Р.В. Гангнус, Ю.О. Гурвиц

Геометрия

Часть 2. Стереометрия

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Р11

Р.В. Гангнус
Р11 Геометрия: Часть 2. Стереометрия / Р.В. Гангнус, Ю.О. Гурвиц – М.: Книга по Требованию, 2013. – 328 с.

ISBN 978-5-458-27444-9

Методическое пособие начала 20 века по геометрии и стереометрии.

ISBN 978-5-458-27444-9

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Упомянутый выше Демокрит высказал суждение, что объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$ объема призмы, имеющей с пирамидой равновеликое основание и одинаковую высоту; исчерпывающее доказательство этого суждения было затем дано Евдоксом (408—355 до н. э.).

Особо следует упомянуть о Менехме (IV в. до н. э.), ученике Платона, впервые давшем некоторую теорию конических сечений.

4. Что касается Евклида, то величайшая его заслуга состоит в том, что он собрал, обработал и привел в стройную систему дошедший до него материал. Из 13 книг его „Начал“ стереометрии отведены XI—XIII книги.

В XI книге изложены свойства прямых и плоскостей в пространстве и свойства параллелепипедов; в XII книге речь идет о пирамиде, конусе, цилиндре и шаре, в XIII книге — о правильных многоугольниках и многогранниках; более подробно учение о правильных многогранниках развивается в XIV и XV книгах.

Следует указать, что в некоторых изданиях „Начал“ Евклида имеется не 13, а 15 книг; исторические исследования показали, что последние две книги написаны не Евклидом; XIV книга приписывается Гипсиклу Александрийскому (II в. до н. э), XV — Дамасцию (VI в) и др.

Собранные Евклидом сведения по стереометрии дополнил, углубил и расширил величайший математик древности Архимед (287 — 212). В своем трактате „О шаре и цилиндре“, состоящем из двух книг, он доказывает, что поверхность шара вчетверо больше площади большого круга, что поверхность шарового сегмента равна площади круга, радиус которого равен прямой, соединяющей вершину сегмента с точкой окружности круга, служащего ему основанием, что объем и поверхность шара составляют $\frac{2}{3}$ объема и поверхности, соответственно, цилиндра, описанного около шара. Стереометрия обязана Архимеду и другими исследованиями: он дал тринадцать полуправильных тел, каждое из которых ограничено правильными многоугольниками, но не одного и того же рода, и вычислил объемы многих тел вращения. Благодаря трудам Архимеда стереометрия достигла своего кульминационного пункта, и элементарная геометрия в современном ее понимании была окончательно установлена; действительно, в нее входило все содержание „Начал“ Евклида, измерение круга и шара, а также свойства сферических фигур, которые изучались древними как составная часть астрономии.

Следует упомянуть Паппа (около IV в.), составившего „Математический сборник“ в 8 книгах, из которых первые две утеряны. В своем сборнике Папп приводит некоторые свои оригинальные исследования, большей же частью комментирует работы предшествовавших ему геометров; преимущественное значение работы Паппа состоит в том, что она дает возможность судить об отдельных работах, которые до нас не дошли. Нужно отметить, что Папп является автором теоремы: объем тела, образуемого вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости вращаемой фигуры, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести площади фигуры. Теорема эта впоследствии была названа именем Гюльдена (1577—1643), вновь открывшего ее.

5. После падения Греции наблюдается длительный застой в развитии математики и стереометрии в частности, длившийся тысячу лет.

Ни римляне, ни индусы, ни арабы почти ничего не прибавили к геометрической сокровищнице греков, и только с XVI—XVII вв., в период социального подьема, вызвавшего бурный рост в области науки, наблюдается оживление и математической мысли под давлением развивающейся техники.

Для развития стереометрии в новое время многое было сделано Кеплером (1571—1630). В своей „Новой стереометрии" — „стереометрии бочек" (1615) — он впервые употребил в геометрии бесконечно-малую величину. При вычислении объемов тел Кеплер избегает метода исчерпывания, введенного Евдоксом и Архимедом, и вводит бесконечно-малые величины. Так, он рассматривает шар „как бы" состоящим из бесконечно большого числа конусов, вершины которых лежат в центре, а основания — на поверхности шара, и таким путем находит его объем.

