

И.К. Кикоин

Журнал Квант

№7, 1988

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
К38

К38 **Кикоин И.К.**
Журнал Квант: №7, 1988 / И.К. Кикоин – М.: Книга по Требованию, 2021. – 68 с.

ISBN 978-5-458-31348-3

ISBN 978-5-458-31348-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

биться этого — и 18-летний Штейнер (он родился в 1796 году) навсегда покинул родную деревню. Вскоре Якоб оказался в городке Иверден вблизи Берна, в руководимой Песталоцци школе-интернате, куда Песталоцци принял его бесплатно: ведь ни за учебу, ни за питание, ни за проживание Штейнеру платить было нечем.

У Песталоцци Штейнер провел 4 года. Сначала он учился в школе, а затем сам преподавал в ней математику. Однако Песталоцци быстро понял, что талант Штейнера заслуживает лучшего применения. Следуя настоятельными советам Песталоцци, Штейнер в 1818 году переезжает в Германию, в город Гейдельберг — ближайший к Ивердену крупный университетский центр.

Песталоцци рассчитывал, что Штейнер закончит Гейдельбергский университет и затем сам выберет свой путь; однако в полной мере эти надежды не осуществились. Песталоцци выдал Штейнеру некоторую сумму денег на дорогу и на первое обзаведение в чужом городе. Но дальше Штейнеру предстояло самому обеспечивать себя хлебом насущным. Никакой профессией, кроме профессии учителя математики, Штейнер не владел. Он вынужден был перегружать себя частными уроками, за которые платили ему мало: ведь он не имел никакого серьезного образования. Эти глубоко ненавидимые Штейнером уроки не давали ему возможности систематически посещать университет. За три года пребывания в Гейдельберге он сумел прослушать лишь несколько университетских курсов (что, впрочем, тоже было не мало, учитывая его уровень подготовки). Кроме того, в Гейдельберге Штейнер приобрел первые математические знакомства, ибо выдающиеся таланты швейцарца сразу же бросались в глаза.

В 1821 году друзья сообщили Штейнеру об открывшейся в Берлине вакансии преподавателя математики в одной из столичных гимназий, и он сразу же пустился в путь. Положение гимназического учителя давало бы ему регулярный заработок. Но для занятия столь желанного места ему

предстояло еще сдать экзамены, а их результаты никак не могли особенно воодушевить руководство гимназии.

Прежде всего у кандидата на должность учителя спросили, знаком ли он с курсом гимназии. На этот вопрос Штейнер ответил кратко: «Нет, не знаком». А что еще он мог сказать? Ведь в прусской гимназии проходились латынь и древнегреческий язык, с которыми сын швейцарского крестьянина был знаком не больше, чем мы с вами, мой читатель. Но и с экзаменом по математике дело обстояло не слишком благополучно: Штейнер показал обширные и глубокие знания по геометрии, но более чем скромные — по алгебре и тригонометрии, а в области математического анализа у него оказались зияющие пробелы. Однако бросающиеся в глаза выдающиеся геометрические способности молодого швейцарца и представленные им лестные характеристики сделали свое дело: Штейнеру было разрешено два года преподавать математику во всех классах, кроме выпускного. Он должен был за это время сдать экзамены по курсу гимназии (их Штейнер так никогда и не сдал) и дополнительный экзамен по математике (его Штейнер сдал значительно позже).

В средней школе Штейнер проработал 14 лет. Стало это возможным лишь после открытия в Берлине реального училища, в котором увеличено было число часов на математику и на естественные науки, но не преподавались древние языки (а следовательно, их знание не требовалось и от учителей училища). Однако, несмотря на то, что организатором и директором училища являлся также ученик Песталоцци, Штейнер сначала и здесь числился только помощником учителя. Лишь после сдачи дополнительных экзаменов (в 1829 году) он стал старшим учителем. Увы! Приходится признать, что раздражительный и невнимательный к людям Штейнер учителем был неважным. Он с увлечением занимался с одаренными учениками, придумывая для них яркие индивидуальные задания (в первую очередь — по геометрии, см. задачи 1,



Якоб Штейнер (1796—1863).

2, 6 и Приложение). Остальные же школьники только сердили его: отсутствие у учащегося способностей и интереса к математике Штейнер просто не мог понять. Иногда, когда становилось совсем уж невмоготу, он даже бросал регулярную работу в школе и вновь, как в молодости, добывал пропитание частными уроками. Так же обстояло дело и в тот, к счастью, краткий период, когда от преподавания в гимназии Штейнер за несдачу экзаменов был отстранен, а реальное училище еще не открылось. Однако он неизменно возвращался в родное училище, где к его выходкам привыкли, а математические его таланты высоко ценились.

