

Е.С. Вентцель

Теория вероятностей.

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Е11

Е11 **Е.С. Вентцель**
Теория вероятностей. / Е.С. Вентцель – М.: Книга по Требованию, 2024. – 576 с.

ISBN 978-5-458-33038-1

Книга представляет собой учебник, предназначенный для лиц, знакомых с математикой в объёме обычного вузовского курса и интересующихся техническими приложениями теории вероятностей, в частности теорий стрельбы. Книга представляет также интерес для инженеров других специальностей, которым приходится применять теория вероятностей в их практической деятельности. От других учебников, предназначенных для той же категории читателей, книг отличается большим вниманием к важным для приложений новым ветвям теории вероятностей (например, теории вероятностных процессов, теории информации, теории массового обслуживания и др.)

ISBN 978-5-458-33038-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Глава 12. Законы распределения функций случайных аргументов	263
12.1. Закон распределения монотонной функции одного случайного аргумента	263
12.2. Закон распределения линейной функции от аргумента, подчиненного нормальному закону	266
12.3. Закон распределения немонотонной функции одного случайного аргумента	267
12.4. Закон распределения функции двух случайных величин	269
12.5. Закон распределения суммы двух случайных величин. Композиция законов распределения	271
12.6. Композиция нормальных законов	275
12.7. Линейные функции от нормально распределенных аргументов	279
12.8. Композиция нормальных законов на плоскости	280
Глава 13. Предельные теоремы теории вероятностей	286
13.1. Закон больших чисел и центральная предельная теорема	286
13.2. Неравенство Чебышева	287
13.3. Закон больших чисел (теорема Чебышева)	290
13.4. Обобщенная теорема Чебышева. Теорема Маркова	292
13.5. Следствия закона больших чисел: теоремы Бернулли и Пуассона	295
13.6. Массовые случайные явления и центральная предельная теорема	297
13.7. Характеристические функции	299
13.8. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных слагаемых	302
13.9. Формулы, выражающие центральную предельную теорему и встречающиеся при ее практическом применении	306
Глава 14. Обработка опытов	312
14.1. Особенности обработки ограниченного числа опытов. Оценки для неизвестных параметров закона распределения	312
14.2. Оценки для математического ожидания и дисперсии	314
14.3. Доверительный интервал. Доверительная вероятность	317
14.4. Точные методы построения доверительных интервалов для параметров случайной величины, распределенной по нормальному закону	324
14.5. Оценка вероятности по частоте	330
14.6. Оценки для числовых характеристик системы случайных величин	339
14.7. Обработка стрельб	347
14.8. Сглаживание экспериментальных зависимостей по методу наименьших квадратов	351
Глава 15. Основные понятия теории случайных функций	370
15.1. Понятие о случайной функции	370
15.2. Понятие о случайной функции как расширение понятия о системе случайных величин. Закон распределения случайной функции	374
15.3. Характеристики случайных функций	377
15.4. Определение характеристик случайной функции из опыта	383
15.5. Методы определения характеристик преобразованных случайных функций по характеристикам исходных случайных функций	385

15.6. Линейные и нелинейные операторы. Оператор динамической системы	388
15.7. Линейные преобразования случайных функций	393
15.8. Сложение случайных функций	399
15.9. Комплексные случайные функции	402
Глава 16. Канонические разложения случайных функций	406
16.1. Идея метода канонических разложений. Представление случайной функции в виде суммы элементарных случайных функций	406
16.2. Каноническое разложение случайной функции	410
16.3. Линейные преобразования случайных функций, заданных каноническими разложениями	414
Глава 17. Стационарные случайные функции	419
17.1. Понятие о стационарном случайном процессе	419
17.2. Спектральное разложение стационарной случайной функции на конечном участке времени. Спектр дисперсий	427
17.3. Спектральное разложение стационарной случайной функции на бесконечном участке времени. Спектральная плотность стационарной случайной функции	431
17.4. Спектральное разложение случайной функции в комплексной форме	438
17.5. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной системой	447
17.6. Применения теории стационарных случайных процессов к решению задач, связанных с анализом и синтезом динамических систем	454
17.7. Эргодическое свойство стационарных случайных функций	457
17.8. Определение характеристик эргодической стационарной случайной функции по одной реализации	462
Глава 18. Основные понятия теории информации	468
18.1. Предмет и задачи теории информации	468
18.2. Энтропия как мера степени неопределенности состояния физической системы	469
18.3. Энтропия сложной системы. Теорема сложения энтропий	475
18.4. Условная энтропия. Объединение зависимых систем	477
18.5. Энтропия и информация	481
18.6. Частная информация о системе, содержащаяся в сообщении о событии. Частная информация о событии, содержащаяся в сообщении о другом событии	489
18.7. Энтропия и информация для систем с непрерывным множеством состояний	493
18.8. Задачи кодирования сообщений. Код Шеннона — Фэно	502
18.9. Передача информации с искажениями. Пропускная способность канала с помехами	509
Глава 19. Элементы теории массового обслуживания	515
19.1. Предмет теории массового обслуживания	515
19.2. Случайный процесс со счетным множеством состояний	517
19.3. Поток событий. Простейший поток и его свойства	520
19.4. Нестационарный пуассоновский поток	527

