

К. Бате

**Численные методы анализа и метод
конечных элементов**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
К11

К11 **К. Бате**
Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате – М.: Книга по Требованию, 2023. – 445 с.
ISBN 978-5-458-28582-7

ISBN 978-5-458-28582-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ку. Я также хочу поблагодарить Стива Кеннея за оказанную мне помощь в решении задач, Элин Франкль, которая проделала огромную работу по перепечатке рукописи, Билла Грейса за помощь, оказанную мне во время окончания работы и Розалию Херн — редактора книги, за ее терпение и прилежание. Наконец, особой благодарности заслуживает моя жена Зорка, которая своей любовью и терпением поддерживала меня в работе над книгой.

К.-Ю. Бате

Массачусетский технологический институт

В развитии метода конечных элементов принимали участие исследователи в области строительной механики и прикладной математики. В период с 1850 по 1860 гг. была разработана теория кручения и изгиба балок и тем самым заложены основы науки по расчету конструкций. В течение последующих 100 лет расчет конструкций основывался на изучении систем, содержащих одномерные элементы. В середине 1950 г. в авиастроении разработан двумерный элемент. Он был создан для того, чтобы улучшить моделирование всей конструкции путем учета работы мембранных элементов.

В 1960 г. Клафф впервые ввел понятие "конечный элемент" в статье "Использование метода конечных элементов для исследования плоского напряженного состояния". Метод был распространен на решение задач механики сплошных сред.

В 1909 г. Ритц разработал эффективный метод приближенного решения задач механики сплошных сред. Он включает в себя аппроксимацию функционала энергии с помощью известных функций с неизвестными коэффициентами. Минимизация функционала в отношении каждого неизвестного приводит к системе уравнений из которых могут быть определены неизвестные коэффициенты. Одно из основных ограничений метода Ритца состоит в том, что используемые функции должны удовлетворять граничным условиям задачи.

В 1943 г. Курант значительно расширил возможность метода Ритца путем введения специальных линейных функций на треугольных областях и применил метод к решению задач кручения. В качестве неизвестных были выбраны значения функций в узловых точках треугольных областей. Таким образом, основное ограничение, накладываемое на функции Ритца, в отношении удовлетворения граничным условиям было устранено. Метод Ритца с модификацией Куранта аналогичен методу конечных элементов, который независимо предложил Клафф много лет спустя. Основная причина, по которой метод конечных элементов получил огромное распространение в 1960 гг. заключается в том, что присущий данному методу большой объем вычислительных операций может быть выполнен только с помощью ЭВМ, тогда как в 1943 г. Курант не имел такой возможности.

В середине 1960-х гг. исследователи в области механики твердого тела и строительной механики показали, что модифицированный метод Ритца и метод конечных элементов совпадают, и в течение следующего десятилетия развитие и применение метода прогрессировало значительными темпами. Метод конечных элементов применялся для решения пространственных задач, задач с учетом физической и геометрической нелинейности, задач, зависящих от времени, и задач в различных областях, не связанных с расчетом конструкций, таких, как гидродинамика, теплопередача и теория поля. Некоторые сведения по истории метода приведены в третьей главе.

Успешное решение задач методом конечных элементов зависит от программного обеспечения, при разработке которого необходимо основываться на трех основных положениях. Во-первых, аппроксимации, используемые для представления свойств различных конечных элементов, должны быть основаны на общих принципах механики сплошных сред. Во-вторых, численные методы, выбранные для интегрирования, решения уравнений, решения проблемы собственных значений, должны быть точны и эффективны. В-третьих, реализация на ЭВМ используемых вычислительных методов должна быть проведена с особой тщательностью для минимизации числа операций и оптимального использования оперативной и внешней памяти. Цель книги — дать необходимые знания во всех трех областях.

Разработка новых конечных элементов, численных методов и практических программ для ЭВМ была областью моих исследований в течение последних 15 лет. Результаты их отражены в книге. Последние годы сфера моих исследований была значительно расширена, что вызвано сотрудничеством с Клаусом-Юргеном Бате.

Е.Л. Вилсон

Калифорнийский университет, Беркли

МАТРИЦЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ГЛАВА 1

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ

1.1. Введение

Практическое использование метода конечных элементов основано на применении матричной алгебры и электронных вычислительных машин.

Целью данной главы является краткое ознакомление с основами матричной алгебры, которые необходимы для реализации рассматриваемых в книге вычислительных методов [1—3]. Для правильного понимания метода конечных элементов необходимо также знание основ линейной алгебры, краткие сведения о которых приводятся в гл. 2.