В реальном училище, подбирая задачи для сильных школьников, Штейнер приобрел сохранившийся у него на всю жизнь интерес к элементарной геометрии. Рассмотрим несколько результатов Штейнера в этой области. Начнем с задач, идущих от великого Эйлера.

Эйлер установил, что три середины сторон произвольного треугольника,

три основания его высот и три точки, делящие пополам отрезки высот от точки их пересечения (ортоцентра треугольника) до вершин принадлежат одной окружности. Эта окружность называется окружностью Эйлера или окружностью девяти точек треугольника. Замечательно, что для каждого треугольника его окружность Эйлера касается вписанной и трех внеписанных окружностей (рис. 1). Этот факт часто называют теоремой Фейербаха по имени того, кто впервые его доказал; но мало кто знает, что незнакомый с результатом Фейербаха Штейнер доказал эту теорему всего через два года после ее первооткрывателя и сразу же опубликовал свой результат (так что многие математики познакомились с ним по публикации Штейнера, а не Фейербаха).

Задача 1. Пусть окружность S с центром в ортоцентре H треугольника ABC пересекает его средние линии B_1A_1 ($\parallel AB$), C_1B_1 ($\parallel BC$) и A_1C_1 ($\parallel CA$) соответственно в точках F и F_2 , D_1 и D_2 , E_1 и E_2 . Докажите, что $AD_1 = -AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$ (теорема Штейнера).

Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ перспективны с центром перспективы P , если прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 сходятся в одной точке P . Два «собственно подобных» треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (т. е. подобных и таких, что направления обхода $A \rightarrow B \rightarrow C$ и $A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow C_1$ одинаковы — оба совпадают с направлением вращения часовой стрелки или оба противоположны

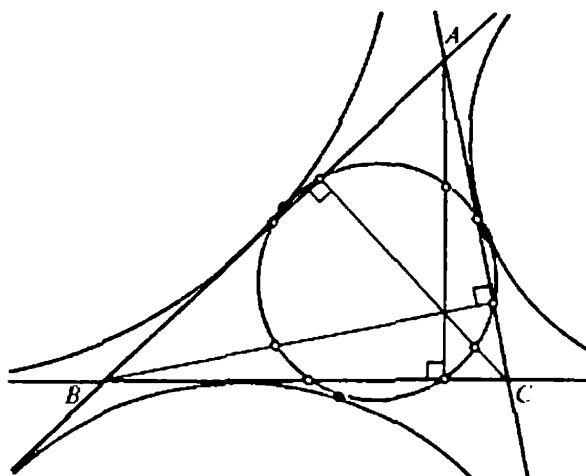


Рис. 1.

ему) всегда можно совместить *центроподобным поворотом* с центром Q , т. е. равномерным растяжением от Q или сжатием к Q (гомотетией), сопровождаемым поворотом вокруг Q (почему?); точка Q называется *центром подобия* треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Задача 2. Пусть a, b, c — прямые, образующие треугольник T ; пусть прямая l пересекает a, b, c в точках A_0, B_0, C_0 . Восстановим в этих точках перпендикуляры к сторонам треугольника T : $a_1 \perp a, b_1 \perp b, c_1 \perp c$. Обозначим треугольник, образованный прямыми a_1, b_1, c_1 , через t .

а) Тогда треугольники T и t собственно подобны и перспективны; описанные вокруг них окружности S и s взаимно перпендикулярны (т. е. перпендикулярны касательные к S и к s в точке их пересечения); точки $P, Q = S \cap s$ являются соответственно центром перспективы и центром подобия треугольников T и t (теоремы Штейнера).

б) Как изменятся приведенные теоремы, если прямые a_1, b_1, c_1 не перпендикулярны a, b и c , а образуют с a, b и c соответственно заданный (по величине и по направлению) угол α ?

Следующая серия задач, касающихся полного четырехсторонника, идет от великого Гаусса: Штейнер со вкусом выбирал предшественников!

Полным четырехсторонником $\mathcal{C}$ называется фигура, образованная четырьмя прямыми «общего положения» (т. е. такими, что никакие три не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны); треугольники, сторонами которых являются три из этих прямых, называются *треугольниками четырехсторонника* $\mathcal{C}$; точки пересечения прямых — *вершинами четырехсторонника* $\mathcal{C}$; отрезки, соединяющие «несмежные» (не принадлежащие одной из наших прямых) вершины, — *диагоналями четырехсторонника* $\mathcal{C}$.

Задачи

3 (теорема Гаусса). Середины трех диагоналей четырехсторонника $\mathcal{C}$ принадлежат одной прямой (рис. 2, а). Эта прямая называется *прямой Гаусса* четырехсторонника $\mathcal{C}$.