19. 5. Поток с ограниченным последствием (поток Пальма) . . .	529
19. 6. Время обслуживания	531
19. 7. Марковский случайный процесс	537
19. 8. Система массового обслуживания с отказами. Уравнения Эрланга	540
19. 9. Установившийся режим обслуживания. Формулы Эрланга .	544
19.10. Система массового обслуживания с ожиданием	548
19.11. Система смешанного типа с ограничением по длине очереди	557
Приложение. Таблицы	561
Литература	573
Предметный указатель	574

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее издание по сравнению с первым внесены следующие изменения и дополнения: материал, касающийся теоремы Ляпунова и связанного с ней метода характеристических функций (прежние пп° 13.7—13.11) сокращен и изложен в более простой форме в новых пп° 13.7—13.9; изменено изложение вопросов, связанных с обработкой опытов (глава 14), в связи с чем вместо прежних пп° 14.1 и 14.2 вставлены новые пп° 14.1—14.5, а прежние пп° 14.3—14.5 сохранены под номерами 14.6—14.8 соответственно. Несколько изменен п° 5.9, посвященный закону Пуассона. Добавлены две новые главы: глава 18 «Основные понятия теории информации» и глава 19 «Элементы теории массового обслуживания» — касающиеся двух важных ветвей теории вероятностей, до сих пор почти не освещавшихся в учебной литературе. Изменен состав таблиц в «Приложении». Изменены некоторые примеры.

Автор выражает глубокую благодарность академику АН УССР Б. В. Гнеденко за ряд ценных указаний.

Е. Венцель

В настоящем, третьем издании существенных изменений нет. Произведены незначительные исправления и заменены некоторые примеры и задачи. Некоторые таблицы заменены другими. Слегка изменены в методическом отношении отдельные параграфы книги, например п°п° 5.9, 6.3, 9.4, 9.5 и 9.6. Существенно обновлено содержание п° 10.3.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга написана на базе лекций по теории вероятностей, читанных автором в течение ряда лет слушателям Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского, а также учебника автора по тому же предмету, изданного Академией ограниченным тиражом в 1952 г.

В настоящем издании первоначальный текст учебника подвергся весьма значительной переработке.

Книга рассчитана, в основном, на инженера, имеющего математическую подготовку в объеме обычного курса высших технических учебных заведений. При составлении книги автор ставил себе задачу изложить предмет наиболее просто и наглядно, не связывая себя рамками полной математической строгости. В связи с этим отдельные положения приводятся без доказательства (раздел о доверительных границах и доверительных вероятностях; теорема А. Н. Колмогорова, относящаяся к критерию согласия, и некоторые другие); некоторые положения доказываются не вполне строго (теорема умножения законов распределения; правила преобразования математического ожидания и корреляционной функции при интегрировании и дифференцировании случайной функции и др.).

Применяемый математический аппарат, в основном, не выходит за рамки нормального курса высшей математики, излагаемого в высших технических учебных заведениях; там, где автору приходится пользоваться менее общезвестными понятиями (например, понятием линейного оператора, матрицы, квадратичной формы и т. д.), эти понятия поясняются.

Книга снабжена большим количеством примеров, в ряде случаев — примерами расчетного характера, в которых применение излагаемых методов иллюстрируется на конкретном практическом материале и

доводится до численного результата. В связи с целевым назначением курса значительная часть примеров взята из области авиационной техники, воздушной стрельбы, бомбометания и теории боеприпасов. Ряд примеров относится к общей теории стрельбы. С этой точки зрения книга может быть особенно полезной для специалистов в области наземной, зенитной и морской артиллерии. Однако, несмотря на несколько специфический подбор примеров, иллюстративный материал, помещенный в книге, вполне понятен и для инженеров, работающих в других областях техники.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Е. Б. Дынину и профессору В. С. Пугачеву за ряд ценных указаний.

Е. Венцель

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предмет теории вероятностей

Теория вероятностей есть математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Условимся, что мы будем понимать под «случайным явлением». При научном исследовании различных физических и технических задач часто приходится встречаться с особыми типами явлениями, которые принято называть случайными. *Случайное явление* — это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Приведем примеры случайных явлений.

