

А.В. Васильев

Новые идеи в математике

Выпуск 4. Учение о числах

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
А11

A11 **А.В. Васильев**
Новые идеи в математике: Выпуск 4. Учение о числах / А.В. Васильев – М.:
Книга по Требованию, 2019. – 128 с.

ISBN 978-5-458-53419-2

ISBN 978-5-458-53419-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2019

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2019

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

жается десятымъ знакомъ,—нулемъ. Мысль облегчить работу счета путемъ образованія группъ единицъ и разсматриванія ихъ, какъ новыхъ единицъ, сама по себѣ очень естественна. Она была осуществлена еще задолго до образованія всякой цыфровой символики, которая поэтому и воспользовалась ею. Но изобрѣтенная индусскими математиками позиціонная система провела систематически эту мысль по принципу десятичнаго метода. При этомъ она добилась того огромнаго преимущества, что обходится съ возможно малымъ количествомъ знаковъ, пользуясь, помимо нуля, лишь столькими цыфровыми символами, сколько единицъ содержится въ низшемъ классѣ. Что при этомъ преимущество досталось десятичной системѣ, это—какъ уже сказано нами—дѣло условнаго соглашенія. Можно признать, что она удовлетворяетъ практическимъ потребностямъ счета, занимая золотую середину между обиліемъ знаковъ и недостаткомъ ихъ. Если бы еще болѣе ограничили число символовъ и, значитъ, единицъ каждаго класса, какъ въ пятеричной системѣ многихъ дикихъ народовъ, то уже при небольшихъ суммахъ пришлось бы имѣть дѣло со слишкомъ многими классами. А если бы остановились на двадцатеричной или шестидесятеричной системахъ, то обиліе знаковъ стало бы мѣшать ихъ различенію другъ отъ друга. Почти тѣ же преимущества, что и десятичная система, имѣетъ и двѣнадцатеричная система, намекъ на которую имѣется въ нашемъ раздѣленіи дня; къ тому же она имѣла бы еще и то важное для дѣленія преимущество, что единицы высшихъ классовъ можно было бы разложить на большее количество множителей, чѣмъ въ случаѣ десяти и его степеней. Но объективныя условія раздѣленія дня и года, изъ которыхъ могла развиваться двѣнадцатеричная система, не были особенно принудительнаго характера; къ тому же ихъ можно было свести къ отношеніямъ цѣлыхъ

чиселъ только приблизительнонымъ образомъ. Поэтому верхъ должна была взять десятичная система, основывающаяся на неизмѣнныхъ свойствахъ самого человека, на количествѣ пальцевъ, которыми пользуются въ простѣйшихъ случаяхъ счета.

Въ позиціонной системѣ—не говоря о той специальной формѣ, которую она приняла въ качествѣ десятичной системы—любое число выражается вообще рядомъ вида:

$$\dots e\beta^4 + d\beta^3 + c\beta^2 + b\beta + a,$$

въ которомъ $a, b, c, d \dots$ означаютъ величины единицъ слѣдующихъ другъ за другомъ классовъ, а β — количество цифровыхъ символовъ, употребляемыхъ въ данной системѣ. Слѣдовательно, въ десятичной системѣ $\beta = 10$, а буквы $a, b, c, d \dots$ могутъ обозначать любую изъ цифръ $0, 1 \dots 9$. Рядъ этотъ ясно показываетъ математическій характеръ позиціонной системы: каждое число благодаря ей разлагается на рядъ суммъ, расположенныхъ по нисходящимъ степенямъ основного числа системы. Такъ какъ рядъ можетъ быть продолженъ до любой степени β , то онъ не ограниченъ никакимъ числомъ, и при этомъ можно вполне обходиться даннымъ небольшимъ запасомъ цифровыхъ символовъ. Такимъ образомъ позиціонная система удовлетворила требованію, поставленному наличностью безграничнаго множества чиселъ. Дѣйствительно, уже индусскіе математики замѣтили, что хотя безконечное число, понятіе котораго заключается въ указанномъ выше требованіи, и не можетъ быть выражено никакимъ реальнымъ рядомъ суммъ, но оно можетъ быть выражено съ помощью того самаго символа, который обозначаетъ отсутствіе какой-нибудь единицы, въ видѣ дѣленія вида $\frac{a}{0}$ ¹⁾.