4. Описанные вокруг четырех тре-

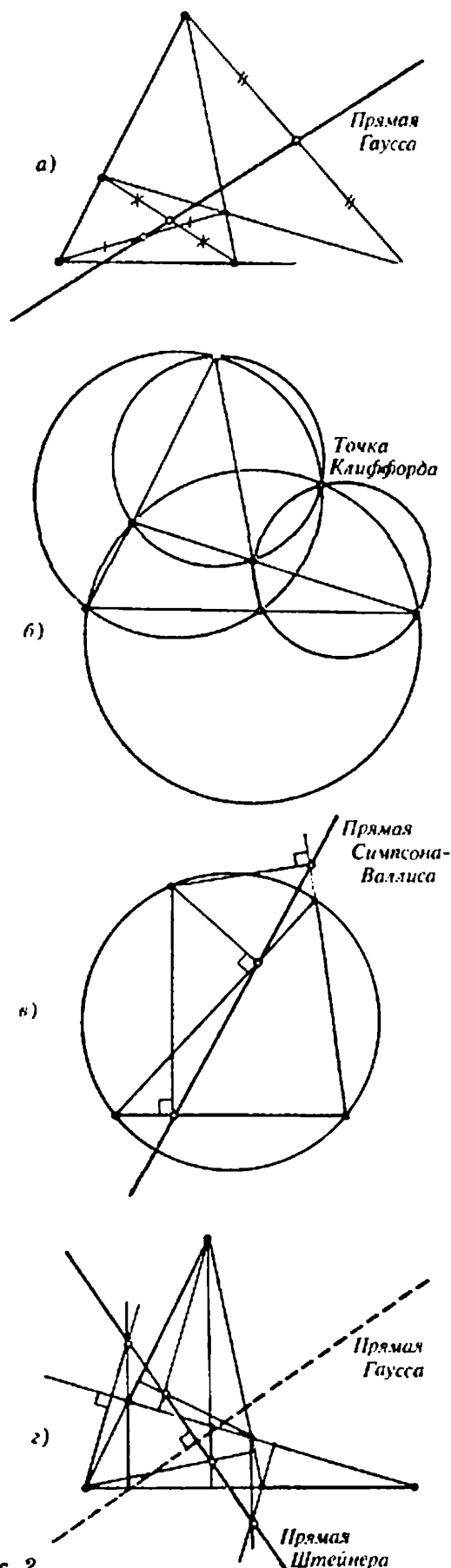


Рис. 2.



Уильям Кингдом Клиффорд (1845—1879).

угольников $\mathcal{C}$ окружности пересекаются в одной точке (рис. 2, б). Эта точка S называется *точкой Клиффорда четырехсторонника* $\mathcal{C}$.

Теорема из задачи 4 была известна и до Клиффорда. Он, однако, придумал замечательную конструкцию (*цепь Клиффорда*), в которую эта задача включается. Полным n -сторонником N назовем n прямых «общего положения»; N содержит n полных $(n-1)$ -сторонников $M_1, M_2, \dots, M_n$, получаемых отбрасыванием прямых по одной. Точкой Клиффорда «полного 2-сторонника» (a, b) назовем точку пересечения прямых a и b , а *окружностью Клиффорда полного 3-сторонника* (a, b, c) — окружность, содержащую три точки Клиффорда 2-сторонников (a, b) , (a, c) и (b, c) (т. е. окружность, описанную вокруг треугольника со сторонами a, b, c). Далее, если n четно, то n окружностей Клиффорда $(n-1)$ -сторонников $M_1, M_2, \dots, M_n$ пересекаются в одной точке — *точке Клиффорда полного n -сторонника* N (при $n=4$ — это теорема задачи 4). Если же n нечетно, то n

точек Клиффорда $(n-1)$ -сторонников $M_1, M_2, \dots, M_n$ принадлежат одной окружности — *окружности Клиффорда полного n -сторонника* N .

Задачи

5 (вспомогательные задачи). а) Основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника T из точки M описанной вокруг него окружности, принадлежат одной прямой (рис. 2, в). Эта прямая w называется *прямой Симпсона — Валлиса* точки M относительно треугольника T .

б) Прямая w делит пополам отрезок MN , где N — ортоцентр треугольника T .

6 (теоремы Штейнера). а) Ортоцентры четырех треугольников $\mathcal{C}$ принадлежат одной прямой (рис. 2, г). Эта прямая s называется *прямой Штейнера четырехсторонника* $\mathcal{C}$.

б) Для каждого полного четырехсторонника $\mathcal{C}$ его прямая Штейнера s перпендикулярна его прямой Гаусса g .

