

Я.В. Успенский

**Избранные математические
развлечения**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 37-053.2
ББК 74.27я7
Я11

Я11 **Я.В. Успенский**
Избранные математические развлечения / Я.В. Успенский – М.: Книга
по Требованию, 2013. – 264 с.

ISBN 978-5-458-46416-1

ISBN 978-5-458-46416-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

только книгой Е. Игнатьева, „В царстве смекалки“, но это сочинение уже слишком элементарно ¹⁾).

Если исключить книгу A l'igèns'a, то в остальных авторы отводят довольно много места вопросам или шуточным или же настолько простым, что они с математической стороны не представляют интереса. Вообще в этой области подбор вопросов обусловлен в значительной степени кругом читателей, к которым обращается книга. Мы, имея в виду читателя, знающего хотя и немного, но обладающего математическим складом ума, отводим место лишь тем вопросам, которые интересны с математической стороны и для которых имеется развитая теория. Хотя круг подлежащих рассмотрению вопросов таким образом суживается, все же разнообразность их не позволяет излагать их по какой-либо строгой системе, и по необходимости группировка, которую приходится избрать, носит произвольный характер. Мы начнем с простейших развлечений с картами.

¹⁾ Во время печатания этой книги вышла в свет книга Л. И. Перельмана, „Диковинки и загадки в мире чисел“.

ГЛАВА I.

Развлечения с картами.

Конечно, нет никакой необходимости связывать ниже-следующие развлечения именно с картами; можно в них карты заменять другими предметами, например билетами с номерами. Если мы говорим о картах, то потому, во-первых, что при употреблении карт суть дела лучше скрывается и поэтому самые развлечения выходят более эффектными; во-вторых, карты являются столь знакомым предметом, что для умов, не привыкших к абстракциям, гораздо занимательнее и понятнее будут операции именно с ними.

1. Угадывание задуманной кем-либо карты.

Развлечение, с которым мы сейчас познакомим читателя, принадлежит к числу весьма распространенных и многим хорошо известно; когда и кем оно было пущено в обращение — совершенно невозможно установить.

Обыкновенно поступают так: берут известное количество карт, хотя бы всю колоду, и, держа карты лицевой стороной вниз, открывают их, выкладывая на стол по порядку, начиная с первой; лицо, которому показывается этот фокус, приглашается заметить какую-либо карту и запомнить порядковый номер ее выхода. После окончания раскладки всех карт их собирают вновь в пачку в прежнем порядке, лицевой стороной вниз, и тогда спрашивают номер задуманной карты; потом карты снимают произвольное число раз и вновь открывают, начиная с верхней. Велико бывает изумление зрителей, когда при этом на известном месте вынимают и

показывают задуманную карту. Иногда случается, что для этого требуется еще одна раскладка карт.

Так как при этом возможно вести дело сразу со многими лицами, то на зрителей такое отгадывание карт обыкновенно производит большое впечатление; эффект усиливается еще тем, что невнимательные наблюдатели снятие карт, производящееся к тому же быстро, принимают за та-совку.

Поразмыслим теперь, в чем состоит весьма простая разгадка этого фокуса, и прежде всего обратим внимание на изменения, происходящие в расположении карт вследствие снятия. Снятие карт состоит, как известно, в том, что пачка произвольным образом разделяется на две части и затем либо нижняя часть кладется на верхнюю, либо, наоборот, верхняя подкладывается под нижнюю. Допустим прежде всего, что нижняя половина кладется на верхнюю. Если в нижней половине имеется k карт, то, перекладывая эти k карт последовательно одна за другой на верх, мы в итоге, очевидно, получим тот же результат, как если бы переложили наверх всю нижнюю половину сразу. Поэтому нужно проследить только, какое изменение в расположении карт получится при перекладывании одной нижней карты на верх. Обозначим карты пачки, которых пусть будет всего n , начиная с верхней, номерами 1, 2, 3, ..., n . Первоначальный порядок этих номеров будет, следовательно, такой:

1 2 n .