¹⁾ М. Саптор. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, стр. 523.

Иначе обстоит дѣло съ нижней границей чиселъ. Можно, конечно, выразить числа, меньшія единицы и сколь угодно малыя, съ помощью правильныхъ дробей. Но такъ какъ знаменатели этихъ дробей могутъ имѣть всевозможныя значенія, то первоначальные естественные методы счета лишены принципа, дѣлающаго сравнимыми всѣ подобныя числа. Позиціонная система даетъ этотъ принципъ, продолжая попросту въ противоположномъ направленіи построеніе числа въ видѣ ряда суммъ. Числа, большія единицы, выражаются въ ней съ помощью образованія новыхъ единицъ, растущихъ прямо пропорціоально возрастающимъ степенямъ основного числа системы. Такимъ же точно образомъ числа, меньшія единицы, выражаются съ помощью новыхъ единицъ, обратно пропорціоальныхъ возрастающимъ степенямъ основного числа. Такъ возникаетъ въ десятичной системѣ дополненіе ея съ помощью десятичныхъ дробей; и въ общемъ видѣ любое число можетъ быть выражено рядомъ

$$\dots e\beta^4 + d\beta^3 + c\beta^2 + b\beta + a + \frac{b'}{\beta} + \frac{c'}{\beta^2} + \frac{d'}{\beta^3} + \frac{e'}{\beta^4} + \dots$$

при чемъ рядъ этотъ можетъ бесконечно расти по обѣ стороны, указывая тѣмъ на оба понятія бесконечно большого и бесконечно малаго числа. Благодаря этому расширенію позиціонная система приспособилась къ тѣмъ обобщеніямъ первоначальнаго понятія числа, которыя оно получило вслѣдствіе развитія дробныхъ и въ особенности ирраціональных чиселъ.

в. Числовые виды и числовыя системы.

Благодаря простымъ ариѳметическимъ дѣйствіямъ и ихъ повторенію изъ первоначальной системы цѣлыхъ положительныхъ чиселъ возникаютъ новыя понятія о числахъ, которыя можно въ то же время приложить къ

геометрическимъ или любымъ другимъ величинамъ. Вообще имѣется двоякаго рода возможность для порожденія новыхъ понятій о числахъ. Эти понятія могутъ возникнуть, во-первыхъ, благодаря примѣненію принципа перманентности къ результатамъ арифметическихъ дѣйствій, при чемъ предполагается, что съ этими результатами можно производить всегда тѣ же самыя дѣйствія, что и съ первоначальными числами. Во-вторыхъ, ихъ можно образовать посредствомъ примѣненія принципа постоянства къ любымъ, даннымъ въ наглядномъ представленіи, объектамъ, при чемъ допускаютъ, что надъ каждымъ предметомъ, подходящимъ вообще подъ понятіе величины, можно производить такое же измѣреніе съ помощью чиселъ, какъ и надъ дискретными объектами. Эти, исторически слѣдующія другъ за другомъ, формы возникновенія вторичныхъ понятій о числахъ носятъ съ логической точки зрѣнія—каждая по своимъ особннымъ основаніямъ—характеръ случайности. Въ первомъ случаѣ разсматриваніе въ качествѣ чиселъ результатовъ счета, которые не могутъ быть выражены числами, представляется какимъ то произвольнымъ актомъ. Во второмъ же случаѣ новыя понятія возникаютъ изъ эмпирическихъ свойствъ нашего чувственного воспріятія, и они поэтому могли бы быть совсѣмъ иными, если бы эти свойства измѣнились. Поэтому можно считать правомѣрной попытку замѣнить обѣ эти внѣшнія формы развитія понятія числа внутренней формой, имманентной самому первоначальному понятію числа.