Кеплер применял свой метод для определения объемов тел, образуемых вращением круга вокруг оси, лежащей в плоскости круга, в частности объема тела, образуемого вращением кругового сегмента вокруг его хорды, называя их то „лимоном", то „яблоком". Необходимо упомянуть о Кавальери (1591—1647) и его трудах: „Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых частей непрерывных величин" (1635) и „Шесть геометрических этюдов" (1647), в которых он главным образом сосредоточивает свое внимание на вычислении площадей, объемов и центров тяжести тел.

Открытие Ньютоном (1642—1727) и Лейбницем (1646—1716) интегрального исчисления окончательно разрешило проблему квадратуры и кубатуры.

§ 2. Задача изучения стереометрии.

1. Изучение стереометрии в средней школе ставит своей задачей развитие пространственных представлений учащихся, их пространственной интуиции, что достигается правильным прохождением первых глав стереометрии — положения основных образов.

Изучение стереометрии должно дать умение и навык отличать друг от друга формы различных основных тел, перечисляя их существенные признаки, знать образование отдельных тел, их свойства, соотношения между отдельными элементами тел, выполнять четкий чертеж несложного пространственного образа, разбираться в данном чертеже и вызывать в своем воображении по данному чертежу соответствующие геометрические образы, решать задачи на вычисление поверхностей и объемов тел и отдельных их частей, размеров отдельных их элементов, а также задачи на построение пространственных фигур. Изучение стереометрии, содействуя развитию пространственных представлений и пространственной интуиции, должно, в конечном счете, дать учащимся прочные навыки и знания, нужные им не только для дальнейшей учебной работы, но и для последующей практической работы в технике, в производстве, в строительстве.

2. Приступая с учащимися к изучению стереометрии, преподаватель должен помнить, что учащиеся за редкими исключениями обладают весьма слабыми пространственными представлениями, не умеют изобразить в должном виде трехмерный образ на двухмерной плоскости листа или доски, не умеют рассмотреть и тем самым представить себе изображенный в плоскости чертежа трехмерный геометрический образ. Чтобы преодолеть эти трудности, необходимо на первых порах широко пользоваться наглядными пособиями. Должны быть использованы всякого рода готовые модели тел, конструктивные ящики для выяснения учащимся в рассматриваемой пространственной фигуре взаимоположений отдельных основных элементов фигуры: точек, прямых и плоскостей; наряду с этим сами учащиеся должны научиться строить изучаемую фигуру из какого-либо материала и изображать ее на плоскости.

Рассмотрение и подробный разбор вопроса на модели или построение модели как нельзя лучше помогает учащимся выяснить взаимное расположение элементов пространственной фигуры и приучает их воссоздавать в своем воображении требуемый геометрический образ в целом и видеть взаимное расположение отдельных его элементов.

В силу сказанного должны быть использованы при изучении стереометрии, в особенности первых ее глав, всякого рода наглядные пособия: основное стереометрическое пособие, состоящее из набора спиц, планок, пластинок, готовые модели тел, сплошные и разборные, таблицы и т. п.

Следует иметь в виду, что приучение учащихся к геометрическому конструированию особенно ценно тем, что служит полезной подготовкой к работам по техническому конструированию. И школа, которая должна серьезно ставить дело изучения стереометрии, обязана найти пути и средства обеспечить занятия необходимыми учебными пособиями.

§ 3. Наглядные пособия.

1. Одним из полезных наглядных пособий по стереометрии является пособие С. П. Острейко.

В объяснительной записке к пособию, описание которого дано ниже, С. П. Острейко говорит:

„Меня давно занимала мысль иметь под руками при преподавании стереометрии такой материал, при помощи которого преподаватель и учащийся могли бы легко и без большой потери времени осуществлять любые несложные стереометрические построения. О громадном значении такого учебного пособия распространяться не приходится. Стереометрия затрудняет учащихся главным образом тем, что построение ее нужно „воображать", так как чертежи в ней являются условным изображением на плоскости того, что размещено в пространстве. Готовые модели, которыми обыкновенно пользуются при обучении стереометрии, не могут вполне заменить то, что я имею в виду. Прежде всего, этих моделей должно быть очень большое количество, если мы желаем, чтобы для всякой теоремы, задачи и вопроса, какие могут встретиться, у нас была готовая модель. Но это неудобство все-таки только практического характера, и с ним еще можно было бы мириться. Гораздо существеннее то, что учащийся, рассматривая готовую модель, пассивно воспринимает формы и свойства той фигуры, которую она изображает. Ближе и интимнее вникнет он в формы и соотношения частей фигуры, если он сам построит ее по данному заданию. Между прочим, только при существовании такого пособия учащийся может отчетливо уяснить себе ход построения стереометрической фигуры в том именно порядке, какой соответствует ходу доказательства или заданию задачи".