Продолжим теперь жизнеописание Штейнера. Самой большой его удачей в берлинский период жизни было знакомство с математиком-любителем, богатым промышленником, талантливым инженером и железнодорожным магнатом Августом Леопольдом Крелле (1780—1855). Видным ученым Крелле не был, хотя он и состоял членом Берлинской (Прусской) и членом-корреспондентом Петербургской (Российской) академий наук. Однако этих отличий он удостоился скорее за свои инженерные достижения и организационные таланты, чем за научные успехи. Но крупный предприниматель обязан хорошо разбираться в людях — и Крелле доказал, что этими способностями он обладал в полной мере.

Первый специализированный математический журнал в Европе был основан в 1810 году известным французским математиком Жозефом Диакзом Жергоном (1771—1859) и назывался «Анналы Жергона». Крелле решил создать математический журнал в Германии. Обдумывая состав будущих авторов журнала, Крелле в первую очередь рассчитывал на двух совершенно неизвестных профессиональным математикам лиц, в таланты

которых он глубоко верил: на недоучившегося норвежского студента Н. Х. Абеля и на учителя средней школы Якоба Штейнера. Первый выпуск нового журнала, который инженер Крелле назвал: «Журнал чистой и прикладной математики», вышел в 1826 году. Основное его содержание (как и содержание следующих выпусков журнала) составляли статьи Абеля и Штейнера. Так, в первых трех томах журнала напечатано 15 (!) статей и заметок Штейнера. «Журнал Крелле», как его тут же стали именовать математики, стал «первым математическим журналом мира». (В этой связи Жергон даже закрыл в 1831 году свой журнал. Впрочем, в 1836 году он был возобновлен другим французским математиком Жозефом Лиувилем (1809—1882) под названием, в точности копирующим название журнала Крелле.)

С созданием журнала Крелле Штейнер получил трибуну, с которой он мог возвещать свои геометрические идеи. К тому же влиятельный Крелле стал инициатором избрания Штейнера (в 1834 году) в Берлинскую Академию наук: выдающиеся научные труды Штейнера, опубликованные в журнале Крелле, давали для этого достаточные основания. После этого было уже нетрудно добиться избрания Штейнера профессором — и в 1835 году Штейнер расстался со средней школой, заняв место профессора естественно-научного отделения Берлинского университета.

Замечательно, что неважный школьный учитель Штейнер оказался выдающимся университетским профессором. В школе его раздражали чуждые математике ученики; интересующиеся же геометрией студенты вдохновляли Штейнера, и его яркие по форме и темпераментные по исполнению лекции сразу же стали пользоваться очень большим успехом: даже швейцарский акцент необычного профессора нравился студентам. Импонировало студентам и то, что Штейнер постоянно ставил на своих лекциях задачи и вызывал слушателей к доске для решения этих задач. (В наши дни так же строил свои лекции в Московском уни-

верситете академик И. М. Гельфанд — и они тоже имели у студентов большой успех.)

Этот успех лекций Штейнера в истории геометрии частично сыграл даже отрицательную роль. Так, еще и во второй половине нашего столетия, лекции, скажем, по проективной геометрии во многих университетах мира читались по сильно к тому времени устаревшей схеме, разработанной не получившим систематического образования швейцарским пастухом. При этом использовалась придуманная Штейнером архаическая терминология, не употребляемая больше ни в одном разделе математики.

Штейнер чувствовал себя лидером немецкой геометрии; при этом на отступлении от своих установок он реагировал зачастую достаточно болезненно. Самой заметной фигурой в современной Штейнеру геометрии в Германии был профессор Боннского университета Юлиус Плюккер (1801—1868). Однако Плюккер представлял *аналитическое* направление геометрии, стремящееся заменить геометрические образы их записью в координатах и затем работать с координатными представлениями геометрических объектов, используя совершенный алгебраический аппарат. Уже одно это было крайне антипатично «чистому» геометру Штейнеру, аналитических методов в геометрии не признававшему. Кроме того, возможно, Плюккер имел в глазах выходца из бедной крестьянской семьи Штейнера, так и не получившего университетского образования, еще два недостатка. Плюккер происходил из семьи рейнских промышленных магнатов и был чрезвычайно богат. Помимо того, он окончил два университета: в Бонне и в Париже. Поэтому немудрено, что работы Плюккера вызывали ярость Штейнера.

Плюккер в своих работах бывал неаккуратен — описки и другие дефекты, обычно легко устранимые, встречались у него нередко, так что почва для нападок Штейнера и в самом деле была. Резкая (и чаще всего несправедливая) критика Штейнера так утомила Плюккера, что он времен-



Давид Гильберт (1862—1943).