Обычно целью метода конечных элементов является вычисление перемещений большого количества точек рассматриваемой конструкции. Аппарат матричной алгебры позволяет при известных физических соотношениях между перемещениями конструкции и прикладываемыми нагрузками записать весь процесс решения в несколько строк с использованием ограниченного количества символов. Хотя вычислительный процесс с использованием матриц и матричных операций может быть представлен достаточно просто, однако для создания эффективных алгоритмов необходимо уметь детализировать операции, из которых состоит решение, записанное в матричной форме.

1.2. Матрицы

Целесообразность использования матриц в практике вычислений можно показать на простом примере, рассмотрев систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Запись этой же системы уравнения в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

По сравнению с системой (1.1) равенство (1.2) более логично, так как коэффициенты 5, -4, 1 и т.д., стоящие перед неизвестными x_1 , x_2 и x_3 , объединены в один массив, а сами неизвестные и величины, стоящие в правой части системы уравнений (1.1), сгруппированы в два других массива. Хотя оба равенства записаны различно, но выражение (1.2) читается так же, как и система (1.1).

Используя матричную символику для обозначения массивов, систему уравнений (1.2) можно записать в виде

$$Ax = b, \quad (1.3)$$

где A — матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений; x — матрица неизвестных; b — матрица известных величин.

В выражении (1.3) обозначено

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Формальное определение матриц приведено ниже.

Определение. Матрицей называется упорядоченный массив чисел. В общем случае матрица содержит mn чисел, объединенных в m строк и n столбцов, и представляет собой массив вида

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Говорят, что эта матрица имеет порядок $m \times n$ (m на n). Матрица A называется вектором в тех случаях, когда она состоит только из одной строки ($m=1$) или одного столбца ($n=1$).

В тексте книги для выделения матриц и векторов будет использован жирный шрифт.

Рассматривая приведенные ниже массивы

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5,3 \\ 3 & 2,1 & 6 \end{bmatrix}; \quad [6,1 \quad 2,2 \quad 3], \quad (1.6)$$

мы видим, что они являются матрицами, причем первый и последний массив соответственно можно назвать вектором-столбцом и вектором-строкой.

Произвольный элемент матрицы A , стоящий на пересечении i -той строки и j -го столбца, обозначается в виде a_{ij} . Например, для первой

матрицы в обозначениях (1.4) $a_{11}=5$ и $a_{21}=-4$.

Рассматривая элемент a_{ij} в равенстве (1.5), мы видим, что индекс i принимает значения от 1 до m , а индекс j — от 1 до n . Заметим, что запятая между индексами ставится в тех случаях, когда во избежание недоразумений необходимо отделить один индекс от другого, например $a_{1,1}, a_{1,2}$.

Целесообразность применения матриц заключена в том, что можно обозначать и преобразовывать массивы, содержащие большое количество чисел, используя простую символику. В этом случае взаимосвязь между большими массивами становится четкой, а вычисления осуществляются с использованием однообразных операций, которые могут быть выполнены на ЭВМ. При этом необходимо четко определить все переменные, участвующие в расчете, разработать алгоритмы вычисления элементов матриц и детально проанализировать вопросы реализации этих алгоритмов на ЭВМ.

1.3. Виды матриц

Считается, что матрица имеет особую форму, если расположение ее элементов подчиняется определенному закону. Матрица, элементы которой являются действительными числами, называется действительной матрицей. Матрица, элементы которой могут быть комплексными, называется комплексной матрицей. В дальнейшем нам будут встречаться только действительные матрицы. Кроме того, эти матрицы часто будут оказываться симметричными.

Определение. Транспонированной матрицей A^T называется матрица, полученная из матрицы A порядка $m \times n$ путем взаимной смены строк и столбцов. Если $A = A^T$, то количество строк и столбцов матрицы A одинаково и $a_{ij} = a_{ji}$. В случае $m = n$ матрицу A называют квадратной матрицей порядка n . Кроме того, если $a_{ij} = a_{ji}$, то такую матрицу называют симметричной матрицей. Заметим, что если матрица A симметрична, то A одновременно является и квадратной матрицей. Обратное утверждение не всегда верно, так как квадратная матрица не обязательно должна быть симметричной.

В качестве примера симметричной матрицы сошлемся на равенство (1.2), в котором матрица коэффициентов A является симметричной. В том, что $A^T = A$, можно убедиться путем простой проверки равенства $a_{ij} = a_{ji}$ для $i, j = 1, \dots, 4$.

