Бурбаки Н.

Группы и алгебры Ли

Часть 2

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б91

Бурбаки Н.
Б91 Группы и алгебры Ли: Часть 2 / Бурбаки Н. – М.: Книга по Требованию, 2012. – 334 с.

ISBN 978-5-458-31405-3

Книга входит в завоевавшую мировое признание энциклопедию современной математики "Элементы математики", созданную группой французских ученых, выступающих под коллективным псевдонимом Н. Бурбаки. Ряд томов этой энциклопедии уже вышел в русском переводе и получил заслуженно высокую оценку читателей.Эта книга посвящена преимущественно группам, порожденным отражениями. Она содержит обширный материал по теории групп Ли, их дискретных подгрупп, алгебраических н конечных групп, алгебр Ли, теории представлений. Книга предназначена для самого широкого круга математиков различных специальностей, от студентов до научных работников.

ISBN 978-5-458-31405-3

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Новая книга Н. Бурбаки „Группы и алгебры Ли“, относящаяся ко второй части его известного трактата „Элементы математики“, выходит в свет разрозненными выпусками. В 1960 г. была издана (а десять лет спустя переиздана) глава I „Алгебры Ли“, в которой изложены основы теории, не касающиеся вопросов классификации простых алгебр Ли; в русском переводе эта глава еще не появлялась. Главы II и III пока не опубликованы.

При этих обстоятельствах перевод на русский язык изолированных глав IV—VI мог бы показаться несколько преждевременным. Все сомнения, однако, рассеиваются при самом беглом ознакомлении с содержанием настоящего выпуска, к которому вполне подошло бы общее название „Дискретные группы, порожденные отражениями“. В мировой математической литературе до сих пор не было связного и столь исчерпывающего изложения этой увлекательной темы, представляющей значительный интерес для весьма широкого круга математиков, да и не только математиков. Авторское введение и поучительный (хотя и неполный) исторический очерк помогут даже неспециалисту воссоздать тот естественный фон, на котором проходило становление и совершенствование теории кристаллографических групп, систем корней, групп Вейля, групп Коксетера, систем Титса (BN-пар).

Насыщенная конкретными результатами, в том числе справочного характера, книга рассчитана на достаточно квалифицированного читателя. Но она целиком базируется на материале ранее изданных (и имеющихся в русском переводе) книг „Элементов математики“. Во всяком случае, щепетильность автора в соблюдении схемы логической зависимости отдельных книг и глав трактата нашла здесь свое дополнительное подтверждение.

А. Кострикин

ВВЕДЕНИЕ

Изучение полупростых групп (аналитических или алгебраических) и их алгебр Ли приводит к рассмотрению структур *систем корней*, *групп Кокстера* и *систем Титса*. Настоящие главы IV, V и VI как раз и посвящены этим структурам.

Чтобы было понятно, о чем идет речь, приведем несколько примеров.

I. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана[1]). *Корнем* алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$ называется ненулевая линейная форма α на $\mathfrak{h}$, такая, что выполнено соотношение $[h, x] = \alpha(h)x$ для некоторого элемента x алгебры $\mathfrak{g}$, отличного от нуля, и для любого $h \in \mathfrak{h}$. Корни образуют в векторном пространстве $\mathfrak{h}^*$, дуальном к $\mathfrak{h}$, приведенную систему корней R. Задание R определяет алгебру $\mathfrak{g}$ с точностью до изоморфизма, и всякая приведенная система корней изоморфна системе корней, полученной описанным способом. Автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, оставляющий устойчивой подалгебру $\mathfrak{h}$, определяет автоморфизм на $\mathfrak{h}^*$, оставляющий инвариантной систему R, и таким образом получается каждый автоморфизм этой системы. Группа Вейля системы R состоит из автоморфизмов пространства $\mathfrak{g}^*$, которые определены внутренними автоморфизмами алгебры $\mathfrak{g}$, оставляющими устойчивой подалгебру $\mathfrak{h}$. Эта группа является группой Кокстера.