но даже вовсе отказался от геометрии, вернувшись к ней (с выдающимися успехами) лишь после смерти Штейнера. Пока же он обратился к экспериментальной физике, успев и в этой области очень много. В частности, возможно, что без нападков Штейнера на Плюккера человечество позже пришло бы к идеям физического структурного анализа и к открытию так называемых катодных лучей, осуществленному учеником Плюккера Иоганном Вильгельмом Гитторгом (1824—1914).

Так даже недостатки больших ученых иногда оборачиваются благом для науки!

Последние два года жизни Штейнер много болел — здесь сказались перенапряжение и недоедание в ранние годы. Для излечения он часто ездил в родную Швейцарию, но в 1863 году из такой поездки он так и не вернулся: Штейнер умер 1 апреля 1863 года в полном одиночестве в номере гостиницы в Берне. Длительный период материальной необеспеченности помещал ему обзавестись семьей. Он за-

вещал некоторую сумму денег Берлинской Академии наук — для учреждения премии за сочинения по геометрии (конечно же, «чистой»!), и руководству кантона, где он родился — на премию за успехи в области математики ученикам начальной школы для детей бедняков.

Приложение

Построения с помощью одной линейки
Постулаты 1—3 Евклидовых «Начал» утверждают возможность неограниченного продолжения заданного отрезка прямой, проведения прямой через две известные точки и проведения окружности с заданным центром (точкой) и радиусом (отрезком). Вместе с подразумеваемыми Евклидом, но явно не формулируемыми, постулатами о возможности указать точку пересечения двух заданных (например, каждая — двумя своими точками) прямых, двух известных (определенных своими центрами и радиусами) окружностей и заданных прямой и окружности эти постулаты описывают весь массив «разрешимых по Евклиду» задач на построение: эти задачи должны сводиться к перечисленным постулатам, т. е. решаться с помощью линейки и циркуля.

В 1797 году в Италии была издана книга Лоренцо Маскерони (1750—1800) «Геометрия циркуля», в которой устанавливалось, что *все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, разрешимы также с помощью одного лишь циркуля* (с тем естественным ограничением, что отрезок прямой, понятно, циркулем быть построен не может, — однако, зная две его точки, можно циркулем указать неограниченное количество других точек отрезка). Гораздо позже была найдена изданная в 1672 году (за 125 лет до Маскерони!) по-голландски и по-датски книга датчанина Георга Мора (1640—1697), в которой была доказана та же теорема.

Штейнер же заинтересовался построениями, осуществимыми с помощью одной линейки (см. задачи 1—3 ниже). Он последовательно рассмотрел построения одной линейкой, выполнимые при наличии на плоскости а) двух параллельных прямых или отрезка, разделенного известной точкой в данном рациональном отношении; б) параллелограмма; в) квадрата; г) окружности с известным центром — и установил, что в случае г) разрешимы все «разрешимые по Евклиду» задачи на построение (конечно, окружность с данными центром и радиусом мы одной линейкой

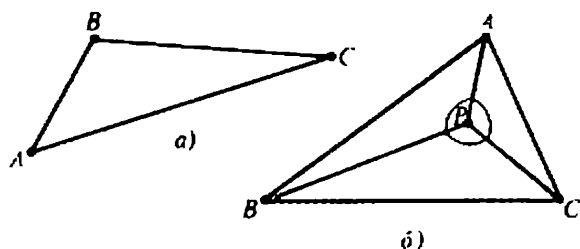


Рис. 3.

построить не можем, — но можем найти любое число точек этой окружности).

Задачи

1°. Даны параллельные прямые AB и l . Постройте: а) середину C отрезка AB ; б) такую точку D этого отрезка, что $AD = AB/n$, где n — заданное (натуральное) число.

2°. Даны точки A, B и а) середина C отрезка AB ; б) такая точка D этого отрезка, что $AD = AB/n$. Проведите через заданную точку M прямую $l \parallel AB$.

3°. На плоскости заданы точка M , прямая l и а) параллелограмм, б) квадрат. Проведите через точку M в случае а) прямую $m \parallel l$, в случае б) — прямую $m \perp l$.

4°. На плоскости даны окружность S с центром O и а) 5 точек: A, B, Q, K, L ; б) 6 точек Q, K, L, P, M, N . Постройте в случае а) точки пересечения прямой AB и окружности с центром Q и радиусом KL ; в случае б) — точки пересечения окружностей с центрами Q и P и радиусами KL и MN .

5° (задача Гильберта). На плоскости дана окружность S . Докажите, что одной линейкой — без циркуля! — построить центр этой окружности невозможно.