Составными частями прибора С. П. Острейко служат:

1) Набор цветных деревянных палочек и металлических скреплений к ним; эти скрепления позволяют легко строить из палочек по данным заданиям призмы и пирамиды. Скрепления сделаны из мягкого металла (меди), легко деформируются простым нажимом пальцев; это дает возможность придавать палочкам направления под любыми углами друг к другу.

2) Прямоугольная рама размером 18 *дм* $\times$ 13 *дм* (рис. 1), на которой натянуты с обеих сторон проволочные сетки с отверстиями такой величины, чтобы палочки, служащие для построений, могли вдвигаться в эти отверстия с некоторым усилием. Такая рама позволяет осуществлять построения, относящиеся ко взаимному расположению прямой и плоскости, и составлять такие геометрические фигуры, для построения которых используются только одни палочки и скрепления. Так, для построения пирамиды с квадратным основанием и ребром, перпендикулярным к плоскости основания, достаточно воткнуть палочки в соответствующие отверстия, скрепить их в вершине и положить на сетку палочки, изображающие основание пирамиды.

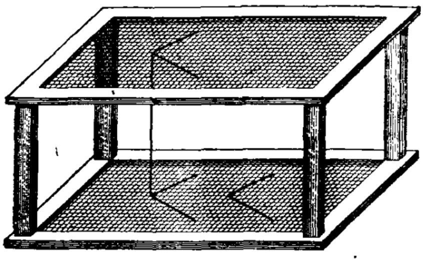

Рис. 1.

3) Вторая прямоугольная рама с натянутой на ней проволочной сеткой, которая служит для построений, связанных с параллельными плоскостями. Рама устанавливается на вставных ножках, для которых в первой раме имеются углубления. Вторая рама используется для иллюстрации теорем, относящихся к параллельным плоскостям, теоремы о перпендикуляре к плоскости, для построения сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию, и т. д., как это видно из рисунков 2 и 3.

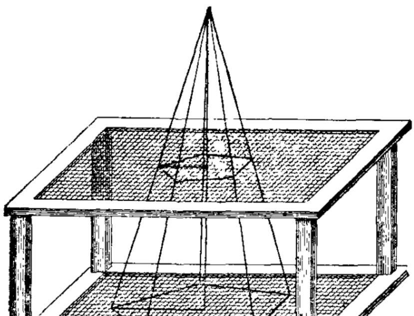

Рис. 2.

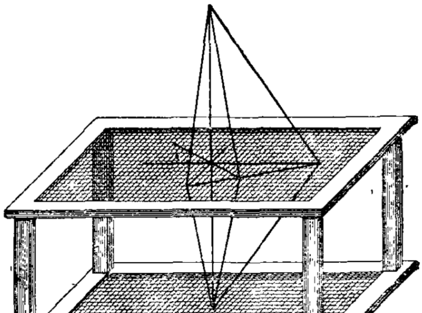

Рис. 3.

4) Две модели прямоугольников из жести, окрашенные белой краской, с приделанными ножками для установления этих моделей на раме. Модели прямоугольников могут быть установлены и перпендикулярно и наклонно к раме и используются для иллюстрации взаимного расположения плоскостей.

5) Две пары моделей прямоугольников из жести, окрашенных в белый цвет; они связаны навесками так, что могут служить моделями двугранных углов.

При помощи перечисленных приспособлений могут быть выполнены все построения, относящиеся к курсу стереометрии, исключая круглые тела. Весьма полезно, чтобы учащиеся, отвечая урок (будь то доказательство теоремы или решение задачи), строили при помощи пособия геометрический образ, соответствующий теореме или задаче; использование наглядного пособия, однако, отнюдь не исключает необходимости приобретения навыков пользоваться при ответе чертежом.