Еще одной матрицей особого вида является единичная матрица I_n . Матрица I_n — квадратная матрица порядка n , у которой диагональные элементы равны единице, а все остальные элементы нулевые. Единичная матрица третьего порядка приведена ниже

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Очень часто порядок единичной матрицы опускается и индекс у матрицы I не пишется. По аналогии с единичной матрицей в практике вычислений используется понятие единичный вектор порядка n , который обозначается в виде e_i , где индекс i показывает, что этот вектор является i -тым столбцом единичной матрицы.

В дальнейшем нам очень часто придется встречаться с симметричными ленточными матрицами, у которых все элементы, расположенные за ограничивающими ленту линиями, равны нулю.

Симметричная матрица является ленточной при условии

$$a_{ij} = 0 \text{ для } j > i + m_A, \quad (1.8)$$

где $2m_A + 1$ — ширина ленты матрицы A .

В качестве примера приведем следующую матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Эта матрица является симметричной ленточной матрицей пятого порядка с шириной полуленты m_A , равной 2. Если ширина полуленты равна нулю, то все ненулевые элементы матрицы лежат на главной диагонали, а сама матрица называется диагональной матрицей. Заметим, что единичная матрица является одновременно диагональной.

При решении задач на ЭВМ используются различные схемы расположения элементов матриц в оперативной памяти. Для программ, написанных на языке FORTRAN, обычный путь представления элементов матрицы A порядка $m \times n$ в памяти заключен в выделении части этой памяти в массив $A(M, N)$, где $M = m$ и $N = n$, и хранении каждого элемента a_{ij} в ячейке памяти $A(I, J)$. Однако во многих случаях такое представление массивов в памяти приводит к хранению большого количества лишних нулевых элементов, которые могут не потребоваться для вычислений. Кроме того, если матрица A является симметричной, то необходимо использовать это свойство матрицы A и хранить в памяти только ее верхнюю половину вместе с диагональными элементами. Обычно для хранения элементов матриц выделяется ограниченная память и поэтому необходимо стремиться к эффективному использованию отведенной памяти для хранения матриц максимально возможного размера. В тех случаях, когда матрица достаточно велика и не помещается в отведенной части оперативной памяти, процесс решения задачи значительно усложняется и должен включать в себя операции обмена с внешней памятью.

Отметим, что в методе конечных элементов большая часть матриц является ленточными и симметричными, что позволяет при эффективной схеме хранения расположить в оперативной памяти матрицы более высокого порядка.

Обозначим $A(I)$ — i -тый элемент одномерного массива в памяти. Диагональная матрица порядка n может быть представлена в памяти так, как показано на рис. 1.1:

$$A(I) = a_{ii}; \quad I = i = 1, \dots, n. \quad (1.10)$$

Рассмотрим ленточную матрицу, приведенную на рис. 1.1. Заметим, что все ее элементы, лежащие вне граничных линий, равны нулю. Позже