Кратчайшие сети дорог

Штейнер часто задавал своим студентам задачи, требующие указать самую лучшую в том или ином отношении фигуру или конфигурацию. Вот одна из его любимых задач:

Имеются три деревни: A, B, C . Требуется соединить их минимальной по длине сетью дорог.

Более или менее ясно (хотя и это требуется еще доказать), что решение здесь задается либо двумя (кроме длиннейшей) сторонами $\triangle ABC$, либо отрезками AP, BP, CP , где сумма расстояний от P до вершин $\triangle ABC$ — наименьшая возможная (рис. 3, а, б). При этом в случае рисунка 3, б отрезки AP, BP, CP должны образовывать в точке P одинаковые углы, ибо если, скажем $\angle APB \neq \angle APC$, то можно найти такую точку Q , что $QA = PA$, а $QB + QC < PB + PC$. Отсюда

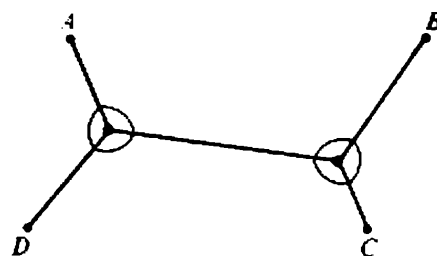


Рис. 4.

следует, что решение задачи Штейнера дается рисунком 3, б, если каждый угол $\triangle ABC$ меньше 120° , и рисунком 3, а, если $\angle B \geq 120^\circ$.

В случае, когда число деревень $n > 3$, «минимальная» система соединяющих их дорог может оказаться родственной рисунку 3, а, т. е. состоять из каких-то дорог, соединяющих наши деревни — такая система дорог называется *остовной*. Перебором (если надо — с помощью ЭВМ; сейчас к решению «общей» задачи Штейнера с большим числом «деревень» активно привлекаются компьютеры) всегда можно найти самую короткую остовную систему дорог. Но чаще лучшей является сеть дорог, родственная рисунку 3, б, т. е. содержащая дополнительные «узлы» сети, в которых сходятся три дороги, попарно образующие между собой углы в 120° — такие узлы называются *точками Штейнера*, а содержащие их сети дорог — сетями Штейнера (рис. 4). Увы! Никаких общих методов отыскания минимальных сетей Штейнера, соединяющих n пунктов, у нас нет; неизвестно также, когда «абсолютно минимальная» сеть дорог будет остовной, а когда — сетью Штейнера. Правда, предполагают, что минимальная остовная сеть дорог очень заметно превышает минимальную сеть Штейнера не может: в самом худшем случае она окажется всего в $(2/3)\sqrt{3}$ раз (т. е. примерно на 15 %) длиннее — но и эта гипотеза доказана пока всего лишь для случая $n \leq 5$.

Вот как непроста оказалась «общая» задача Штейнера о кратчайшей сети путей, соединяющих n точек (у самого Штейнера для случая $n > 3$ имелись лишь отдельные примеры таких сетей — но и сегодня мы знаем почти так же мало, как знал он!).

Задачи

6°. Докажите сформулированный результат Штейнера.

7°. Найдите кратчайшую сеть путей, соединяющих 4 точки A, B, C, D , являющиеся вершинами: а) квадрата; б) треугольной пирамиды (тетраэдра).

ФЛЕКСАГОНЫ, ФЛЕКСОРЫ, ФЛЕКСМАНЫ

А. А. ПАНОВ

Приглашаем вас на короткую экскурсию в загадочный мир флексагонов и флексоров — бумажных игрушек, обладающих поразительной способностью внезапно менять свою форму и цвет. Любую из этих игрушек вы сумеете склеить за самое короткое время.

Но прежде всего — о названии статьи. Английское *to flex* означает складываться, сгибаться, гнуться.

А теперь приготовьте лист ватмана или плотной альбомной бумаги, карандаши, ножницы, клей — и за дело.

Гексафлексгон

Флексгон — это склеенный из бумаги многоугольник, который, изгибаясь и складываясь, может переходить во все новые и новые состояния.

Гексафлексгон — это флексгон, имеющий форму правильного шестиугольника. Вырежем из бумаги полоску шириной 2,5 см, состоящую из десяти правильных треугольников, и раскрасим ее обе стороны — прямую и обратную, как на рисунке 1.

Несколько раз перегнем полоску по границам треугольников и продолжим изготовление флексагона, складывая полоску, как на рисунке 2.

