Доклады Академии наук СССР

Новая серия. Том 33. № 4-9

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 93
ББК 63.3
Д63

Д63 Доклады Академии наук СССР: Новая серия. Том 33. № 4-9 / – М.: Книга по Требованию, 2023. – 260 с.

ISBN 978-5-458-54181-7

ISBN 978-5-458-54181-7

Доклады Академии Наук СССР
1941. Том XXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. МЕЙМАН

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 VIII 1941)

1°. Пусть D — конечная область n-мерного пространства, ограниченная $(n-1)$-мерной гиперповерхностью S. Относительно S предполагается, что в каждой ее точке можно выбрать такую касательно-нормальную систему координат $(x_1, \ldots, x_{n-1}; z)$, что в окрестности этой точки уравнение S имеет вид $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, где $f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ имеет все непрерывные производные до порядка m включительно, и производные порядка m подчиняются условию Hölder'а с показателем ε, не зависящим от точки. Такие поверхности будем называть типа $H_{m,\varepsilon}$.

Зададим на S m функций φ_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$. Пусть φ_μ допускает вдоль S непрерывные производные до порядка $m-\mu$ включительно, и производные порядка $m-\mu$ подчиняются условию Hölder'а с показателем ε. Такие функции будем называть функциями типа $H_{m-\mu,\varepsilon}$.

Основная теорема. *Существует одна и только одна регулярная функция $u(Q)$, удовлетворяющая в области D m-гармоническому уравнению $\Delta^m u = 0$, где $\Delta^m u = \sum\limits_{\Sigma\alpha = m} \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_1^{2\alpha_1} \ldots \partial x_n^{2\alpha_n}}$, и такая, что при стремлении внутренней точки Q области D к точке P поверхности S, функция u и ее первые $m-1$ нормальных производных равномерно стремятся к значениям $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ в точке P*

$$\lim_{Q\to P} u(Q) = \varphi_1(P), \quad \lim_{Q\to P} \frac{\partial}{\partial \nu_P} u(Q) = \varphi_2(P), \; \ldots, \lim_{Q\to P} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \nu_P^{m-1}} u(Q) = \varphi_m(P). \quad (1)$$

Условия регулярности, упоминаемые в теореме, могут быть разными и выбираются так, чтобы имела место теорема единственности для решения уравнения $\Delta^m u = 0$, подчиняющегося условию (1). Например, теорема единственности имеет место, если рассматривать класс функций с ограниченными в области D производными до порядка $2m-1$ включительно. В этом случае единственность доказывается элементарным путем с помощью обобщенной формулы Грина([1]). В качестве условия регулярности можно также взять требование существования интеграла

$$D_m(u) = \int \overset{n}{\underset{(D)}{\cdots}} \int \sum_{\Sigma\alpha = m} \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 d\tau. \qquad (2)$$

В этом случае теорема единственности имеет место даже при стремлении функции $u(Q)$ и ее первых производных к граничным данным в среднем [2]. С. Л. Соболев [2] решил проблему существования и единственности для полигармонических уравнений при значительно меньших предположениях (основное, что граница области D может состоять из многообразий разной размерности $D = S_{n-1} + S_{n-2} + \ldots + S_0$). Однако С. Л. Соболев решал несколько иную задачу: он рассматривал не точечное стремление функции и ее первых производных к граничным данным, а стремление в среднем. Ясно, что требования известной гладкости границы и данных, необходимых по существу вопроса при равномерном точечном стремлении, становятся излишними при стремлении в среднем.

В отличие от С. Л. Соболева, решившего задачу вариационными методами, я пользуюсь методами теории потенциала, а именно для m-кратного оператора Лапласа удалось построить m ядер, играющих в точности ту роль, которую играет потенциал двойного слоя в обычной задаче Дирихле.

2°. Пусть Q — точка области D, P_1 — точка поверхности S, ν_{P_1} — внутренняя нормаль в точке P_1, r_{P_1Q} — расстояние между точками P_1 и Q. Выражение

$$K_{m,\mu}(P_1, Q) = \frac{\cos^{2m-\mu}(r_{P_1Q}, \nu_{P_1})}{r_{P_1Q}^{n-\mu}} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

будем называть μ-ым ядром m-гармонического оператора.