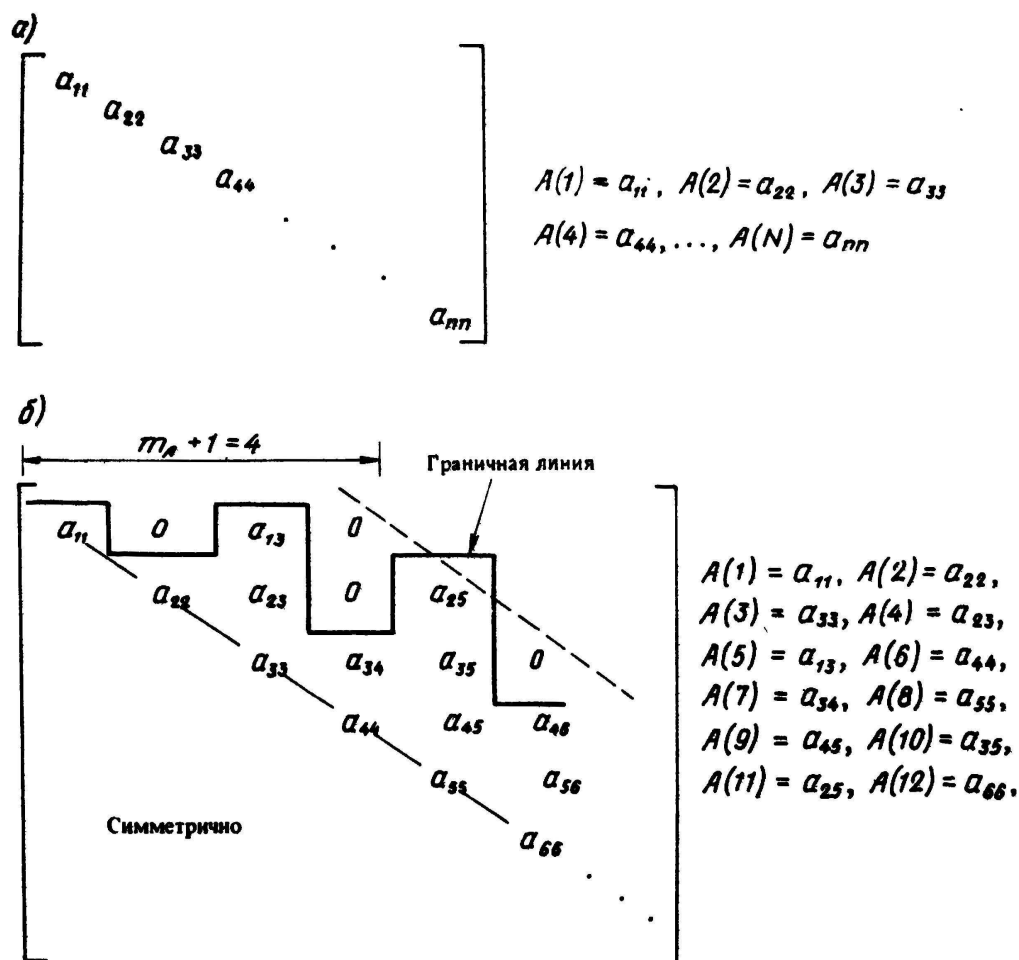


Рис. 1.1. Расположение элементов матрицы A в одномерном массиве
 а — диагональная матрица; б — ленточная матрица, $m_n = 3$

(см. разд. 7.2.3) будет показано, что нулевые элементы, лежащие между граничными линиями, могут преобразоваться в процессе обработки в ненулевые. Так, например, a_{35} может быть нулевым элементом, который в процессе решения системы уравнений будет преобразован к ненулевому значению. Таким образом, для ленточных матриц необходимо отводить память для всех элементов, лежащих между граничной линией и диагональю, и нет необходимости в выделении памяти для хранения нулевых элементов, лежащих за граничной линией. Схема расположения коэффициентов системы уравнений, которая в дальнейшем будет использована для решения задач методом конечных элементов, приведена на рис. 1.1 и будет пояснена в разд. 6.2.3.

1.4. Равенство матриц, сложение и умножение на скаляр

Для того чтобы выполнить операции с матрицами необходимо определить ряд правил, руководствуясь которыми можно производить непосредственные вычисления. Некоторые из этих правил приводятся в данном разделе.

Определение. Две матрицы A и B равны только в том случае, когда они имеют одинаковое количество строк и столбцов, а соответст-

вующие элементы матриц равны друг другу ($a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j).

Определение. Две матрицы **A** и **B** могут быть сложены только в том случае, когда они имеют одинаковое количество строк и столбцов. Сложение матриц выполняется путем сложения соответствующих элементов. Если через a_{ij} и b_{ij} обозначены элементы матриц **A** и **B**, то $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ является элементом матрицы результата **C**, где $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Очевидно, что матрица **C** имеет равное количество строк и столбцов с матрицами **A** и **B**.

Пример 1.1

Вычислить $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0,5 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выполняя сложение соответствующих элементов матриц, будем иметь

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2,5 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычитание матриц производится аналогично.

Пример 1.2

Вычислить $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ для **A** и **B** из прим. 1.1. В этом случае

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1,5 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что разность равных матриц содержит только нулевые элементы. Такая матрица обозначается символом **0** и называется нулевой матрицей.

Определение. Умножение матрицы на скаляр осуществляется путем умножения каждого элемента матрицы на скаляр. Равенство $\mathbf{C} = k\mathbf{A}$ означает, что $c_{ij} = k a_{ij}$.

Пример 1.3

Вычислить $\mathbf{C} = k\mathbf{A}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0,5 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad k = 2.$$

В соответствии с определением будем иметь

$$\mathbf{C} = k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.5. Умножение матриц

Определение. Две матрицы **A** и **B** могут быть умножены друг на друга для получения произведения $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ только в том случае, когда количество столбцов матрицы **A** равно количеству строк матрицы **B**. Предположим, что **A** имеет порядок $p \times m$, а **B** — порядок $m \times q$, тогда каждый элемент матрицы **C** может быть вычислен по формуле

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj}, \quad (1.11)$$

а матрица C будет иметь порядок $p \times q$.