После перекладывания нижней карты наверх ее номер n встанет на первое место, затем в естественном порядке пойдут номера 1, 2, 3, ..., $n-1$, так что новое расположение карт будет такое:

n 1 2 3 $n-1$.

Каким образом получается второе расположение из первого? Очевидно так, что первая карта замещает вторую, вторая третью, третья четвертую и т. д.; наконец последняя замещает первую. Такое перемещение называется прямой кру-

говой перестановкой. Чтобы выяснить лучше суть дела и происхождение этого термина, расположим известное число номеров, напр. 5, в равных расстояниях по окружности круга, как показано на рис. 1. Если представить себе, что круг поворачивается по часовой стрелке около своего центра так, что 1 переходит в 2, то 2 перейдет в 3, 3 в 4, 4 в 5 и, наконец, 5 в 1. Таким образом первоначальное расположение номеров 1 2 3 4 5 переходит в такое: 5 1 2 3 4 (рис. 2), т. е. осуществляется как раз описанное

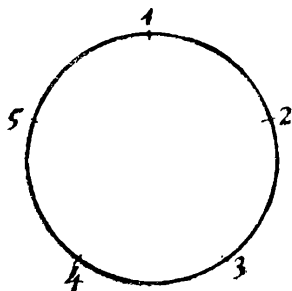


Рис. 1.

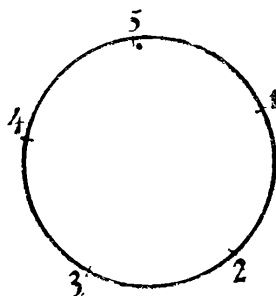


Рис. 2.

выше перемещение. Очевидно, что при круговой перестановке взаимное расположение номеров не изменится; напр., номер 4 занимает 5-е место, считая от номера 5 как до, так и после оборота круга. Так как перемещение одной карты снизу на верх пачки равносильно прямой круговой перестановке в первоначальном расположении карт, то, по замеченному выше, перекалывание группы из k карт разом снизу наверх равносильно k последовательным прямым круговым перестановкам в их первоначальном расположении, причем взаимное расположение карт при этом не изменяется.

Когда при снимании одна верхняя карта кладется под низ, то полученное после этого новое расположение карт или их номеров будет такое

$$2 \ 3 \ 4 \quad n \ 1,$$

и получается из первоначального замещением 1 через 2, 2 через 3, ..., n через 1, что соответствует обратной круговой перестановке. При обратной круговой перестановке номера, расположенные по кругу, перемещаются на одно место против часовой стрелки без изменения в их взаимном расположении. Перекладывание сразу l карт сверху вниз равносильно l -кратной обратной круговой перестановке. Но очевидно, что какая угодно последовательность круговых перестановок прямых и обратных, соответствующая последовательным поворотам круга на известное число мест по или против часовой стрелки, равносильна известному числу прямых или обратных круговых перестановок. Таким образом, если мы представим себе карты в первоначальном расположении размещенными по кругу, то достаточно их заразместить на известное число мест по или против часовой стрелки, чтобы получить их окончательное расположение после всех сниманий. Карта, имевшая номер i в первоначальном расположении, будет i -й после первой карты в окончательном расположении после всех сниманий. Это сразу дает ключ к пониманию описанного выше отгадывания карты. В самом деле, отгадывающее лицо, очевидно, поступает так. При первой раскладке отгадывающий запоминает первую карту. Затем, получив указание, что задуманная карта была, скажем, десятой, он при второй раскладке дожидается появления известной ему первой карты, после чего остается отыскать еще девять следующих; последняя из них и будет искомой картой. Может случиться, что после появления первой карты в пачке остается менее девяти карт, напр. только 5; тогда нужно вновь собрать выложенные карты и при новой раскладке остановиться на четвертой карте с начала. Именно эта карта при расположении всех карт по кругу будет, очевидно, десятой, начиная считать с известной уже первой карты.