Лемма 1. *Ядро $K_{m,\mu}(P_1, Q)$, рассматриваемое как функция от координат точки $Q(x_1, \ldots, x_{n-1}, z)$, удовлетворяет m-гармоническому уравнению, т. е. $\Delta^m K_{m,\mu} = 0$.*

Доказательство нужно вести при помощи индукции; предполагаем, что для $K_{1,1}$, $K_{2,\mu}$, ..., $K_{m-1,\mu}$ лемма доказана. В качестве системы координат выберем касательно-нормальную систему в точке P_1. Тогда $K_{m,\mu}(P_1, Q) = z^{m-1} \dfrac{z^{m-(\mu-1)}}{r_{P_1Q}^{2(m-\mu)+n}}$ и следовательно

$$\Delta^m z^{m-1} \frac{\partial^{m-\mu}}{\partial z^{m-\mu}} \frac{z}{r_{P_1Q}^n} = C_0 \Delta^m K_{m,\mu} + C_1 \Delta^m K_{m-1,\mu} + \ldots + \\ + C_l \Delta^m K_{m-l,\mu} + \ldots, \tag{4}$$

где C — константы и $C_0 \neq 0$. Так как $\dfrac{\partial^{m-\mu}}{\partial z^{m-\mu}} \dfrac{z}{r^n}$ — гармоническая функция, то левая часть (4) равна нулю, что доказывает лемму.

Нормальные производные от ядер $K_{m,\mu}(P_1 Q)$ имеют разный вид для нечетно-мерных и четно-мерных пространств. А именно

$$\frac{\partial^i}{\partial \nu_P^i} K_{m,\mu}(P_1, Q) = \frac{i!\,(2m-\mu)!}{(2k+2m-2\mu-1)!!} \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^i}{(i-j)!\,(2m-\mu-i+j)!} \times \\ \times \cos^{i-j}(\nu_P, \nu_{P_1}) \frac{\cos^{2m+j-\mu-i}(r_{P_1Q}, \nu_{P_1})}{r_{P_1Q}^{n+i-\mu}} P_{k+m-\mu+j}^{k+m-\mu} [\cos(r_{P_1Q}, \nu_P)] \tag{5}$$

в случае $n=2k+1$ *, и

$$\frac{\partial^i}{\partial\nu_P^i}K_{m,\mu}(P_1,Q)=\frac{i!\,(2m-\mu)!}{(k+m-\mu-1)!}\sum_{j=0}^{i}\frac{i!}{(i-j)!\,(2m-\mu-i+j)!}\cos^{i-j}(\nu_P,\nu_{P_1})\times$$

$$\times\frac{\cos^{2m-\mu-i+j}(r_{P_1Q},\nu_{P_1})}{r_{P_1Q}^{n+i-\mu}}\sum_{\substack{\beta+\gamma=j\\0\leqslant\gamma\leqslant\beta}}(-1)^\beta\frac{(k+m-\mu+\beta-1)!}{\gamma!}\times$$

$$\times 2^{\beta-\gamma}\cos^{\beta-\gamma}(r_{P_1Q},\nu_P)\tag{6}$$

в случае $n=2k$.

Пусть точка Q изнутри стремится к точке P гиперповерхности S. Тогда под символом $[F(P)]$ будем понимать результат подстановки в $F(Q)$ вместо Q точки P.

Формулы (5) и (6) дают возможность доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Если $\psi(P_1)$ — ограниченная интегрируемая по гиперповерхности S функция, то интеграл*

$$\Phi(P)=\int\limits_{(S)}\psi(P_1)\left[\frac{\partial^i}{\partial\nu_P^i}K_{m,\mu}(P_1,P)\right]dP_1\tag{7}$$

является функцией от точки P типа H_{l,ε_1}, если только S — гиперповерхность типа $H_{l+1,\varepsilon}$ и $l\leqslant 2(m-1-i)$.

3°. Рассмотрим интегралы типа потенциалов

$$J_\mu(Q)=\int\limits_{(S)}\psi_\mu(P_1)\,K_{m,\mu}(P_1,Q)\,dP_1.\tag{8}$$

Опираясь на лемму 2, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если S — гиперповерхность типа $H_{m,\varepsilon}$, а ψ_μ — функция типа $H_{m-\mu,\varepsilon}$, то при стремлении точки Q по нормали к точке P гиперповерхности все производные по нормали от $J_\mu(Q)$, порядка не больше $m-1$, стремятся к определенным пределам.*

Подробное исследование показывает, что

$$\lim_{Q\to P}\frac{\partial^i}{\partial\nu_P^i}J_\mu(Q)=\int\limits_{(S)}\psi_\mu(P_1)\left[\frac{\partial^i}{\partial\nu_P^i}K_{m,\mu}(P_1,P)\right]dP_1\tag{9}$$