Но эта третья форма порожденія—которую, въ отличіе отъ арифметической и геометрической, мы назовемъ логической—можетъ привести къ цѣли лишь въ томъ случаѣ, если она включитъ уже въ первоначальное понятіе числа тѣ логическіе признаки, которые обнаруживаются во вторичныхъ понятіяхъ числа. Самый простой

путь къ этому заключается въ введеніи, помимо понятія единицы и совокупности единицъ, или количества, еще понятія элемента, при чемъ заранѣе оставляють открытой возможность того, что единица состоитъ изъ расположенныхъ любымъ образомъ, но разложимыхъ сами далѣе, элементовъ, которые называются также „арифметическими точками“. Логическое отличіе отъ указанныхъ ранѣе видоизмѣненій первоначальнаго понятія числа, путемъ примѣненія принциповъ перманентности и постоянства заключаются въ томъ, что это первоначальное понятіе числа само уже подводится подъ понятіе многообразія, изъ котораго послѣдовательно путемъ детерминаціи развиваются его логически возможные формы¹⁾. Среди этихъ формъ должны неизбѣжнымъ образомъ оказаться и различныя понятія числа. Такимъ образомъ указываемое общее понятіе содержитъ въ себѣ двѣ составныя части, варьированіе которыхъ даетъ начало различнымъ линіямъ развитія: 1) понятіе послѣдняго, абсолютно неразложимаго, не имѣющаго никакой величины, элемента и 2) понятіе единицы или отдѣльнаго, заключающаго въ себѣ какое-нибудь содержаніе, но абстрагирующаго отъ объективнаго состава этого содержанія, акта мысли. Варьированію перваго изъ этихъ понятій соотвѣтствуютъ различія цѣлыхъ и дробныхъ, раціональныхъ и ирраціональных чиселъ; изъ измѣненія втораго возникаютъ различія положительныхъ, отрицательныхъ, мнимыхъ и комплексныхъ чиселъ. Обѣ линіи развитія имѣютъ совершенно различное значеніе. Благодаря первой измѣняется внутреннее строеніе, благодаря второй — внѣшняя форма понятія числа. Первая относится къ виду счисленія, вторая — къ направленію его. Поэтому представляется цѣлесообразнымъ отличить обѣ формы числа и различ-

¹⁾ О понятіи многообразія вообще см. мою—System der Philosophie³, I, стр. 233 и сл.

ными названіями; мы назовемъ первыя числовыми видами (*Zahlarten*), вторыя—числовыми системами (*Zahlsysteme*). Такъ какъ указанныя выше измѣненія понятій могутъ происходить независимо другъ отъ друга, то, впрочемъ, въ каждой числовой системѣ возможны различныя числовыя виды ¹⁾).

Простѣйшій числовой видъ представляютъ цѣлыя числа, потому что въ этомъ случаѣ понятія единицы и элемента покрываютъ другъ друга. Ихъ ближайшей реализаціей въ интуиціи является временная послѣдовательность актовъ мысли, такъ какъ единица соответствуетъ акту мысли при абстрагированіи отъ всякаго содержанія. Но и, допуская эту психологическую основу понятія числа, не слѣдуетъ какъ это сдѣлалъ В. Р. Гамильтонъ—выводить также логически число изъ времени ²⁾. Если при извѣстныхъ обстоятель-

¹⁾ Среди математиковъ широко распространено воззрѣніе—особенно ярко выраженное Л. Кронекеромъ—согласно которому всѣ эти видоизмѣненія понятія числа разсматриваются, какъ преобразования его, возникшія изъ примѣненія его къ предметамъ нагляднаго представленія, и чужды чисто логическому понятію числа (ср. Kroneker. Über den Zahlbegriff, Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik, т. 101, стр. 337 и сл., и Philosophische Aufsätze, Ed. Zeller zu seinem 50 jährigen Doktor-Jubiläum gewidmet, стр. 265). Но при этомъ забываютъ, что уже въ случаѣ первоначальнаго понятія количества, какъ и при всѣхъ дальнѣйшихъ формахъ его, слѣдуетъ отличать эмпирическое происхожденіе и абстрактно логическое содержаніе. Если принять это въ расчетъ, то отношеніе понятія къ его интуитивной основѣ по существу такое же въ случаѣ ирраціональных и мнимыхъ чиселъ, какъ и въ случаѣ простыхъ цѣлыхъ чиселъ. Если Кронекеръ думаетъ, что когда-нибудь удастся „ариометизировать“ все содержаніе другихъ математическихъ дисциплинъ, т. е., „обосновать исключительно и цѣликомъ на понятіи числа, взятомъ въ самомъ узкомъ смыслѣ слова, и, значитъ, устранить всѣ модификаціи и расширенія этого понятія“, то путемъ, на которомъ уже произошло это „ариометизированіе“ всѣхъ понятій величины, является имманентно присущее именно первоначальному понятію числа, логическое дальнѣйшее развитіе въ другіе числовыя виды и числовыя системы.