Простейшее свойство круговых перестановок является, как мы видим, математической основой объясненного простого, но довольно интересного развлечения.

2. Угадывание задуманной пары карт.

Это также весьма распространенное развлечение обыкновенно производится с 20 картами, которые соединяются в десять пар. Пары выкладываются лицевой стороной вверх на стол перед присутствующими, которые приглашаются задумать любые из них. Затем пары собираются вместе в произвольном порядке, но отнюдь не разлучая карт, принадлежащих к одной и той же паре, и полученная пачка из 20 карт раскладывается лицом вверх в четыре ряда по пяти карт в каждом по известной системе. После этого задумавшие приглашаются указать, в каких рядах они видят свои карты, и тогда угадывающее лицо сразу вынимает задуманные пары.

Здесь суть дела заключается в системе, по которой карты располагаются в ряды. Обыкновенно при этом пользуются мнемотехническими средствами, а именно известными фразами, часто лишенными всякого смысла. В большом ходу следующая латинская фраза:

m i t u s
d e d i t
n o m e n
c o s i

Как мы видим, каждое из этих четырех слов содержит по пяти букв по числу карт в ряду; число различных букв 10, по числу пар. Если мы представим себе, что карты, составляющие пары, располагаются так же, как одинаковые буквы в четырех словах предыдущей фразы, то указание на ряды, в которых усматриваются карты одной пары, вполне достаточно для немедленного отыскания этих карт. Если, напр., сказано, что задуманные карты лежат во втором и третьем рядах, то во втором ряду это будет вторая, а в третьем четвертая карта; именно потому, что в словах *dedit* и *nomen* имеется только одна буква *e*, входящая в то и другое, причем в первом слове она стоит на втором месте, а во втором на четвертом.

Спрашивается, нельзя ли избежать употребления каких-либо мнемонических фраз вроде предыдущей и производить раскладку карт, руководясь более рациональными математическими соображениями. Это вполне возможно и даже для более общего случая, когда требуется карты, собранные в $\frac{n(n+1)}{2}$ пар, расположить в n рядов по $n+1$ карт в каждом так, чтобы в любом ряду находились две карты только одной пары и в любых двух различных рядах было по одной карте лишь одной пары.

Расположим n^2 величин $a_{i,j}$ следующим образом в квадратную таблицу из n горизонтальных и n вертикальных рядов:

$$\left. \begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,n} \end{array} \right\} (A)$$

Элементы с равными значками $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, ..., $a_{n,n}$ занимают в этой таблице главную диагональ. Два элемента с переставленными значками, напр. $a_{1,2}$ и $a_{2,1}$, $a_{2,3}$ и $a_{3,2}$ и вообще $a_{i,j}$ и $a_{j,i}$, расположены симметрично относительно главной диагонали. Таблица называется симметричной, если в ней симметричные относительно главной диагонали элементы равны, т. е. вообще $a_{i,j} = a_{j,i}$. Всего в квадратной таблице (A) будет n^2 элементов, из них n находится на главной диагонали, следовательно над главной диагональю будет $\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ элементов, и ровно столько же под ней. Допустим теперь, что таблица (A) симметричная и кроме того все величины

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,n} \\ & & a_{3,3} & a_{3,n} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{n,n} \end{array}$$

между собою различны. Тогда ясно, что все элементы таблицы (А), кроме диагональных, группируются в пары, причем каждая пара составляется из двух симметричных элементов. Если теперь слева к таблице (А) припишем столбец

$$\begin{array}{c} a_{1,1} \\ a_{2,2} \\ a_{3,3} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{array}$$

то получим прямоугольную таблицу с n горизонтальными рядами и $n+1$ вертикальными:

$$\left. \begin{array}{ccccc} a_{1,1} & a_{1,1} & a_{1,1} & a_{1,1} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,2} & a_{2,2} \\ a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,n} & a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,n} \end{array} \right\} \quad (B)$$

все элементы которой соединяются ровно в $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ пар, различных между собою. А именно, пары образуются элементами $a_{1,1}, a_{1,1}; a_{2,2}, a_{2,2}; \dots; a_{n,n}, a_{n,n}$; затем симметричными элементами $a_{i,j}$ и $a_{j,i}$. Если с парами таблицы (В) сопоставить $\frac{n(n+1)}{2}$ пар карт, то при раскладке карт парами на места парных элементов таблицы получится расположение карт, позволяющее сразу угадать пару, лишь только будут указаны горизонтальные ряды, в которых усматриваются входящие в нее карты. Сама раскладка производится просто и может быть многообразно изменяема с тем, чтобы зрители не могли подметить в ней закономерности.