Пусть G—связная комплексная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть Γ — подгруппа в $\mathfrak{h}$, состоящая из таких элементов h, что $\exp_G(2\pi i h) = 1$. Пусть $R^\vee$ — система корней в $\mathfrak{h}$, дуальная к R, $Q(R^\vee)$ — подгруппа в $\mathfrak{h}$, порожденная системой $R^\vee$, и пусть $P(R^\vee)$ — подгруппа, которая ассоциирована с подгруппой $Q(R)$ в $\mathfrak{h}^*$, порожденной R (т. е. множество $h \in \mathfrak{h}$ таких, что $\lambda(h)$ — *целое* число для каждого $\lambda \in Q(R)$). Тогда $P(R^\vee) \supset \Gamma \supset Q(R^\vee)$. Далее, центр группы G канонически

[1]) В этом Введении мы будем свободно пользоваться как традиционной терминологией, так и понятиями, определения которых появятся только в настоящем выпуске.

изоморфен $P(R^\vee)/\Gamma$, а ее фундаментальная группа изоморфна $\Gamma/Q(R^\vee)$. В частности, Γ совпадает с $P(R^\vee)$, если G — присоединенная группа, и Γ равна $Q(R^\vee)$, если G односвязна. Наконец, веса конечномерных линейных представлений группы G суть элементы подгруппы $\mathfrak{h}^*$, ассоциированной с Γ.

II. Пусть G — вещественная связная компактная полупростая группа Ли и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Пусть T—максимальный тор в G с алгеброй Ли $\mathfrak{t}$ и X — его группа характеров. Пусть, далее, R—множество ненулевых элементов α группы X таких, что $(\mathrm{Ad}\, t).x = \alpha(t)x$ для какого-нибудь отличного от нуля элемента x алгебры $\mathfrak{g}$ и любого $t \in T$. Отождествим X с решеткой в вещественном векторном пространстве $V = \mathrm{X} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. Тогда R будет приведенной системой корней в V. Пусть N — нормализатор тора T в G. Действие N на T определяет изоморфизм группы N/T с группой Вейля системы R. Имеем $P(R) \supset \mathrm{X} \supset Q(R)$, причем $\mathrm{X} = P(R)$, когда G односвязна, и $\mathrm{X} = Q(R)$, когда центр G сводится к единичному элементу.

Комплексификация алгебры $\mathfrak{g}$ есть полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ и $\mathfrak{t}_{(\mathbf{C})}$ — ее подалгебра Картана. Существует канонический изоморфизм пространства $V_{(\mathbf{C})}$ на пространство, дуальное к $\mathfrak{t}_{(\mathbf{C})}$, который переводит R в систему корней алгебры $\mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ относительно $\mathfrak{t}_{(\mathbf{C})}$.

III. Пусть G—связная полупростая алгебраическая группа над коммутативным полем k. Пусть T—максимальный элемент множества торов в G, разложимых над k, и X — группа характеров T (гомоморфизмов T в мультипликативную группу). Отождествим X с решеткой в вещественном векторном пространстве $V = \mathrm{X} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. Корнями группы G относительно T являются ненулевые элементы α группы X, для каждого из которых существует отличный от нуля элемент x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G такой, что $(\mathrm{Ad}\, t).x = \alpha(t)x$, какова бы ни была точка t из T. Таким образом мы получаем систему корней R в V, которая, однако, не обязана быть приведенной. Пусть N — нормализатор и Z — централизатор тора T в G, и пусть $N(k)$ и $Z(k)$ — их группы рациональных точек над k. Действие $N(k)$ на T определяет изоморфизм группы $N(k)/Z(k)$ на группу Вейля системы R.

Пусть U — максимальный элемент множества унипотентных подгрупп в G, определенных над k и нормализуемых Z. Положим, $P = Z.U$. Имеем $P(k) = Z(k).U(k)$ и $P(k) \cap N(k) = Z(k)$. Далее, существует базис $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ системы R такой, что весами тора T в U будут положительные для этого базиса корни системы R. Пусть S — множество элементов группы $N(k)/Z(k)$, которые соответствуют при определенном выше изоморфизме симметриям $s_{\alpha_i} \in W(R)$, ассоциированным с корнями α_i. Тогда четверка $(G(k), P(k), N(k), S)$ есть система Титса.