при $i<\mu-1$, и

$$\lim\frac{\partial^{\mu-1}}{\partial\nu_P^{\mu-1}}J_\mu(Q)=\int\limits_{(S)}\psi_\mu(P_1)\left[\frac{\partial^{\mu-1}}{\partial\nu_P^{\mu-1}}K_{m,\mu}(P_1,P)\right]dP_1+C_\mu\psi_\mu(P),\tag{10}$$

где C_μ равно $\dfrac{(\mu-1)!\,(2m-2\mu-1)!!}{(2m-2\mu+n-2)!!}\,2^{\frac{n-1}{2}}\,\pi^{\frac{n-1}{2}}$ для нечетных n

и $\dfrac{(\mu-1)!\,(2m-2\mu-1)!!}{(2m-2\mu+n-2)!!}\,2^{\frac{n}{2}-1}\,\pi^{\frac{n}{2}}$ — для четных n.

4°. Чтобы доказать основную теорему, сформулированную в п. 1°, достаточно доказать следующее:

---

* В этой формуле $P_n^k(\mu)$ обозначает k-ую производную по μ от полинома Лежандра порядка n. Под символом $a!$ или $a!!$ в случае $a\leqslant 0$ понимается единица.

Теорема 2. *Если $\varphi_\mu(P)$ ($\mu=1, 2, \ldots m$) — функции типа $H_{m-\mu,\varepsilon}$, то существуют такие функции плотности ψ_μ типа $H_{m-\mu,\varepsilon}$, что m-гармоническая в области D функция*

$$u(Q)=\int\limits_{(S)}\psi_1(P_1)K_{m,1}(P_1, Q)\,dP_1+\ldots+\int\limits_{(S)}\psi_\mu(P_1)K_{m,\mu}(P_1, Q)\,dP_1 \qquad (11)$$

удовлетворяет граничным условиям (3).

Доказательство. В силу леммы 1 $u(Q)$ — m—гармоническая функция. Теорема 1 показывает, что условия (1) равносильны соотношениям

$$\varphi_\mu(P)=[\psi_1(P)]_{\mu-1}+\int\psi_1(P_1)\left[\frac{\partial^{\mu-1}}{\partial\nu_P^{\mu-1}}K_{m,1}(P_1, P)\right]dP_1+[\psi_2(P)]_{\mu-2}+$$
$$+\int\limits_{(S)}\psi_2(P_1)\left[\frac{\partial^{\mu-1}}{\partial\nu_P^{\mu-1}}K_{m,2}(P_1, P)\right]dP_1+\ldots+G_\mu\psi_\mu(P)+$$
$$+\int\limits_{(S)}\psi_\mu(P_1)\left[\frac{\partial^{\mu-1}}{\partial\nu_P^{\mu-1}}K_{m,\mu}(P_1, P)\right]dP_1+\ldots+$$
$$+\int\limits_{(S)}\psi_m(P_1)\left[\frac{\partial^{\mu-1}}{\partial\nu_P^{\mu-1}}K_{m,m}(P_1, P)\right]dP_1. \qquad (12)$$

Здесь символ $[\psi(P)]_l$ обозначает линейную комбинацию из $\psi(P)$ и производных от нее вдоль S до порядка l включительно. Коэффициенты этой комбинации зависят только от локальных свойств поверхности S, и схема вычисления их вытекает из доказательства теоремы 1. Треугольный вид интегро-дифференциальной системы (12) и свойства ядер, указанные в лемме 2, дают возможность полностью избавиться от выражений $[\psi(P)]_l$, содержащих производные от неизвестных функций, и заменить систему (12) эквивалентной ей системой интегральных уравнений

$$\bar{\varphi}_k(P)=C_k\psi_k(P)+\int\limits_{(S)}\psi_1(P_1)L_1^k(P_1, P)\,dP_1+\ldots+$$
$$+\int\limits_{(S)}\psi_m(P_1)L_m^k(P_1, P)\,dP_1 \qquad (13)$$
$$(k=1, 2, \ldots, m).$$

Здесь известные функции $\bar{\varphi}_k(P)$ попрежнему подчиняются условиям $H_{m-k,\varepsilon}$, а ядра L_μ^k — условию

$$|L_\mu^k(P_1, P)|<\frac{M}{r_{P_1P}^{n-2-2(m-k)}}, \qquad (14)$$

где M — константа, зависящая от S. В силу (14) к системе (13) полностью применима обычная теория Фредгольма. В частности, имеет место обычная альтернатива Фредгольма, и, значит, из теоремы единственности для регулярных решений полигармонического уравнения следует, что система (13), а, значит, и эквивалентная ей система (12) имеет решение. Так как функции $\bar{\varphi}_\mu$ подчиняются условиям $H_{m-\mu,\varepsilon}$, то ψ_μ тоже подчиняются этим условиям.

