательно, из одной группы получается в данном случае девять групп. При упрощениях может случиться, что некоторые из случаев совпадают. Также могут совпадать случаи, полученные от прибавления нового элемента к различным группам.

К одной букве A можно приставить вторую букву B только двумя способами:

1. $A \parallel B$
2. AB .

К первой группе можно приставить третью букву C тремя способами. Ко второй группе можно приставить третью букву двумя способами. Но из полученных 5 групп две совпадают; остается всего четыре:

- | | | | |
|--------------------------------|---------------------|----------------------|----------|
| 1. $A \parallel B \parallel C$ | 2. $A \parallel BC$ | 3. $AC \parallel BC$ | 4. ABC |
| 4 | 4 | 3 | 2 |

¹ Знак $\parallel$ указывает на раздельность операций.

Цифра под каждой группой означает число новых групп, получаемых из данной от прибавления к ней четвертой буквы *D*. Но из полученных 13 групп некоторые совпадают, и остается всего 8 различных групп:

- | | | | |
|--|-----|-----------------------------------|-----|
| 1. $A \parallel B \parallel C \parallel D$ | (5) | 5. $AB \parallel CD$ | (3) |
| 2. $A \parallel B \parallel CD$ | (6) | 6. $AB \parallel AC \parallel AD$ | (4) |
| 3. $A \parallel BD \parallel CD$ | (6) | 7. $AB \parallel ACD$ | (4) |
| 4. $A \parallel BCD$ | (4) | 8. $ABCD$ | (2) |

Цифры в скобках означают числа новых групп, получаемых от прибавления к данной группе новой буквы *E*. Всего получается 34 группы, но из них многие совпадают и остается 16 различных групп:

- | | | | |
|--|-----|-------------------------------------|-----|
| 1. $A \parallel B \parallel C \parallel D \parallel E$ | (6) | 9. $A \parallel BC \parallel BDE$ | (8) |
| 2. $A \parallel B \parallel C \parallel DE$ | (8) | 10. $ABC \parallel AD \parallel AE$ | (6) |
| 3. $A \parallel B \parallel CD \parallel CE$ | (9) | 11. $ABC \parallel AD \parallel BE$ | (6) |
| 4. $A \parallel BC \parallel BD \parallel BE$ | (8) | 12. $ABC \parallel DE$ | (4) |
| 5. $A \parallel BC \parallel DE$ | (6) | 13. $ABC \parallel ADE$ | (3) |
| 6. $AB \parallel AC \parallel AD \parallel AE$ | (5) | 14. $A \parallel BCDE$ | (4) |
| 7. $AB \parallel CD \parallel CE$ | (6) | 15. $AB \parallel BCDE$ | (4) |
| 8. $A \parallel B \parallel CDE$ | (6) | 16. $ABCDE$ | (2) |

От прибавления к данным группам новой буквы получается 91 группа, но вследствие совпадения некоторых групп число их сводится к 36:

- | | |
|--|--|
| 1. $A \parallel B \parallel C \parallel D \parallel E \parallel F$ | 19. $ABC \parallel AD \parallel AE \parallel AF$ |
| 2. $AB \parallel C \parallel D \parallel E \parallel F$ | 20. $ABC \parallel AD \parallel AE \parallel BF$ |
| 3. $AB \parallel AC \parallel D \parallel E \parallel F$ | 21. $ABC \parallel AD \parallel BE \parallel CF$ |
| 4. $AB \parallel AC \parallel AD \parallel E \parallel F$ | 22. $ABC \parallel DE \parallel F$ |
| 5. $AB \parallel CD \parallel E \parallel F$ | 23. $ABC \parallel AD \parallel AE \parallel F$ |
| 6. $AB \parallel AC \parallel AD \parallel AE \parallel F$ | 24. $ABC \parallel AD \parallel BE \parallel F$ |
| 7. $AB \parallel AC \parallel DE \parallel F$ | 25. $ABC \parallel CD \parallel E \parallel F$ |
| 8. $AB \parallel CD \parallel EF$ | 26. $ABC \parallel D \parallel E \parallel F$ |
| 9. $AB \parallel AC \parallel DE \parallel DF$ | 27. $ABCD \parallel AB EF$ |
| 10. $AB \parallel AC \parallel AD \parallel EF$ | 28. $ABCD \parallel AEF$ |
| 11. $AB \parallel AC \parallel AD \parallel AE \parallel AF$ | 29. $ABCD \parallel EF$ |
| 12. $ABC \parallel DEF$ | 30. $ABCD \parallel AE \parallel BF$ |
| 13. $ABC \parallel ADE \parallel BEF$ | 31. $ABCD \parallel AE \parallel AF$ |
| 14. $ABC \parallel ADE \parallel BF$ | 32. $ABCD \parallel AE \parallel F$ |
| 15. $ABC \parallel DEF \parallel AD$ | 33. $ABCD \parallel E \parallel F$ |
| 16. $ABC \parallel ADE \parallel F$ | 34. $ABCDE \parallel AF$ |
| 17. $ABC \parallel AD \parallel EF$ | 35. $ABCDE \parallel F$ |
| 18. $ABC \parallel DE \parallel EF$ | 36. $ABCDEF$ |