IV. В теории алгебраических полупростых групп над локальным полем встречаются системы Титса, у которых группа W есть аффинная группа Вейля системы корней. Пусть, например $G = \mathbf{SL}(n+1, \mathbf{Q}_p)$ $(n \geqslant 1)$. Пусть B — группа матриц $(a_{ij}) \in \mathbf{SL}(n+1, \mathbf{Z}_p)$, у которых $a_{ij} \in p\mathbf{Z}_p$ для $i < j$, и N — подгруппа G, состоящая из матриц, у которых в каждом столбце и каждой строке не более одного отличного от нуля элемента. Тогда существует такое подмножество S группы $N/(B \cap N)$, что четверка (G, B, N, S) будет системой Титса. Группа $W = N/(B \cap N)$ есть аффинная группа Вейля системы корней типа A_n. Это — бесконечная группа Кокстера.

При написании этих трех глав неоценимую помощь оказали нам многочисленные беседы с Ж. Титсом. Мы дружески его благодарим.

ГЛАВА IV

ГРУППЫ КОКСТЕРА И СИСТЕМЫ ТИТСА

§ 1. Группы Кокстера

Всюду в этом параграфе через W обозначается группа, записываемая мультипликативно, с единичным элементом 1, и через S — подмножество образующих группы W, такое, что $S = S^{-1}$ и $1 \notin S$. Каждый элемент в W есть произведение конечного числа элементов из S. Начиная с n° 3, предполагается, что каждый элемент множества S имеет порядок 2.

1. Длина и приведенные разложения

Определение 1. *Пусть $w \in W$. Наименьшее целое число $q \geqslant 0$, такое, что w есть произведение q элементов из S, называется длиной элемента w (относительно множества образующих S) и обозначается через $l_s(w)$ или просто $l(w)$. Приведенным разложением элемента w (относительно S) называется всякая последовательность $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ элементов из S, для которой $w = s_1 \ldots s_q$ и $q = l(w)$.*

Таким образом, 1 — единственный элемент длины 0, а S состоит из элементов длины 1.

Предложение 1. *Для любых двух элементов w и w' из W имеют место соотношения*

$$l(ww') \leqslant l(w) + l(w'), \tag{1}$$

$$l(w^{-1}) = l(w), \tag{2}$$

$$|l(w) - l(w')| \leqslant l(ww'^{-1}). \tag{3}$$

Пусть $(s_1, \ldots, s_p)$ и $(s'_1, \ldots, s'_q)$ — приведенные разложения w и w' соответственно. Тогда $l(w) = p$, $l(w') = q$, и поскольку $ww' = s_1 \ldots s_p s'_1 \ldots s'_q$, то $l(ww') \leqslant p + q$, что дает неравенство (1). Так как $S = S^{-1}$ и $w^{-1} = s_p^{-1} \ldots s_1^{-1}$, то $l(w^{-1}) \leqslant p = l(w)$. Заменяя w на w^{-1}, получаем обратное неравенство, откуда следует (2). Заменяя w на ww'^{-1} в (1) и (2), получаем соотношения

$$l(w) - l(w') \leqslant l(ww'^{-1}), \tag{4}$$

$$l(ww'^{-1}) = l(w'w^{-1}); \tag{5}$$

меняя местами w и w' в (4) и применяя (5), получаем $l(w') - l(w) \leqslant l(ww'^{-1})$. Отсюда вытекает неравенство (3).

Следствие. *Пусть* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_p)$ *и* $\mathbf{s}' = (s'_1, \ldots, s'_q)$ — *две последовательности элементов из* S, $w = s_1 \ldots s_p$ и $w' = s'_1 \ldots s'_q$. *Если последовательность* $(s_1, \ldots, s_p, s'_1, \ldots, s'_q)$ *является приведенным разложением элемента* ww', *то* $\mathbf{s}$ *будет приведенным разложением* w *и* $\mathbf{s}'$ — *приведенным разложением* w'.