Институт математики
Академии Наук СССР

Поступило
9 VIII 1941

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Векуа, Тр. Тбилисского мат. ин-та, VII (1940). [2] С. Соболев, Мат. сб., 2 (44): 3 (1937).

Доклады Академии Наук СССР
1941. Том XXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. МИЛЬМАН

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ТОЧЕК СПЕКТРА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 5 VI 1941)

В статье приводятся некоторые свойства линейных операторов в пространствах Банаха, связанные с вводимыми здесь (как нам кажется, впервые) понятиями минимальной кратности и минимальной простоты спектра. Пусть E—пространство типа (B): A — линейный оператор в E, S_A — множество точек спектра A, и I — единичный оператор в E*.

Определение 1. Мы будем называть точку $\lambda_0 \in S_A$ существенно-минимально-n-кратной точкой спектра A, $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$, если выполняется следующее: 1) из соотношения $\lim\limits_{m\to\infty} |(A-\lambda_0 I)^{n+1} x_m| = 0$, $x_m \in E$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$ всегда вытекает $\lim\limits_{m\to\infty} |(A-\lambda_0 I)^n x_m| = 0$, $x_m \in E$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$; 2) существует последовательность $\{x_m^0\}$, $x_m^0 \in E$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$, для которой $\lim\limits_{m\to\infty} |(A-\lambda_0 I)^n x_m^0| = 0$, $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} |(A-\lambda_0 I)^{n-1} x_m^0| > 0$.

Определение 1'. Точку $\lambda_0 \in S_A$ мы будем называть существенно-минимально-простой точкой спектра A, если λ_0 имеет существенную кратность, равную нулю или единице.

Определение 2. Мы будем называть точку $\lambda_0 \in S_A$ минимально-n-кратной точкой спектра A, $(n=1, 2, 3, \ldots)$, если выполняется следующее: 1) из соотношений: $\lim |(A-\lambda_0 I)^{n+1} x_m| = 0$, $x_m \in E$, $|x_m| = 0$, $(m=1, 2, 3, \ldots)$ всегда вытекает $\lim\limits_{m\to\infty} |(A-\lambda_0 I)^n x_m| = 0$; 2) имеется последовательность $\{x_m^0\}$, $x_m^0 \in E$, $|x_m^0| = 1$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$, для которой $\lim\limits_{m\to\infty} |(A-\lambda_0 I)^n x_m^0| = 0$, $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} |(A-\lambda_0 I)^{n-1} x_m^0| > 0$.

Определение 2'. Минимально-однократную точку $\lambda_0 \in S_A$ мы будем называть минимально-простой.

Легко видеть, что если E является конечно-мерным, то минимальная n-кратность точки $\lambda_0 \in S_A$ эквивалентна тому, что λ_0 является точно n-кратным корнем минимального полинома оператора A. Очевидно, что существенно-минимально-n-кратная точка спектра всегда является не более чем минимально-n-кратной точкой S_A. Без труда можно доказать, что для конечно-мерных пространств понятия существенной минимальной кратности и минимальной кратности совпадают.

* Понятия и обозначения, указанные здесь, см. ([1]).

Настоящая заметка делится на две части: в первой приводится характеристика существенной минимальной кратности спектра линейного оператора; во второй — признаки минимальной кратности спектра линейного оператора.

I. Имеет место следующая

Теорема 1. *Если $\lambda_0 \in S_A$ с существенной минимальной кратностью, не превышающей n $(n=1, 2, 3, \ldots)$, и в любой окрестности λ_0 имеются точки $\lambda \bar{\in} S_A$, то имеет место неравенство $|(A-\lambda I)^{-1}|\cdot|\lambda_0-\lambda|^n < K$, где $\lambda \bar{\in} S_A$ — произвольная точка из некоторой окрестности λ_0, K — постоянная.*

В частности, если λ_0 — существенно-минимально-простая точка спектра A, и в любой окрестности λ_0 имеются точки $\lambda \bar{\in} S_A$, то выполняется неравенство $|(A-\lambda I)^{-1}|\cdot|\lambda_0-\lambda| < K$, где $\lambda \bar{\in} S_A$ — произвольные точки некоторой окрестности λ_0 и K — постоянная.