²⁾ W. R. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin, 1853. Preface. Гамильтонъ ссылается при этомъ—но безъ всякаго основанія—на Канта. Кантъ постоянно сводитъ понятіе числа черезъ посредство функціи счета къ функціи времени, но всегда предпо-

ствахъ мы уже психологически можемъ вообразить себѣ одновременными нѣсколько актовъ мысли, то логически вообще нѣтъ нужды принимать какъ бы то ни было въ расчетъ временную послѣдовательность единицъ. Здѣсь необходима только одна предпосылка, именно, что единицы вообще соединяются въ нѣкое цѣлое. Поэтому съ логической точки зрѣнія число есть понятіе *sui generis*, которое нельзя свести къ времени, какъ нельзя свести его и къ пространству. Если бы это было иначе, то было бы непонятно, какъ возможно развить логически понятіе числа независимо отъ этихъ наглядныхъ представлений въ его различныхъ формахъ.

Въ случаѣ дробныхъ чиселъ понятія единицы и элемента уже не соответствуютъ болѣе другъ другу. Здѣсь опредѣленныя единицы разлагаются на элементы, масса которыхъ измѣняется въ зависимости отъ того, что требуется: числитель дроби содержитъ количество соединяемыхъ вмѣстѣ элементовъ, знаменатель же указываетъ на то, сколько элементовъ содержится въ единицѣ. Такъ какъ это послѣднее количество можетъ быть опять-таки выражено числомъ, то элементы образуютъ новыя единицы, удовлетворяющія тому условію, что первоначальныя единицы дѣлятся на нихъ. Поэтому дробное число выражаетъ не только нѣкоторую, выразимую числами, величину, но также и отношеніе, въ которомъ стоятъ другъ къ другу оба эти рода единицъ. Такъ, на примѣръ, дробь $\frac{6}{5}$ означаетъ, что слѣдуетъ представить себѣ число, образованное изъ соединенія 6 единицъ, каждая изъ которыхъ получается путемъ дѣленія первоначальной единицы на пять. Такъ какъ отношеніе этихъ единицъ можетъ измѣняться произвольнымъ образомъ, то дробныя числа представляютъ про-

лагаютъ наличность пространственнаго субстрата для дѣятельности этой функціи. Поэтому Кантъ представляетъ возникновеніе понятій о числахъ нагляднымъ образомъ на примѣрѣ множества точекъ.

извольно измѣняющееся, но вообще не одинаково сгущенное, расположеніе элементовъ нѣкотораго многообразія.

Изъ этого свойства вытекаетъ логическое требованіе, въ случаѣ пополненія котораго можетъ возникнуть третій и послѣдній числовой видъ. Требованіе это состоитъ въ предположеніи, что элементы многообразія расположены разъ навсегда такъ, что благодаря имъ становится возможнымъ любое дѣленіе. Благодаря этому, къ закону дѣленія, приложимому къ цѣлому числу, закону, который остается приложимымъ самъ по себѣ и для этого новаго числоваго вида, присоединяется второй законъ дѣленія, который состоитъ въ обращеніи перваго. Согласно первоначальному закону дѣленія, любое число a изъ ряда цѣлыхъ чиселъ дѣлитъ всѣ числа на два класса, изъ которыхъ первый содержитъ только числа $< a$, второй — числа $> a$, между тѣмъ какъ a можно отнести либо къ первому, либо ко второму классу. Если же ввести требованіе произвольной дѣлимости, то это a означаетъ, что полносильный и противоположенный принципъ, т. е. что если производить какое-нибудь дѣленіе даннаго многообразія, то благодаря этому возникаетъ каждый разъ опредѣленное число a , раздѣляющее рядъ чиселъ на два класса, обладающихъ вышеуказанными свойствами. Числа, удовлетворяющія этому требованію, суть ирраціональныя числа, а многообразія, соответствующія имъ, обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что они дѣлимы до бесконечности и что въ любой, произвольно-малой, части ихъ элементы одинаково сгущены ¹⁾. Съ помощью ирраціональных чиселъ можно измѣрить любую, данную въ наглядномъ представленіи, непрерывную величину и измѣрить любое отношеніе подобныхъ величинъ. Но это еще не

¹⁾ Cp. Dedekind. Stetigkeit u. irrationale Zahlen, 1872, и G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Lpz. 1883 (Math. Annalen, т. 15—21).