1. Производится стрельба из орудия, установленного под заданным углом к горизонту (рис. 1.1.1).

Пользуясь методами внешней баллистики (науки о движении снаряда в воздухе), можно найти теоретическую траекторию снаряда (кривая K на рис. 1.1.1). Эта траектория вполне определяется условиями стрельбы: начальной скоростью снаряда v_0 , углом бросания θ_0 и баллистическим коэффициентом снаряда c . Фактическая

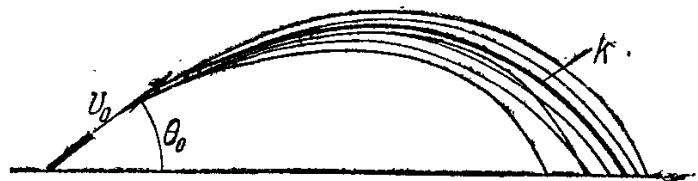


Рис. 1.1.1.

траектория каждого отдельного снаряда неизбежно несколько отклоняется от теоретической за счет совокупного влияния многих факторов. Среди этих факторов можно, например, назвать: ошибки изготовления снаряда, отклонение веса заряда от номинала, неоднородность структуры заряда, ошибки установки ствола в заданное положение, метеорологические условия и т. д. Если произвести несколько выстрелов при неизменных основных условиях (v_0 , θ_0 , c), мы получим не одну теоретическую траекторию, а целый пучок или «сноп» траекторий, образующий так называемое «рассеивание снарядов».

2. Одно и то же тело несколько раз взвешивается на аналитических весах; результаты повторных взвешиваний несколько отличаются друг от друга. Эти различия обусловлены влиянием многих

второстепенных факторов, сопровождающих операцию взвешивания, таких как положение тела на чашке весов, случайные вибрации аппаратуры, ошибки отсчета показаний прибора и т. д.

3. Самолет совершает полет на заданной высоте; теоретически он летит горизонтально, равномерно и прямолинейно. Фактически полет сопровождается отклонениями центра массы самолета от теоретической траектории и колебаниями самолета около центра массы. Эти отклонения и колебания являются случайными и связаны с турбулентностью атмосферы; от раза к разу они не повторяются.

4. Производится ряд подрывов осколочного снаряда в определенном положении относительно цели. Результаты отдельных подрывов несколько отличаются друг от друга: меняются общее число осколков, взаимное расположение их траекторий, вес, форма и скорость каждого отдельного осколка. Эти изменения являются случайными и связаны с влиянием таких факторов, как неоднородность металла корпуса снаряда, неоднородность взрывчатого вещества, непостоянство скорости детонации и т. п. В связи с этим различные подрывы, осуществленные, казалось бы, в одинаковых условиях, могут приводить к различным результатам: в одних подрывах цель будет поражена осколками, в других — нет.

Все приведенные примеры рассмотрены здесь под одним и тем же углом зрения: подчеркнуты случайные вариации, неодинаковые результаты ряда опытов, основные условия которых остаются неизменными. Эти вариации всегда связаны с наличием каких-то второстепенных факторов, влияющих на исход опыта, но не заданных в числе его основных условий. Основные условия опыта, определяющие в общих и грубых чертах его протекание, сохраняются неизменными; второстепенные — меняются от опыта к опыту и вносят случайные различия в их результаты.

Совершенно очевидно, что в природе нет ни одного физического явления, в котором не присутствовали бы в той или иной мере элементы случайности. Как бы точно и подробно ни были фиксированы условия опыта, невозможно достигнуть того, чтобы при повторении опыта результаты полностью и в точности совпадали.

Случайные отклонения неизбежно сопутствуют любому закономерному явлению. Тем не менее в ряде практических задач этими случайными элементами можно пренебречь, рассматривая вместо реального явления его упрощенную схему, «модель», и предполагая, что в данных условиях опыта явление протекает вполне определенным образом. При этом из бесчисленного множества факторов, влияющих на данное явление, выделяются самые главные, основные, решающие; влиянием остальных, второстепенных факторов просто пренебрегают. Такая схема изучения явлений постоянно применяется в физике, механике, технике. При пользовании этой схемой для решения любой задачи прежде всего выделяется основной круг учи-

тываемых условий и выясняется, на какие параметры задачи они влияют; затем применяется тот или иной математический аппарат (например, составляются и интегрируются дифференциальные уравнения, описывающие явление); таким образом выявляется основная закономерность, свойственная данному явлению и дающая возможность предсказать результат опыта по его заданным условиям. По мере развития науки число учитываемых факторов становится все больше; явление исследуется подробнее; научный прогноз становится точнее.