Как известно, линейное подпространство $E_1 \subseteq E$ называется инвариантным по отношению к A, если $AE_1 \subseteq E_1$; E_1 называется инвариантно-неразложимым, если нельзя указать такие два линейных подпространства E_1', E_1'' пространства E_1 (отличные от θ), в каждом из которых оператор A был бы инвариантным, которые имели бы только один общий элемент θ (θ — нулевой элемент E), и групповая сумма которых равнялась бы E_1.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения: а) через $E_{\lambda_0}^{(\rho)}$ $(\rho=0, 1, 2, 3, \ldots)$ обозначим совокупность всех элементов $y \in E$ вида $y=(A-\lambda_0 I)^\rho x$, где $x \in E$. При этом $E_{\lambda_0}^{(0)}=E$; б) через $E_A(x)$ (где $x \in E$) мы обозначим совокупность всех элементов вида $y=\lim\limits_{\rho\to\infty} B_\rho x$, где B_ρ суть линейные операторы в E, являющиеся полиномами от A; в) через $E^{(\rho)}(z; \lambda_0)$ (где $z \in E$, $\rho=0, 1, 2, 3, \ldots$) обозначим совокупность всех элементов из E вида $y=(A-\lambda_0 I)^\rho x$, где $x \in E_A(z)$; при этом $E^{(0)}(z; \lambda_0) = E_A(z)$. Очевидно, что все множества $E^{(\rho)}(z; \lambda_0)$ суть линейные, замкнутые подпространства E, инвариантные по отношению к A. Наконец, если L_1 и L_2 — два множества, то под L_1-L_2 мы будем понимать их теоретико-множественную разность.

В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть $\lambda_0 \in S_A$ имеет существенную кратность n $(n=1, 2, 3, \ldots)$, и в любой окрестности точки λ_0 имеются точки $\lambda \bar{\in} S_A$, тогда λ_0 является характеристическим числом и выполняется следующее: 1) пространства $E_{\lambda_0}^{(\rho)}$ при $\rho \geqslant n$ замкнуты и между собой совпадают; для каждого $x \in E$ пространства $E^{(\rho)}(x; \lambda_0)$ при $\rho \geqslant n$ между собой совпадают; 2) имеется по крайней мере один элемент $y \in E_{\lambda_0}^{(n-1)}-E_{\lambda_0}^{(n)}$, и для каждого такого элемента пространства $E^{(n-1)}(z; \lambda_0)$ и $E^{(n)}(z; \lambda_0)$, где $y=(A-\lambda_0 I)^{n-1}(z)$, не совпадают; 3) имеется элемент $x_0 \in E$, для которого $E_A(x_0)$ — инвариантно-неразложимо по отношению к A; при этом $E_A(x_0)$ — n-мерное пространство, и оператор A по отношению к нему имеет минимальный полином $(\lambda-\lambda_0)^n$. Пространства $E_A(x_0)$ и $E_{\lambda_0}^{(n)}$ не имеют общих элементов θ.*

II. В нижеследующих теоремах 3, 3′ и следствии из теоремы 3′ мы будем предполагать, что спектр S_A линейного оператора A обладает таким свойством: для каждой точки $\lambda \bar{\in} S_A$ можно указать спрямляемый, замкнутый контур, вне которого находится точка λ и внутри которого находится S_A.

Теорема 3. *Если $\lambda_0 \in S_A$, $\lambda_m \bar{\in} S_A$, $m=1, 2, 3, \ldots$ и выполняется $\lim\limits_{m\to\infty}|(A-\lambda_m I)^{-1}|\cdot|\lambda_0-\lambda_m|^{n+1}=0$; $\lim\limits_{m\to\infty}|\lambda_0-\lambda_m|=0$, то λ_0 имеет минимальную кратность не больше, чем n $(n=1, 2, 3, \ldots)$.*

Из теоремы 3 вытекает

Теорема 3′. *Если через каждую точку спектра S_A линейного оператора A можно провести окружность, внутри которой нет точек S_A, и выполняется равенство:* $\lim\limits_{d(\lambda)\to 0} |(A-\lambda I)^{-1}| \cdot [d(\lambda)]^{n+1}=0$, *где* $d(\lambda)$ *обозначает расстояние от* λ *до* S_A, *то все точки спектра* A *имеют минимальную кратность не выше* n; *в частности, при* $n=1$ *весь спектр* A — *минимально простой.*

Следствие. Если через каждую точку спектра A можно провести окружность, внутри которой нет точек спектра A, и имеет место неравенство $|P(A)|\leqslant C\cdot\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{|[P(A)]^m|}$, где $P(\lambda)$ — произвольный полином и C — константа, не зависящая от выбора полинома, то спектр A — минимально-простой.