2. Помимо описанного пособия С. П. Острейко, следует указать на „универсальный набор по стереометрии", состоящий из доски, на которой монтируются модели геометрических фигур, встречающихся в различных теоремах стереометрии, набора металлических спиц, прямоугольных кусков картона и кусочков пробки.

Детальное описание указанного пособия, методика его применения, а также описание различных моделей по стереометрии, изготовляемых в процессе урока из листа бумаги или картона, даны в книге П. А. Карасева „Учебно-наглядные пособия по математике и методика работы с ними в средней школе", Учпедгиз, М., 1933.

3. Весьма полезной является книга Г. Дресслера „О наглядных пособиях по математике" (преимущественно для средней школы), М., 1914.

Небольшой материал по истории наглядного обучения имеется в книге В. Мрочек и Ф. Филипповича „Педагогика математики", СПБ, 1910.

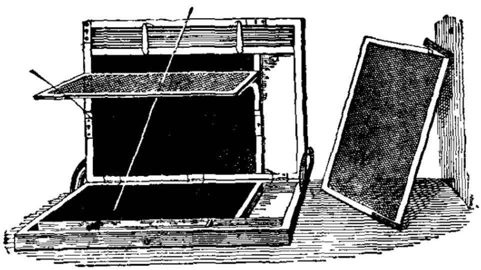

Рис. 4.

4. Пособием при прохождении курса стереометрии может служить также „геометрический ящик", конструкция которого дана авторами книги; ящик может быть изготовлен собственными силами школы и самими учащимися[1]. Это — двустворчатый ящик (рис. 4), изготовленный из 3-миллиметровой фанеры; каждая его створка высотой 3 — 4 *см* доверху заполнена пластелином или хорошей, жирной глиной; створки скреплены шарнирами и могут образовать между собой двугранные углы величиной до 180°. Для отсчета величины двугранных углов к одной из створок (или к обеим) прикреплен наглухо транспортир, при этом небольшой штифтик, прикрепленный к другой створке, указывает соответствующее деление транспортира; имеющиеся зажимные винты удерживают обе створки в требуемом положении. Ящик снабжен набором разноцветных тонких палочек разной длины, запасом пластелина для скрепления палочек и набором плоских прямолинейных фигур и кругов различных радиусов, изготовленных из картона или тонкой фанеры, а также двумя рамами, сделанными из металлической сетки; эти рамы служат моделями плоскостей. Если поставить створки ящика под углом в 90° друг к другу, то к одной из створок ящика можно прикрепить одну или обе рамы-плоскости; через эти плоскости — металлические сетки — свободно проходят палочки, служащие моделями прямых и отрезков. Такой ящик

---

[1] Ящик изготовляется в мастерской наглядных пособий рабфака НКПС, Москва, Бабушкин п р., 4.

позволяет иллюстрировать все встречающиеся в элементарном курсе геометрии вопросы, исключая вопросы, относящиеся к шару.

При изучении шара и его частей следует использовать в качестве модели большой черный матовый шар на подставке, на котором учащиеся могли бы проводить мелом линии, нужные для выяснения и решения отдельных вопросов.

Желательно, чтобы при занятиях стереометрией на каждые 3—5 учащихся приходилось не менее одного геометрического ящика и одной модели шара.

5. Не менее ценным пособием при изучении стереометрии являются также стереоскопические изображения геометрических фигур, рассматриваемые в стереоскоп при разборе теоремы и изучении того или иного тела. Для достижения цели желательно, чтобы у 1—3 учащихся при работе в классе был стереоскоп с набором соответствующих картин. Набор таких стереоскопических картин „Стереометрия в стереоскопе“ был составлен А. Я. Юсевичем и инж. А. Н. Замятиным. Приводим образцы стереоскопических рисунков-стереограмм (рис. 5 и 6). Приложенные стереограммы многогранников, рассматриваемые в стереоскоп, кажутся как бы стеклянными и выделяются весьма рельефно. Требуемая иллюзия достигается тем, что рисунки, как, например, приложенные рисунки додекаэдра и икосаэдра, даются на черном фоне, причем левый рисунок имеет черные грани и белые ребра, правый же — белые грани и черные ребра. Если школа располагает стереоскопическим фотографическим аппаратом и геометрическим ящиком, то можно собственными силами изготовить стереограммы. Для этого нужно „построить“ при помощи геометрического ящика соответствующую фигуру, сфотографировать ее и напечатать затем с негатива любое количество стереограмм. Такая работа представляет для учащихся значительный интерес, весьма полезна для них и позволяет школе накопить ценные и нужные пособия для работы по стереометрии.