По предположению $l(w) \leqslant p$, $l(w') \leqslant q$ и $l(ww') = p + q$, поэтому в силу (1) $l(w) = p$ и $l(w') = q$, откуда и вытекает утверждение следствия.

Замечание. Формула $d(w, w') = l(ww'^{-1})$ определяет расстояние d на W. Соотношения (1) и (2) показывают, что оно инвариантно относительно правых переносов.

2. Диэдральные группы

Определение 2. *Диэдральной группой (или группой диэдра) называется всякая группа с двумя различными образующими порядка* 2.

Пример. Пусть M — мультипликативная группа $\{1, -1\}$ и m — целое число $\geqslant 2$ (соотв. $m = \infty$). Заставим M действовать на $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (соотв. на $\mathbf{Z}$), полагая $(-1).x = -x$, и обозначим через $\mathbf{D}_m$ связанное с этим действием полупрямое произведение M на $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (соотв. M на $\mathbf{Z}$). Элементами $\mathbf{D}_m$ будут пары (ε, x), где $\varepsilon = \pm 1$ и $x \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (соотв. $x \in \mathbf{Z}$). Групповой закон в D_m задается формулой

$$(\varepsilon, x).(\varepsilon', x') = (\varepsilon\varepsilon', \varepsilon' x + x'). \tag{6}$$

Обозначим через ι класс 1 по модулю m (соотв. $\iota = 1$) и положим

$$\rho = (-1, 0), \quad \rho' = (-1, \iota), \quad \pi = (1, \iota); \tag{7}$$

тогда $\rho^2 = \rho'^2 = 1$ и $\pi = \rho\rho'$. Формулы

$$\pi^n = (1, n\iota), \quad \rho\pi^n = (-1, n\iota) \tag{8}$$

показывают, что $\mathbf{D}_m$ — группа диэдра, порожденная множеством $\{\rho, \rho'\}$.

Предложение 2. *Предположим, что* S *состоит из двух различных элементов* s *и* s' *порядка* 2.

(i) *Подгруппа* $P \subset W$ *с образующей* $p = ss'$ *нормальна в* W *и* W *является полупрямым произведением подгрупп* $T = \{1, s\}$ и P, *причем* $(W : P) = 2$.

(ii) *Пусть* m — *порядок (конечный или бесконечный) элемента* p. *Тогда* $m \geqslant 2$ *и* W *имеет порядок* $2m$. *Существует* *единственный изоморфизм φ группы $\mathbf{D}_m$ на W, такой, что $\varphi(\rho) = s$ и $\varphi(\rho') = s'$.*

(i) Имеем $sps^{-1} = sss's = s's = p^{-1}$, откуда

$$sp^n s^{-1} = p^{-n} \tag{9}$$

для любого целого числа n. Группа W порождается парой $\{s, s'\}$, а также парой $\{s, p\}$, так что P — нормальная подгруппа в W. Следовательно, TP — подгруппа в W, а так как она содержит s и $s' = sp$, то $W = TP = P \cup sP$. Поэтому для доказательства (i) достаточно убедиться в том, что $W \neq P$. Если бы $W = P$, то W была бы коммутативна, откуда $p^2 = s^2 s'^2 = 1$. Группа $W = P$ содержала бы только два элемента 1 и p, вопреки предположению, что в W имеются по крайней мере три элемента 1, s и s'.

(ii) Так как $s \neq s'$, то $p \neq 1$, откуда $m \geqslant 2$. Поскольку P имеет порядок m и $(W : P) = 2$, порядок W равен $2m$. Если m конечно (соотв. бесконечно), то существует изоморфизм φ' группы $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (соотв. $\mathbf{Z}$) на P, переводящий π в p. Далее существует изоморфизм φ' группы $M = \{1, -1\}$ на T, переводящий -1 в s. Группа W является полупрямым произведением T и P. Формула (9) и соотношение $\rho\pi^n\rho^{-1} = \pi^{-n}$ позволяют построить из φ' и φ'' такой изоморфизм φ группы D_m на W, что $\varphi(\rho) = s$ и $\varphi(\pi) = p$, откуда $\varphi(\rho') = s'$. Единственность φ следует из того, что $\mathbf{D}_m$ порождается $\{\rho, \rho'\}$.