Теорема 4. *Если число* $\lambda\neq 0$ *принадлежит спектру линейного оператора* A *с минимальной кратностью, не меньшей* n $(n=1,2,3,\ldots)$, *то имеет место неравенство* $\lim\limits_{\rho\to\infty}\left|\frac{1}{\rho^n}\cdot\sum\limits_{m=0}^{\rho-1}\frac{A^m}{\lambda^m}\right|>0$. *Если же минимальная кратность числа* λ *в спектре не меньше* n *и кроме того*

$$\lim_{\rho\to\infty}\left|\frac{1}{\rho^{n+1}}\cdot\sum_{m=0}^{\rho-1}\frac{A^m}{\lambda^m}\right|=0,$$

то λ *принадлежит спектру* A *с минимальной кратностью, равной* n.

Замечание. Оценки, данные здесь для роста частных сумм резольвенты, — точные. Именно, для всякого n $(n=1,2,3,\ldots)$ можно указать линейный оператор и число $\lambda\in S_A$ с минимальной кратностью n в спектре так, чтобы имели место соотношения

$$\lim_{\rho\to\infty}\left|\frac{1}{\rho^n}\cdot\sum_{m=0}^{\rho-1}\frac{A^m}{\lambda^m}\right|>0,\quad \lim_{m\to\infty}\left|\frac{1}{\rho^{n+1}}\cdot\sum_{m=0}^{\rho-1}\frac{A^m}{\lambda^m}\right|=0.$$

Следствие. Если максимальные (по модулю) числа спектра равны, по модулю, норме A, то они принадлежат простому спектру A.

Пусть $\varphi_n(\lambda)$ — регулярные функции от λ в круге, содержащем S_A для каждого n $(n=1,2,3,\ldots)$. Как известно ([2]), $\varphi_n(A)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ имеет смысл.

Имеет место следующая

Теорема 5. *Если* $\lambda\in S_A$ *и выполняется:* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|\varphi_n(A)|}{|\varphi_n'(\lambda)|}=0$, *то* λ *принадлежит минимально-простому спектру* A.

Институт математики
Академии Наук УССР

Поступило
17 VI 1941

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] St. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932). [2] G. Gelfand, Normierte Ringe, Матем. сб., 9, (15) : 1 (1941).

Доклады Академии Наук СССР
1941. Том XXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

М. Н. ОЛЕВСКИЙ

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НАЧАЛЬНЫХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 VII 1941)

1. Пусть $d\sigma^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$ — линейный элемент пространства $n \geq 3$ измерений постоянной кривизны k и $\Delta_2 u \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^{n} g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right)$ — второй дифференциальный параметр Бельтрами. В работе даются в замкнутой форме решения: a) задачи Коши для волнового уравнения

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (1) \qquad u(P, t)\big|_{t=0} = f(P); \quad (2) \qquad \frac{\partial u(P, t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi(P); \quad (3)$$

b) задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\Delta_2 u = \frac{\partial u}{\partial t}; \qquad (4) \qquad u(P, t)\big|_{t=0} = f(P); \qquad (5)$$

c) первой краевой задачи для «сферы» в рассматриваемом пространстве эллиптического уравнения («уравнения Лапласа») $\Delta_2 u = 0$. (6)

Указывается также возможность решения на том же пути ряда других краевых задач в этом пространстве.

2. Обозначим через $V(u], P, s)$ ср. значение функции u по эквидистантной поверхности F_s с центром в точке P геодезического радиуса s, т. е.

$$V(u], P, s) = \frac{1}{\omega_n} \int_{F_s} u\, d\omega; \qquad \omega_n = \int_{F_s} d\omega, \qquad (7)$$

где $d\omega$ — поверхностный элемент F_s. Легко показать, что оно удовлетворяет ур-ию [аналог ур-ия Дарбу ([1])] $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + (n-1)\sqrt{k}\, \mathrm{ctg}\, \sqrt{k}\, s \cdot \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{1}{\omega_n} \int_{F_s} \Delta_2 u \cdot d\omega.$ (8)

3. Вместо искомой в задачах a) и b) функции $u(P, t)$ (P — точка с заданными координатами) найдем среднее ее значение ко времени t, $V(u], P, s, t)$ или просто $V(P, s, t)$. Для него в случае задачи a) в силу (1), (2), (3), (8) получаем ур-ие $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + (n-1)\sqrt{k}\, \mathrm{ctg}\, \sqrt{k}\, s\, \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ (9)