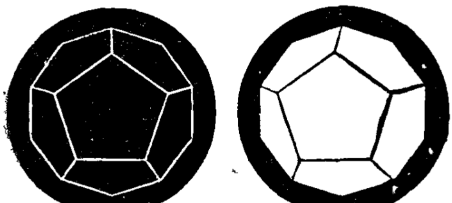

Рис. 5.

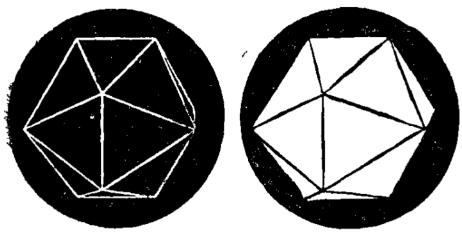

Рис. 6.

Полезным пособием являются также стереометрические анаглифы. Это — таблицы, на которых даны двуцветные стереоскопические изображения стереометрических образов, которые кажутся рельефными, если рассматривать их через особые очки, в которые вместо стекол вставлены прозрачные пленки-светофильтры, красная — для левого глаза и зеленая — для правого.

При объяснении преподавателем свойств какого-либо стереометрического образа на стене в классе вывешивается таблица с изображением соответствующего стереометрического образа, и учащиеся, рассматривая анаглиф при помощи очков с светофильтрами, получают полную иллюзию пространственного образа.

Пользование анаглифами-таблицами следует рекомендовать школе; они помогают учащимся выяснить взаимное положение отдельных элементов пространственных образов, что особенно трудно дается учащимся, если им приходится при изучении свойств пространственного образа ограничиваться только его изображением на рисунке.

§ 4. Об изображении стереометрических фигур.

Умение изображать трехмерные образы на плоскости представляет для учащихся одну из значительных трудностей, которую они должны преодолеть при изучении стереометрии.

Понятно, что преподаватель должен уметь давать хорошо выполненные рисунки, необходимые при рассмотрении отдельных вопросов стереометрии, а также научить учащихся строить трехмерные геометрические образы на плоскости чертежа, притом так, чтобы по изготовленному в определенном масштабе рисунку можно было судить не только о форме, но и о размерах его.

Если между рассматриваемым предметом, например кубом, поставленным на горизонтальную плоскость, и наблюдателем вообразить прозрачный экран (обычно вертикальную плоскость), то, проводя из вершин куба лучи к фокусу глаза, получим в пересечении этих лучей с плоскостью экрана отображение вершин куба, по которым легко нарисовать отображение куба на картинной плоскости.

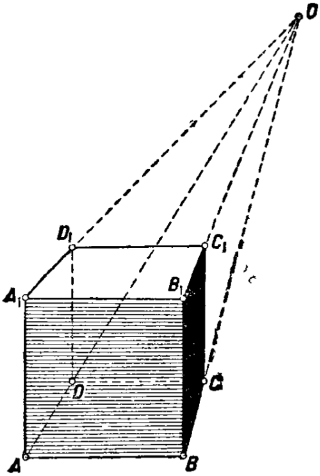

Рис. 7.

Такое изображение называется центрально-перспективным. Это изображение, будучи рассматриваемо из точки положения глаза, дает такое же представление о форме куба, как и сама натура, и является потому вполне наглядным. Однако по такому наглядному изображению нельзя непосредственно измерить отдельные элементы тела и судить о взаимном их положении. Так, например, прямые углы граней, не параллельных картинной плоскости, кажутся искаженными, отдельные ребра — сокращенными в различной степени, параллельные ребра изображены сходящимися (рис. 7) и т. д. Чем дальше от картинной плоскости расположен глаз наблюдателя, т. е. чем меньше углы между лучами, проведенными к глазу, тем меньше различие между размерами параллельных отрезков, тем больше приближается изображение параллельных отрезков к параллельным.

При бесконечно удаленной точке зрения получим изображение того же куба, показанное на рисунке 8. Это изображение дает достаточно наглядное представление о форме куба и вместе с тем дает возможность непосредственно измерять ребра куба, параллельные картинной плоскости, а также и ребра, перпендикулярные к плоскости картины, коэфициент сокращения которых по отношению к ребрам, направленным параллельно плоскости, представляет постоянную величину.