Замечание. Рассмотрим диэдральную группу W порядка $2m$, порожденную двумя различными элементами s и s' порядка 2. Обозначим через $\boldsymbol{s}_q$ (соотв. $\boldsymbol{s}'_q$) последовательность длины q, четными (соотв. нечетными) членами которой являются s', а нечетными (соотв. четными) — s. Пусть w_q (соотв. w'_q) — произведение элементов последовательности $\boldsymbol{s}_q$ (соотв. $\boldsymbol{s}'_q$). Имеем

$$w_{2k} = (ss')^k, \qquad w_{2k+1} = (ss')^k s,$$

$$w'_{2k} = (s's)^k = (ss')^{-k}, \quad w'_{2k+1} = (s's)^k s' = (ss')^{-k-1} s.$$

Если $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ — приведенное разложение (относительно $\{s, s'\}$) элемента $w \in W$, то, очевидно, $s_i \neq s_{i+1}$ для $1 \leqslant i \leqslant q - 1$. Следовательно, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_q$ или $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}'_q$.

В случае $m = \infty$ элементы $(ss')^n$ и $(ss')^n s$ для $n \in \mathbf{Z}$ все различны. Следовательно, элементы $w_q (q \geqslant 0)$ и $w'_q (q > 0)$ все различны, и если $\boldsymbol{s}$—приведенное разложение w_q (соотв. w'_q), то с необходимостью будет $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_q$ (соотв. $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}'_q$). Отсюда следует, что $l(w_q) = l(w'_q) = q$ и что *множество приведенных разложений элементов группы W совпадает с множеством последовательностей $\boldsymbol{s}_q$ и $\boldsymbol{s}'_q$.* Кроме того, каждый элемент из W допускает единственное приведенное разложение.

Пусть теперь m *конечно*. Если $q \geqslant 2m$, то $w_q = w_{q-2m}$ и $w'_q = w'_{q-2m}$. Если $m \leqslant q \leqslant 2m$, то $w_q = w'_{2m-q}$, $w'_q = w_{2m-q}$. Следовательно, при $q > m$ ни s_q, ни s'_q не являются приведенными разложениями. Отсюда вытекает, что все $2m$ элементов группы W содержатся среди элементов $w_0 = w'_0$, w_q, и w'_q для $1 \leqslant q \leqslant m-1$ и $w_m = w'_m$. Таким образом, эти $2m$ элементов различны и из вышесказанного следует, что $l(w_q) = l(w'_q) = q$ для $q \leqslant m$ и что *множество приведенных разложений элементов группы W совпадает с множеством последовательностей s_q и s'_q для $0 \leqslant q \leqslant m$*. Каждый элемент группы W, отличный от w_m, допускает единственное приведенное разложение. Элемент w_m допускает два таких разложения.

3. Основные свойства групп Кокстера

Напомним, что начиная с этого места мы предполагаем, что все элементы из S имеют порядок 2.

Определение 3. *Пара (W, S) называется системой Кокстера, если выполнено следующее условие:*

(К) *Для любых двух элементов s и s' из S обозначим через $m(s, s')$ порядок элемента ss'. Пусть I — множество пар (s, s'), для которых $m(s, s')$ конечно. Тогда система образующих S вместе с соотношениями $(ss')^{m(s, s')} = 1$ для $(s, s') \in I$ будет заданием группы W образующими и определяющими соотношениями* [1]).

В случае когда (W, S) — система Кокстера, то, допуская вольность речи, говорят также, что *W — группа Кокстера*.