с начальными условиями

$$V(P, s, t)\big|_{t=0} = \bar{f}(P, s); \qquad (10) \qquad \frac{\partial V(P, s, t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \bar{\varphi}(P, s). \qquad (11)$$

Для задач (b) аналогично

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+(n-1)\sqrt{k}\operatorname{ctg}\sqrt{k}\,s\,\frac{\partial V}{\partial s}=\frac{\partial V}{\partial t}; \quad (12) \qquad V(P,s,t)|_{t=0}=\bar{f}(P,s), \quad (13)$$

где, вообще, через $\bar{\psi}(P,s)$ обозначено среднее значение $\psi(P,s)$ на F_s.

Существенно, что полученные для V задачи Коши являются двумерными (так как координаты точки P фигурируют как параметры через посредство $\bar{f}$ и $\bar{\varphi}$). Они решаются методом Фурье. Зная V, находим $u(P,t)$ как $\lim\limits_{s\to 0} V(P,s,t)$. Основным здесь является получение и изучение решений того обыкновенного дифференциального уравнения (сводящегося к гипергеометрическому), к которому мы приходим для функции от s при отделении переменных s от t в уравнениях (9) и (12) задач а) и b) для V. Мы здесь встречаемся с уравнением, играющим роль бесселевого уравнения в аналогичных задачах в евклидовом пространстве (п. 4). При этом совсем просто получаются решения задач а) и b) в случае n нечетного, ибо упомянутое только что уравнение допускает решения в элементарных функциях. В случае же n четного, при желании избежать обращения с новыми функциями, можно воспользоваться методом спуска ([2]), переписав предварительно найденное решение для n нечетного в надлежащих координатах (например, в таких, в которых $d\sigma^2=\dfrac{dy_1^2+\ldots+dy_n^2}{\left[1+\frac{k}{4}(y_1^2+\ldots+y_n^2)\right]^2}$; здесь важно, что при $y_n=0$ мы получаем метрику пространства постоянной же кривизны, но на единицу меньшего числа измерений).

4. Полагая
$$V=\bar{S}(s)\,T(t) \qquad (14)$$
в (9) и (12), мы в обоих случаях приходим для $\bar{S}(s)$ к уравнению
$$\bar{S}''+(n-1)\sqrt{k}\operatorname{ctg}\sqrt{k}\,s\,\bar{S}'+\lambda^2\bar{S}=0, \qquad (15)$$
а для $T(t)$ к $T''+\lambda^2T=0$ и соответственно $T'+\lambda^2T=0$, где λ^2 — константа разделения. Вводя $S=\bar{S}\left(\dfrac{\sin\sqrt{k}\,s}{\sqrt{k}}\right)^p$, $p=\dfrac{n-2}{2}$ и обозначая
$$\frac{\sin\sqrt{k}\,s}{\sqrt{k}}=x; \qquad S(s)=y(x); \qquad \mu^2=\lambda^2+\frac{kn(n-2)}{4},$$
получаем уравнение $x^2(1-kx^2)y''+x(1-2kx^2)y'+(\mu^2x^2-p^2)y=0$, (16) обращающееся при $k=0$ в бесселево уравнение. Полагая в (16) $kx^2=\xi$, $y=\xi^{\frac{p}{2}}\psi(\xi)$, получаем для $\psi(\xi)$ гипергеометрическое уравнение
$$\xi(\xi-1)\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\left[\frac{2p+3}{2}-(p+1)\right]\frac{d\psi}{d\xi}+\frac{1}{4}\left[-\frac{\mu^2}{k}+p^2+p\right]\psi=0. \qquad (17)$$

Таким образом общий интеграл
$$y(x)=C_1x^pF\left(\frac{2p+1+\sqrt{1+\frac{4\mu^2}{k}}}{4},\ \frac{2p+1-\sqrt{1+\frac{4\mu^2}{k}}}{4},\ p+1,\ kx^2\right)+$$
$$+C_2x^{-p}F\left(\frac{-2p+1+\sqrt{1+\frac{4\mu^2}{k}}}{4},\ \frac{-2p+1+\sqrt{1+\frac{4\mu^2}{k}}}{4},-p+1,\ kx^2\right) \qquad (18)$$
(если p — не целое число; в случае p целого общий интеграл уравнения (16) отличается вторым членом от (18), имеющим в этом случае логарифмическую особенность при $x=0$). Для $k>0$ оба ряда (гипергеометрические) — сходящиеся для всех значений s; для $k<0$ необходимо пользоваться и другими представлениями решений гипергеометрического у-ия.