Поясним еще изложенный способ раскладки на конкретных примерах. Пусть $n=4$, что соответствует 10 парам. Обозначим символически эти пары через $(1, 1), (2, 2), \dots, (10, 10)$, тогда схема расположения карт будет представляться таблицей:

1	1	2	3	4
5	2	5	6	7
8	3	6	8	9
10	4	7	9	10.

Карты одной пары кладутся на места с одинаковыми числами. Если, напр., будет сказано, что карты задуманной пары усматриваются в третьем ряду, то они будут лежать на первом и четвертом местах. В случае, если указаны ряды первый и четвертый, то в первом ряду нужно взять карту с пятого места, а в четвертом со второго.

Пусть теперь $n=5$, что соответствует случаю 30 карт, собранных в 15 пар. Схема расположения карт в этом случае представляется таблицей:

1	1	2	3	4	5
6	2	6	7	8	9
10	3	7	10	11	12
13	4	8	11	13	14
15	5	9	12	14	15.

При 42 картах, собранных в 21 пару, т. е. для $n=6$ схема расположения такова:

1	1	2	3	4	5	6
7	2	7	8	9	10	11
12	3	8	12	13	14	15
16	4	9	13	16	17	18
19	5	10	14	17	19	20
21	6	11	15	18	20	21.

Надеемся, что после всех этих объяснений читатель совершенно ясно видит, насколько бывает полезно даже в самых простых вопросах обращаться к помощи математических соображений.

3. Еще один способ угадывания карты.

Развлечение, которое мы сейчас изложим, также очень распространенное, но оно уже значительно сложнее двух предыдущих и имеет гораздо более интересную теорию. Описано это развлечение впервые у Баше в применении к случаям, которые как раз обыкновенно демонстрируются. Обыкновенно берут 27 карт лицевой стороной вниз и раскладывают их лицом вверх в три ряда или три кучки, кладя первую карту в первую кучку, вторую — во вторую, третью — в третью, потом четвертую опять в первую, пятую — во вторую, шестую — в третью, и продолжают поступать дальше таким же образом, пока не исчерпаются все карты. Таким образом получаются три кучки по 9 карт в каждой. Один из присутствующих приглашается заметить какую-нибудь карту и после раскладки сообщить только, в какой кучке она находится. После этого кучки поднимаются со стола лицом вниз, и та, в которой находится задуманная карта, кладется непременно между двумя другими. Затем производится совершенно тем же способом вторая раскладка, и опять просят указать, в какой кучке видят задуманную карту. Кучки опять собираются вместе прежним способом, т. е. та, где находится задуманная карта, кладется между двумя другими, и производится третья раскладка. Узнав опять, где находится задуманная карта, берут соответствующую кучку лицом вниз и отсчитывают 5 карт, начиная с верхней; тогда пятая карта будет как раз та, которую задумали. Это угадывание производит большое впечатление на зрителей особенно потому, что его можно производить с завязанными глазами.

Для лучшего усвоения общей теории рассмотрим сначала, что происходит в описанном частном случае. После первой раскладки карты лежат в трех кучках по 9 карт лицевой стороной вверх. Пусть задуманная карта в некоторой кучке имеет номер x_1 , считая от нижней карты кучки. При сложении кучек вместе задуманная карта будет иметь номер $9 + x_1$, считая сверху. Чтобы определить, какое место снизу займет задуманная карта после второй раскладки,