означаетъ нисколько, что вышеуказанное опредѣленіе является также—какъ это принимаютъ Дедекинъ и Канторъ—опредѣленіемъ непрерывной величины. Оно скорѣе является лишь опредѣленіемъ той числовой системы, которая—благодаря предпосылкѣ о раздѣленіи первоначальныхъ единицъ на безконечное множество повсюду одинаково сгущенныхъ элементовъ—дозволяетъ вполне исчерпывающее арифметическое измѣреніе непрерывной величины. Въдѣ понятіе числового многообразія содержитъ само всегда лишь понятія единицы и элемента. Какъ бы ни устанавливать отношеніе обоихъ этихъ понятій другъ къ другу, всякое такое установленіе можетъ относиться лишь къ расположенію и сгущенности элементовъ, но не можетъ устранить логическаго различія между ними. Если, чтобы добиться этого, дополняютъ данное выше арифметическое опредѣленіе тѣмъ требованіемъ, что элементы должны непрерывно переходить другъ въ друга или что они могутъ быть приведены въ однозначное сопряженіе съ точками какого-нибудь даннаго въ наглядномъ представленіи непрерывнаго многообразія, напримѣръ, прямой линіи, то подобныя характеристики всегда получаютъ лишь изъ нагляднаго представленія и никогда не могутъ быть получены путемъ какой-нибудь детерминаціи первоначальнаго понятія числа. Такъ какъ въ своихъ арифметическихъ измѣреніяхъ мы связаны съ первоначальной формой понятія числа, то мы не можемъ также выразить ирраціональныхъ чиселъ съ помощью особыхъ числовыхъ формъ; намъ остается лишь выражать приближенныя значенія ихъ съ помощью дробей. Въ виду неограниченной дѣлимости послѣднихъ мы можемъ приближаться до какой угодно границы къ дѣйствительному значенію ирраціональныхъ чиселъ.

Если изъ варьированія условій, касающихся элементовъ числового многообразія, возникаютъ числовые

виды, то изъ допущенія различныхъ предпосылокъ насчетъ единицъ чиселъ получаются числовыя системы. Если мы обозначимъ первоначальную единицу черезъ e , то значеніе a какого-нибудь числа означаетъ, что должно взять e a разъ. Такое простое полаганіе связи единицъ мы называемъ положительнымъ числомъ, а неограниченное многообразіе подобныхъ чиселъ—системой положительныхъ чиселъ. Числа другихъ системъ могутъ отклоняться отъ нея съ логической точки зрѣнія двоякимъ образомъ. Во-первыхъ, они могутъ быть образованы изъ различныхъ единицъ, такъ что какое-нибудь число должно быть представлено произведеніемъ $a \cdot e'$, гдѣ e означаетъ отклоняющуюся единицу. Подобныя числовыя системы сходны съ обычными системами въ томъ, что онѣ просты: для всякаго числа a обычной системы существуетъ соотвѣтствующее ему равновеликое число новой числовой системы, отличающееся отъ перваго лишь качествомъ единицы. Во-вторыхъ, новыя числовыя системы могутъ получиться отъ того, что группы различныхъ единицъ соединяются въ новыя числа. Группы, состоящія изъ одинаковыхъ единицъ, какъ, напр., $a \cdot e$ и $b \cdot e$, могутъ съ помощью сложенія быть соединены всегда въ простыя числа $(a+b) \cdot e$. Группы же изъ различныхъ единицъ, какъ, примѣръ, $a \cdot e$ и $b \cdot e'$, не могутъ быть сложены, ибо единицы e и e' не могутъ быть соединены. Образованное такимъ образомъ число можетъ быть представлено лишь въ видѣ соединеннаго путемъ сложенія агрегата $a \cdot e + b \cdot e'$. Система, построенная изъ подобныхъ чиселъ, называется комплексной числовой системой. Въ частности, когда каждое число содержитъ двоякаго рода единицы, она называется двояко-протяженной, когда же каждое число содержитъ троякаго рода единицы, она называется трояко-протяженной, и т. д. Отсюда ясно, что множе-