Такое изображение носит название *кабинетной проекции*. Обычно при изображении куба в кабинетной проекции принимают угол φ отклонения от горизонтального направления прямых, перпендикулярных к картинной плоскости, равным 45° (можно принять и 30°) или 135°, а коэфициент k сокращения отрезков в этом направлении равным 0,5. Таким образом построена кабинетная проекция куба на рисунке 8.

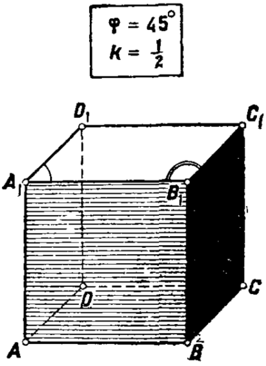

Рис. 8.

Необходимо иметь в виду, что изображение пространственной фигуры в параллельной косоугольной перспективе дает наглядное представление о форме тела и позволяет непосредственно установить размеры изображаемого тела вдоль трех основных направлений, если указан масштаб, в котором дано изображение тела.

Параллельной косоугольной проекцией пользуются для изображения пространственных фигур, которые рассматриваются в стереометрии; построение изображений в такой проэкции весьма просто, но все же требует для приобретения навыка в правильном и быстром изображении той или иной фигуры выполнения значительного числа упражнений.

Указания, как выполняются построения разного рода фигур в параллельной косоугольной проекции, даны во второй части стабильного учебника. Преподаватель обязан своевременно с ними ознакомиться и владеть в должной мере техникой построения изображений фигур. Подробный разбор с учащимися построения методом параллельной косоугольной проекции следует отнести по времени к сроку, когда учащимися уже рассмотрены вопросы о взаимном положении прямых и плоскостей в пространстве.

Однако уже с первых шагов преподаватель должен давать изображения пространственных фигур с соблюдением приемов, указанных в главе XIII второй части стабильного учебника, хотя бы в пределах глазомерной точности.

§ 5. Задачи на построение в стереометрии.

Задачи на построение в стереометрии, в отличие от задач на построение в планиметрии, представляют для учащихся значительные трудности, так как в планиметрии легко связывать геометрические образы с их изображением на чертеже. Следует различать два вида фактически построенных стереометрических образов: 1) действительное построение в определенном масштабе пространственной фигуры, иначе говоря, построение модели фигуры; построение, например, при помощи геометрического ящика каркасной модели фигуры, ребрами которой являются тонкие деревянные палочки, и 2) построение на плоскости, имеющей только два измерения, изображения пространственной фигуры, имеющей три измерения. С самого начала курса стереометрии следует познакомить учащихся с несложными построениями изображений пространственных фигур с помощью так называемой параллельной косоугольной проекции. Когда же учащиеся проработают теоремы о взаимном положении прямых и плоскостей в пространстве, следует углубить и расширить вопрос о построении пространственных образов. Известно, как часто неумение построить требуемую задачей фигуру служит камнем преткновения при решении тех или других вопросов стереометрии, между тем как умение выполнить четкое построение фигуры помогает учащимся понять задачу и найти правильные пути к решению поставленных вопросов.

Прежде всего следует указать, что в стереометрии при выполнении построений приходится пользоваться всеми элементарными построениями планиметрии; о них была речь в первой части настоящей книги.

К числу элементарных построений в стереометрии относятся следующие:

1. Построение плоскости, если в пространстве заданы три какие-либо точки, не лежащие на одной прямой, или прямая и точка вне этой прямой, или две пересекающиеся прямые, или, наконец, две параллельные прямые.

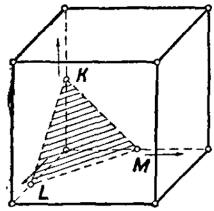

Рис. 9.