При нахождении групп предполагалось, что все входящие в них буквы однородны и что поэтому строение группы не изменяется от замены одной буквы другою. Но это верно только до тех пор, пока буквы не поделены на виды, отличающиеся

друг от друга. Например, если в группе $AB \parallel CD$ предположить, что буквы A_1 и A_2 принадлежат к одному виду, а буквы B_1 и B_2 — к другому виду, то группа $AB \parallel CD$ предстанет в двух вариантах: $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Таким образом в частных случаях неоднородности букв число групп может возрасти.

Пример. Прибавление четвертой буквы к группам из трех букв дает такие случаи (номера проставлены как в тексте; к буквам A_1B_1C прибавляется D):

<u>$A \parallel B \parallel C$ (4)</u>	<u>$A \parallel BC$ (4)</u>	<u>$AC \parallel BC$ (3)</u>	<u>ABC (2)</u>
1. $A \parallel B \parallel C \parallel D$	2. $A \parallel BC \parallel D$	3. $AC \parallel BC \parallel D$	4. $ABC \parallel D$
2. $AD \parallel B \parallel C$	5. $AD \parallel BC$	7. $ACD \parallel BC$	8. $ABCD$
3. $AD \parallel BD \parallel C$	4. $A \parallel BCD$	7. $ACD \parallel BCD =$	
4. $AD \parallel BD \parallel CD$	7. $AD \parallel BCD$	$= ACD \parallel AB$	

II. СИМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. СХЕМЫ ЦЕЛОЙ СИМЕТРИИ

Одно зеркало на плоскости дает два изображения (рис. 5). Два зеркала могут пересекаться или быть параллельными. В первом случае, подобно тому как это имеет место в симметрии на круге, угол между двумя прямыми должен составлять целую долю π (рис. 6). ● обозначается в розетке центр отражения. Во втором случае получается ряд изображений, подобный ряду на прямой линии (рис. 7).

К схемам на рис. 5 и 6 третью линию, пересекающуюся в том же центре или параллельную, добавить нельзя. Если даны на плоскости три линии, то они образуют треугольник (рис. 8).

В нем углы равны: $\frac{\pi}{a}$, $\frac{\pi}{b}$, $\frac{\pi}{c}$, причем a , b и c — целые числа. Из условия $\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c} = \pi$ получается уравнение $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, которое имеет всего пять решений:

№	a	b	c	Углы в треугольнике		
1	3	3	3	60°	60°	60°
2	2	4	4	90°	45°	45°
3	2	3	6	90°	60°	30°
4	2	2	∞	90°	90°	0°
5	1	∞	∞	180°	0°	0°

Эти решения дают следующие схемы:

1. Сеть из правильных треугольников (рис. 9).
2. Сеть из равнобедренных треугольников (рис. 10).
3. Сеть из разносторонних треугольников (рис. 11).
4. Двойной фриз (рис. 12).
5. Ординарный фриз (рис. 7).

Вершины A и B треугольника уходят в бесконечность (∞), стороны A и B сливаются, сторона C раздельна. Если три линии образуют треугольник, то к ним можно прибавить четвертую