Однако для решения ряда вопросов описанная схема — классическая схема так называемых «точных наук» — оказывается плохо приспособленной. Существуют такие задачи, где интересующий нас исход опыта зависит от столь большого числа факторов, что практически невозможно зарегистрировать и учесть все эти факторы. Это — задачи, в которых многочисленные второстепенные, тесно переплетающиеся между собой случайные факторы играют заметную роль, а вместе с тем число их так велико и влияние столь сложно, что применение классических методов исследования себя не оправдывает.

Рассмотрим пример. Производится стрельба по некоторой цели C из орудия, установленного под углом θ_0 к горизонту (рис. 1.1.2). Траектории снарядов, как было указано выше, не совпадают между собой; в результате точки падения снарядов на земле рассеиваются.

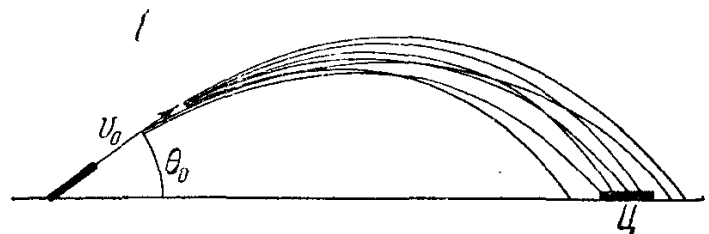


Рис. 1.1.2.

Если размеры цели велики по сравнению с областью рассеивания, то этим рассеиванием, очевидно, можно пренебречь: при правильной установке орудия любой выпущенный снаряд попадает в цель. Если же (как обычно и бывает на практике) область рассеивания снарядов превышает размеры цели, то некоторые из снарядов в связи с влиянием случайных факторов в цель не попадут. Возникает ряд вопросов, например: какой процент выпущенных снарядов в среднем попадает в цель? Сколько нужно потратить снарядов для того, чтобы достаточно надежно поразить цель? Какие следует принять меры для уменьшения расхода снарядов?

Чтобы ответить на подобные вопросы, обычная схема точных наук оказывается недостаточной. Эти вопросы органически связаны со случайной природой явления; для того чтобы на них ответить, очевидно, нельзя просто пренебречь случайностью, — надо изучить случайное явление рассеивания снарядов с точки зрения закономерностей, присущих ему именно как случайному явлению. Надо исследовать закон, по которому распределяются точки падения снарядов;

нужно выяснить случайные причины, вызывающие рассеивание, сравнить их между собой по степени важности и т. д.

Рассмотрим другой пример. Некоторое техническое устройство, например система автоматического управления, решает определенную задачу в условиях, когда на систему непрерывно воздействуют случайные помехи. Наличие помех приводит к тому, что система решает задачу с некоторой ошибкой, в ряде случаев выходящей за пределы допустимой. Возникают вопросы: как часто будут появляться такие ошибки? Какие следует принять меры для того, чтобы практически исключить их возможность?

Чтобы ответить на такие вопросы, необходимо исследовать природу и структуру случайных возмущений, воздействующих на систему, изучить реакцию системы на такие возмущения, выяснить влияние конструктивных параметров системы на вид этой реакции.

Все подобные задачи, число которых в физике и технике чрезвычайно велико, требуют изучения не только основных, главных закономерностей, определяющих явление в общих чертах, но и анализа случайных возмущений и искажений, связанных с наличием второстепенных факторов и придающих исходу опыта при заданных условиях элемент неопределенности.

Какие же существуют пути и методы для исследования случайных явлений?

С чисто теоретической точки зрения те факторы, которые мы условно назвали «случайными», в принципе ничем не отличаются от других, которые мы выделили в качестве «основных». Теоретически можно неограниченно повышать точность решения каждой задачи, учитывая все новые и новые группы факторов: от самых существенных до самых ничтожных. Однако практически такая попытка одинаково подробно и тщательно проанализировать влияние решительно всех факторов, от которых зависит явление, привела бы только к тому, что решение задачи, в силу непомерной громоздкости и сложности, оказалось бы практически неосуществимым и к тому же не имело бы никакой познавательной ценности.

Например, теоретически можно было бы поставить и решить задачу об определении траектории вполне определенного снаряда, с учетом всех конкретных погрешностей его изготовления, точного веса и конкретной структуры данного, вполне определенного порохового заряда при точно определенных метеорологических данных (температура, давление, влажность, ветер) в каждой точке траектории. Такое решение не только было бы необозримо сложным, но и не имело бы никакой практической ценности, так как относилось бы только к данному конкретному снаряду и заряду в данных конкретных условиях, которые практически больше не повторятся.

Очевидно, должна существовать принципиальная разница в методах учета основных, решающих факторов, определяющих в главных