Анализируя формулу (1.11), можно заметить, что для вычисления элемента c_{ij} необходимо умножить элементы i -той строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B и сложить полученные произведения, а для вычисления всех элементов матрицы C необходимо подобным образом умножить каждую строку матрицы A на каждый столбец матрицы B .

Пример 1.4

Вычислить произведение матриц $C = AB$, где

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Получим элементы первого столбца матрицы C

$$c_{11} = (5)(1) + (3)(2) + (1)(3) = 14;$$

$$c_{21} = (4)(1) + (6)(2) + (2)(3) = 22;$$

$$c_{31} = (10)(1) + (3)(2) + (4)(3) = 28.$$

Вычисляя аналогичным путем остальные элементы, будем иметь

$$C = \begin{bmatrix} 14 & 39 \\ 22 & 48 \\ 28 & 70 \end{bmatrix}.$$

Осуществляя практические вычисления, можно уменьшить суммарное количество выполненных операций за счет учета нулевых элементов.

Пример 1.5

Вычислить произведение $c = Ab$, где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Учитывая структуру матрицы A , вычислим все элементы вектора c следующим образом

$$c_1 = (2)(4) + (-1)(1) = 7;$$

$$c_2 = (-1)(4) + (2)(1) + (-1)(2) = -4;$$

$$c_3 = (-1)(1) + (2)(2) + (-1)(3) = 0;$$

$$c_4 = (-1)(2) + (1)(3) = 1.$$

Следовательно,

$$c = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Известно, что умножение обычных чисел является коммутативной операцией, т.е. $ab = ba$. Проверим справедливость этого свойства для операции умножения матриц. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

и вычислим произведения AB и BA

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}; \quad BA = [11]. \quad (1.13)$$

Анализируя полученные результаты, убеждаемся в том, что матрицы AB и BA различны и, следовательно, операция умножения матриц не является коммутативной. Действительно, в зависимости от порядка исходных матриц A и B , порядок матриц результата AB и BA может быть различен, а для некоторых матриц A и B произведение AB может быть вычислено, в то время как произведение BA не существует.

При определении порядка умножения матриц в произведении AB говорят, что матрица A справа умножается на матрицу B или, что то же самое, матрица B слева умножается на матрицу A . Хотя в общем случае $AB \neq BA$, для некоторых матриц A и B может случиться, что $AB = BA$.

В этом случае говорят, что в произведении AB матрицы A и B коммутативны.

Хотя операция умножения матриц не обладает переместительными свойствами, два других свойства, сочетательное и распределительное, существуют. Распределительное свойство операции умножения по отношению сложения заключено в том, что

$$E = (A + B)C = AC + BC. \quad (1.14)$$

Другими словами, для получения матрицы E можно сначала сложить матрицы A и B , а затем умножить полученный результат на C , но можно поступить и иначе: сначала умножить A на C , затем B на C и сложить полученные результаты. Заметим, что первый путь более экономичен, так как требует выполнения меньшего числа операций.

Распределительное свойство доказывается с помощью определения (1.11). Действительно, вычисляя

$$e_{ij} = \sum_{r=1}^m (a_{ir} + b_{ir}) c_{rj}, \quad (1.15)$$

получим

$$e_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} c_{rj} + \sum_{r=1}^m b_{ir} c_{rj}. \quad (1.16)$$

Сочетательное свойство операции умножения заключено в том, что

$$G = (AB)C = A(BC) = ABC, \quad (1.17)$$

или, другими словами, что последовательность выполнения операций умножения безразлична. Доказательство этого свойства основывается на определении (1.11) и вычислении произвольного элемента матрицы G .

Отметим, что при вычислении произведения нескольких матриц разумный выбор последовательности операций умножения может привести к уменьшению их количества.

Пример 1.6

Вычислить A^4 , где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Один путь получения A^4 основан на последовательном вычислении степеней матрицы

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}; \\ A^3 &= A^2 A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}; \\ A^4 &= A^3 A = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 75 \\ 75 & 125 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

С другой стороны, можно использовать

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 75 \\ 75 & 125 \end{bmatrix}$$

и избежать выполнения одного матричного умножения.

Пример 1.7

Вычислить произведение $v^T A v$, где

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}; \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Обычно, сначала вычисляется произведение $x = Av$

$$x = Av = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix},$$

а затем произведение $v^T x$, что дает окончательный результат

$$v^T A v = [1 \ 2 \ -1] \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} = 23.$$

Рассмотрим более эффективный путь получения требуемого произведения. Во-первых, представим матрицу A в виде суммы трех матриц $A = U + D + U^T$, где

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, имеем