Ограниченность V при $s=0$ приводит к требованию $C_2=0$. Решение

$$x^p F\left(\frac{2p+1+\sqrt{1+\frac{4\mu^2}{k}}}{4},\ \frac{2p+1-\sqrt{1+\frac{4\mu^2}{k}}}{4},\ p+1,\ kx^2\right),\quad \text{где}\quad x=\frac{\sin\sqrt{k}\,s}{\sqrt{k}},$$

дополненное множителем $\frac{\mu^p}{2^p\Gamma(p+1)}$, будем обозначать через $J(k, \mu, p, s)$, при $k=0$ она обращается в $J_p(\mu s)$ — бесселеву функцию 1 рода, p порядка. Можно показать, что подобно бесселевым функциям и здесь имеет место ([3]) вырождение $J(k, \mu, p, s)$ в элементарную функцию при полуцелых $p=m-\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{\sqrt{k}}{\sin\sqrt{k}s}\frac{d}{ds}\right)^{m-1}\frac{\sin\sqrt{\mu^2+\frac{k}{4}}\,s}{\frac{\sin\sqrt{k}\,s}{\sqrt{k}}}. \tag{19}$$

Для любого же p имеет место рекуррентное соотношение

$$\frac{J(k,\mu,p+1,s)}{\left(\frac{\sin\sqrt{k}\,s}{\sqrt{k}}\right)^p}=\frac{\mu}{k(p^2+p)-\mu^2}\cdot\frac{d\,J(k,\mu,p,s)}{ds\left(\frac{\sin\sqrt{k}\,s}{\sqrt{k}}\right)^p}. \tag{20}$$

5. В дальнейшем для характеристики метода ограничимся его фактическим проведением на примере «волнового» уравнения и лишь в случае $n=3$. Для $n>3$ смотри п. 6. Без ограничения общности можно ([4]) предполагать в (2) $f=0$.

1) Пусть $k=-\alpha^2$; в этом случае $0\leqslant s<\infty$. Частное решение (14), удовлетворяющее условию $V_\mu|_{t=0}=0$, имеет вид

$$V_\mu(P,s,t)=B(\mu)\sin\sqrt{\mu^2+\alpha^2}\,t\cdot\frac{\sin\mu s}{\frac{\operatorname{sh}\alpha s}{\alpha}}.$$

По принципу наложения запишем $V(P, s, t)$ в форме

$$V(P,s,t)=\int_0^\infty B(\mu)\sin\sqrt{\mu^2+\alpha^2}\,t\cdot\frac{\sin\mu s}{\frac{\operatorname{sh}\alpha s}{\alpha}}d\mu. \tag{21}$$

Определяя $B(\mu)$ из условия (11) с помощью формулы двойного интеграла Фурье и подставляя его в (21), мы, изменив порядок интегрирования, получим

$$V(P,s,t)=\frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha s}\int_0^\infty\bar{\varphi}(P,z)\frac{\operatorname{sh}\alpha z}{\alpha}\left(\int_0^\infty\frac{\sin\mu s\cdot\sin\mu z\cdot\sin\sqrt{\mu^2+\alpha^2}\,t}{\sqrt{\mu^2+\alpha^2}}d\mu\right)dz.$$

Используя дважды значение интеграла Сонина и беря $\lim\limits_{s\to 0}V(P,s,t)$, мы приходим к решению $u(P,t)=\frac{\operatorname{sh}\alpha t}{\alpha}\bar{\varphi}(P,t)+\alpha\int_0^t z\frac{J_0'(\alpha\sqrt{t^2-z^2})}{\sqrt{t^2-z^2}}\frac{\operatorname{sh}\alpha z}{\alpha}\bar{\varphi}(P,z)\,dz.$

Первый член представляет собой непосредственное обобщение известной пуассоновской формы решения для $k=0$; наличие второго члена (исчезающего при $k=0$) обнаруживает диффузию волн, имеющую здесь место в соответствии с недавним результатом Матиссона ([8]).

2) Пусть $k=\alpha^2$; в этом случае $0\leqslant s<\frac{\pi}{\alpha}$ (аналогично обсуждается случай эллиптического пространства). Здесь, как и выше,

$$V_\mu(P,s,t)=B(\mu)\sin\sqrt{\mu^2-\alpha^2}\,t\cdot\frac{\sin\mu s}{\frac{\sin\alpha s}{\alpha}}.$$

Однако требование ограниченности $V_\mu(P,s,t)$ при $s\to\frac{\pi}{\alpha}$ приводит в этом