Теперь остается только подогнуть вниз синий треугольник, склеить друг с другом две неокрашенные треугольные поверхности — и флексгон готов. Одна сторона у него красная, другая — синяя. Чтобы извлечь на свет его третью — зеленую поверхность, необходимо действовать следующим образом. Сначала флексгон ставится на плоскость стола так, чтобы он опирался на три нижние точки. Эти точки нужно поджать друг к другу, и в момент их полного сближения флексгон сам собой вывернется наизнанку, обнажая свою зеленую поверх-

ность. Теперь остается развести верхние точки флексагона в стороны, и флексгон готов к новой трансформации. Так, последовательно переходя из одного состояния в другое, флексгон будет поочередно предъявлять нам все свои три поверхности. Рисунок 3 дает некоторое представление об изгибании флексагона.

Сделанная нами модель является простейшей из обширного семейства гексафлексгонов, описанного в книге Мартина Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (М., Мир, 1971). В этой интереснейшей книге изложена история открытия гексафлексгонов и подробно рассказано о том, как можно строить модели с большим числом поверхностей.

Двойное шарнирное соединение

Двойное шарнирное соединение — это конструктивный элемент, служащий основой для еще одного ряда флексгонных моделей. Вырежем из бумаги два прямоугольника размером $2,5 \times 5$ см и две полоски размером 1×7 см. На обоих концах каждой полоски отогнем по квадрату 1×1 см. Раскрасим прямоугольники и полоски, как на рисунке 4, где представлены их прямые и обратные стороны.

Приклеим обе полоски к одному из прямоугольников, соединяя незакрашенные квадраты с незакрашенными, и завернем обе полоски на красную сторону прямоугольника. Должно получиться то, что изображено на рисунке 5.

Сверху красной стороной наложим второй прямоугольник и снова склеим незакрашенные квадраты. Это и есть двойное шарнирное соединение. Оно само является простейшим флексгоном, который может находиться в

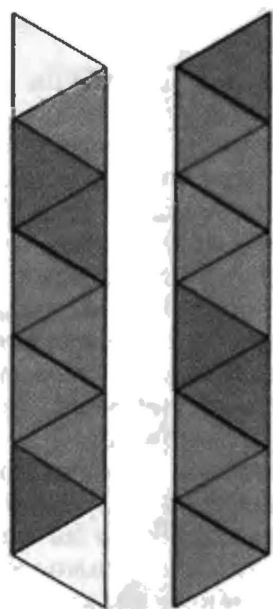


Рис. 1.

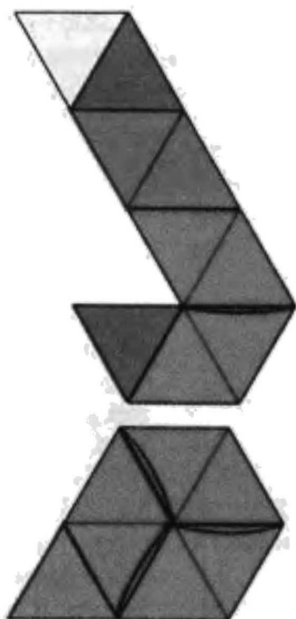


Рис. 2.

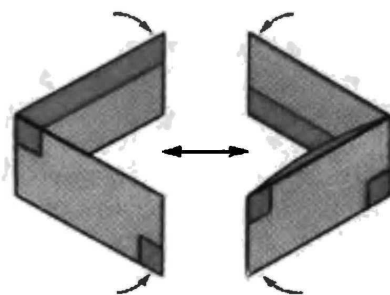


Рис. 6.

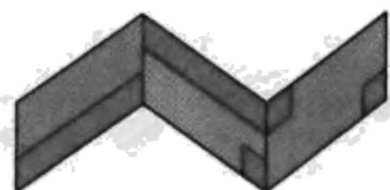


Рис. 7.

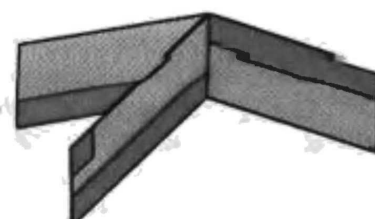
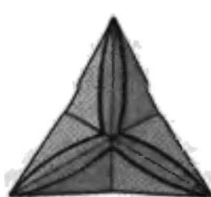
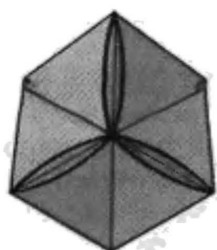
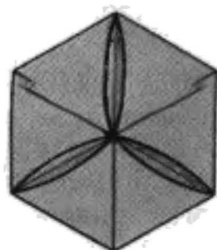


Рис. 8.