Примеры. 1) Пусть m — целое число $\geqslant 2$ или ∞ и W — группа, определенная множеством образующих $S=(s, s')$ и определяющими соотношениями $s^2 = s'^2 = 1$, когда $m = \infty$, или же $s^2 = s'^2 = (ss')^m = 1$, когда m конечно. Далее, рассмотрим группу диэдра D_n (n°2, *пример*) и элементы ρ и ρ' в D_m, определенные равенством (7). Поскольку $\rho^2 = \rho'^2 = 1$ и $(\rho\rho')^m = 1$, когда m конечно, то существует однозначно

[1]) Это означает, что пара (W, S) удовлетворяет следующему условию универсальности: каковы бы ни были группа G и вложение f множества S в G, такое, что $(f(s), f(s'))^{m(s, s')} = 1$ для (s, s') из I, найдется гомоморфизм g группы W в G, продолжающий f. Этот гомоморфизм единствен, поскольку S порождает W. Эквивалентная форма нашего определения заключается в следующем. Пусть $\overline{W}$ — группа, f — гомоморфизм $\overline{W}$ на W и h — отображение S в $\overline{W}$, такое, что $f(h(s)) = s$, $(h(s)\,h(s'))^{m(s, s')} = 1$ для (s, s') из I и образы $h(s)$ (для $s \in S$) порождают $\overline{W}$. Тогда f — инъективное отображение (и тем самым изоморфизм $\overline{W}$ на W).

определенный гомоморфизм f группы W на $\mathbf{D}_m$, такой, что $f(s) = \rho$ и $f(s') = \rho'$. Так как $\rho\rho'$ имеет порядок m, то ss' тоже имеет порядок m. Следовательно, (W, S) — система Кокстера, W — диэдральная группа порядка $2m$ и f — изоморфизм (предложение 2).

Путем перенесения структуры получается, что каждая группа диэдра является группой Кокстера.

2) Пусть $\mathfrak{S}_n$ — симметрическая группа степени n, $n \geqslant 2$, s_i — транспозиция i и $i+1$ для $1 \leqslant i < n$, и пусть $S = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. Можно показать (§ 2, n° 4, *пример* и § 1, упр. 4), что $(\mathfrak{S}_n, S)$ — система Кокстера.

3) Классификация конечных групп Кокстера приведена в § 4 гл. VI.

Замечание. Пусть (W, S) — система Кокстера. Существует гомоморфизм ε группы W в группу $\{1, -1\}$, характеризующийся тем, что $\varepsilon(s) = -1$ для всех $s \in S$. Число $\varepsilon(w)$ называется *сигнатурой* элемента w; оно равно $(-1)^{l(w)}$. Следовательно, формула $\varepsilon(ww') = \varepsilon(w) \cdot \varepsilon(w')$ выражается сравнением $l(ww') \equiv l(w) + l(w') \bmod 2$.

Предложение 3. *Предположим, что (W, S) — система Кокстера. Для того чтобы два элемента s и s' из S были сопряжены*[1] *в W, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

(I) *Существует такая конечная последовательность $(s_1, \ldots, s_q)$ элементов из S, что $s_1 = s$, $s_q = s'$ и $s_j s_{j+1}$ имеет конечный нечетный порядок для $1 \leqslant j < q$.*

Пусть s и s' из S таковы, что порядок $p = ss'$ равен $2n+1$. В силу равенства (9) имеем $sp^{-n} = p^n s$, откуда

$$p^n s p^{-n} = p^n p^n s = p^{-1} s = s'ss = s', \tag{10}$$

и s' сопряжен с s.

Для любого s из S пусть A_s — множество элементов $s' \in S$, удовлетворяющих условию (I). Согласно этому условию и только что сделанному замечанию, элементы s_j и s_{j+1}, $1 \leqslant j < q$, сопряжены, откуда следует, что все элементы s' из A_s сопряжены с s. Пусть f — отображение S в $M = \{1, -1\}$, равное 1 на A_s и -1 на $S - A_s$. Пусть элементы s' и s'' из S таковы, что $s's''$ имеет конечный порядок m. В случае когда s' и s'' оба лежат в A_s или в $S - A_s$, имеем $f(s')f(s'') = 1$. В противном случае $f(s')f(s'') = -1$; но m четно, так что во всех случаях $(f(s')f(s''))^m = 1$. Поскольку (W, S) — система Кокстера, существует гомоморфизм g группы W в M, инду-

---

[1]) Напомним, что два элемента (соотв. два подмножества) группы W называются сопряженными, если существует внутренний автоморфизм W, переводящий один элемент в другой (соотв. одно подмножество в другое).