При наличии одного из приведенных условий плоскость считается построенной. Надо добиваться, чтобы учащиеся научились „видеть“ плоскость, определяемую указанными выше элементами, и умели изображать плоскость на чертеже в виде какой-либо плоской фигуры, являющейся ограниченной частью плоскости, например в виде прямоугольника, треугольника или параллелограма, плоскость каждого из которых совпадает с плоскостью, подлежащей изображению. Надо также научить учащихся видеть соответствующую плоскость в каких-либо заданных телах. Можно начать с того, чтобы учащиеся дали, например, изображение плоскости, которая проходит через три точки, лежащие на трех ребрах куба, выходящих из одной его вершины. Для выяснения положения такой плоскости в кубе можно рекомендовать учащимся построить куб на геометрическом ящике, отметить на его ребрах какие-либо три точки, положим, K, L и M (рис. 9), а затем, зная, что три точки, не лежащие на одной прямой, вполне определяют положение плоскости, соединить прямыми точки K и L, L и M, M и K; эти прямые, согласно определению плоскости, лежат в искомой плоскости, следовательно, плоскость треугольника KLM совпадает с искомой плоскостью. При таком построении учащиеся действительно „видят“, как расположена в кубе плоскость треугольника KLM. Если после этого предложить учащимся построить на доске или листе бумаги изображение и куба и плоскости, проходящей через точки K, L и M, взятые на ребрах куба, то надо думать, что выполняемый ими рисунок будет сделан с должным пониманием положения искомой плоскости; точки K, L и M можно отметить цветными мелками или карандашами, треугольник KLM заштриховать.

В целях развития пространственных представлений учащихся следует предложить им указать различные возможные положения плоскостей, проходящих через точки K, L и M, каждая из которых до тех пор перемещается вдоль ребра куба, пока не совпадет с вершиной куба; следует построить плоскость, проходящую при заданном условии через вершины куба; понятно, что в сечении получится равносторонний треугольник, так как каждая его сторона является диагональю одной из равных граней куба (рис. 10). Необходимо в отдельных случаях те или иные задачи на построение использовать для решения задачи на вычисление. Так, в данном случае можно вычислить сторону полученного в сечении треугольника, а также его площадь, приняв за данное длину a ребра куба.

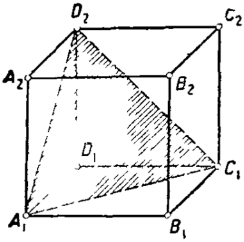

Рис. 10.

Элементарными задачами на построение являются также:

2. Построение произвольной точки, лежащей в данной плоскости или вне ее.

3. Построение произвольной прямой, лежащей в данной плоскости или вне ее.

4. Построение на данной плоскости прямой, проходящей через точку, данную на этой плоскости, и построение прямой, пересекающей данную плоскость.

5. Проведение прямой пересечения двух пересекающихся плоскостей.

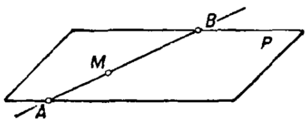

Рис. 11.

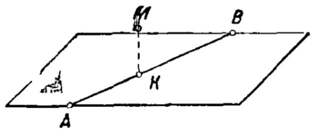

Рис. 12.

В целях правильного и четкого выполнения построения полезно дать учащимся следующие указания.

Если требуется изобразить плоскость P и точку M на ней, то иногда целесообразно для большей наглядности начертить на плоскости произвольную прямую, проходящую через заданную на плоскости точку M, например, прямую AB (рис. 11); это делается для того, чтобы можно было „видеть", что точка M действительно лежит на плоскости P, а не вне ее, как это имеет место на рисунке 12, на котором точка M изображена помещенной вне плоскости P, точка же K изображена лежащей на плоскости P и притом на прямой AB, расположенной в этой плоскости. Надо отметить, что, если точка дается на рисунке лежащей вне данной плоскости, целесообразно одновременно указать и ее расстояние от заданной плоскости, понятно, после прохождения вопроса о перпендикуляре к плоскости. Чтобы, однако, показать, что какая-либо прямая пересекает горизонтальную плоскость P и одновременно проходит через заданную на ней точку K, рекомендуется выполнять построение так, как это показано на рисунке 13, где из произвольных точек A и B, лежащих на заданной прямой по разные стороны от плоскости P, проведены к плоскости P перпендикуляры AA_1 и BB_1.

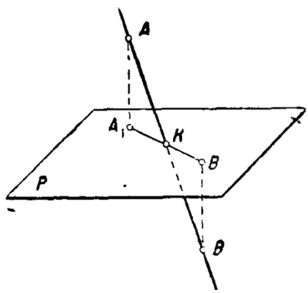

Рис. 13.