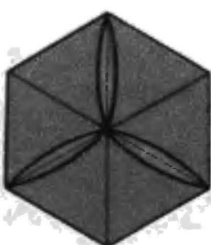
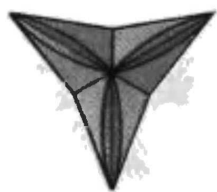
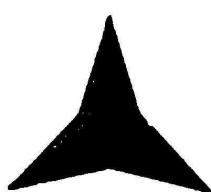
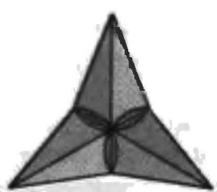
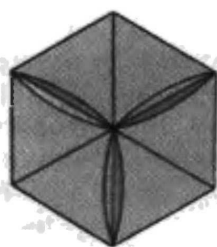


Рис. 3.

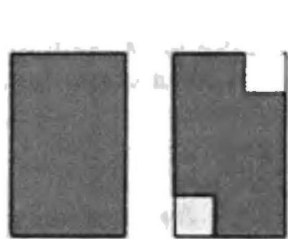


Рис. 4.

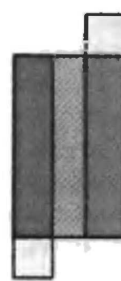
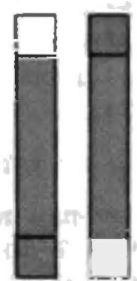


Рис. 5.

Рис. 9.

двух состояниях. Чтобы перейти от одного состояния к другому, нужно сблизить удаленные стороны прямоугольников (рис. 6).

В упомянутой книге Гарднера описано целое семейство флексагонов, в конструкции которых использовано двойное шарнирное соединение. Они называются тетрафлексагонами.

Флексоцепь 1

Возьмем двойное шарнирное соединение и присоединим к нему еще один прямоугольник. Получится короткая цепочка из трех прямоугольников, содержащая два двойных шарнирных соединения — флексоцепь (рис. 7).

Она может находиться уже в четырех состояниях. Еще одно из них изображено на рисунке 8.

Не будем останавливаться на достигнутом и удлиним нашу цепочку до 15—20 прямоугольников (рис. 9). Если цепь содержит n двойных шарнирных соединений, т. е. $n+1$ прямоугольников, то она может находиться в 2^n состояниях. Например, цепочка, состоящая из 21 прямоугольника может находиться всего в $2^{20} = 1\,048\,576$ состояниях. Забавно наблюдать, как такая флексоцепь, изгибаясь, лежит на столе. Легкого прикосновения достаточно, чтобы перевести ее в новое состояние.

Флексоны

Пусть флексоцепь находится в каком-то определенном состоянии. Возьмем-ся за оба ее конца и начнем ее растягивать. Пройдя через ряд состояний, цепочка окажется в каком-то устойчивом состоянии, например, как на рисунке 10.

Устойчивые состояния представляют собой прямолинейную цепочку, от которой в некоторых узлах отходят единичные прямоугольники. Такие устойчивые состояния флексоцепи будем называть флексонными состояниями, а отходящие от цепи прямоугольники — флексонами. Мы выбрали такое название, чтобы подчеркнуть аналогию флексонов и элементарных частиц. Действительно, флексоны об-

ладают следующими двумя замечательными свойствами:

флексоны могут перемещаться
вдоль флексоцепи;
при столкновении флексоны
«аннигилируют»

Для того чтобы заставить флексон сдвинуться, нужно приблизить его свободную сторону к флексоцепи — сработает двойное шарнирное соединение и флексон переместится (рис. 11). Последовательно перемещаясь, флексон может свободно двигаться вдоль всей флексоцепи.

Не буду описывать, как происходит аннигиляция флексонов, и говорить о других их свойствах, чтобы не портить вам удовольствия от самостоятельной работы с флексоцепью.

Флексоцепь 2

На этот раз мы будем строить флексоцепь не из прямоугольников, а из квадратов размером $2,5 \times 2,5$ см. Снова рассмотрим двойное шарнирное соединение и попытаемся подсоединить к нему третий квадрат. Это можно сделать двумя способами. Либо так, как показано на рисунке 12, а (как для флексоцепи 1), либо как на рисунке 12, б.

Сейчас мы продолжим цепь вторым способом и получившуюся цепочку назовем флексоцепью 2 (рис. 13). Это тоже довольно занимательная модель, и я предлагаю ее вам для исследования.

Любопытно замкнуть флексоцепь 2, состоящую из четырех квадратов (рис. 14). Получившийся флексагон можно перегибать в двух перпендикулярных направлениях, и он может находиться в четырех состояниях, последовательно переходя из одного в другое.

На этом мы заканчиваем наш рассказ о флексагонах. Подошел черед флексоров.

Кольцо из тетраэдров

На этот раз на листе бумаги нужно разместить фигуру, состоящую из 40 правильных треугольников и 13 клапанов (рис. 15). После того как вы ее