

К.К. Федяевский

Турбулентный пограничный слой крыла

Часть 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
К11

К11 **К.К. Федяевский**
Турбулентный пограничный слой крыла: Часть 2 / К.К. Федяевский – М.: Книга по Требованию, 2021. – 42 с.

ISBN 978-5-458-32144-0

ISBN 978-5-458-32144-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

жить, что при $y = \delta$

$$\frac{\partial \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta} \right)} = 0. \quad (V)$$

3. Напишем выражение для напряжения трения на небольшом расстоянии от стенки, пользуясь разложением $\tau(y)$ в ряд Маклорена. Тогда:

$$\tau = (\tau)_{y=0} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_{y=0} y + \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \right)_{y=0} \frac{y^2}{2} + \dots \quad (5)$$

Но

$$(\tau)_{y=0} = \tau_0; \quad \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0$$

и, следовательно, можно написать

$$\tau = \tau_0 + \frac{\partial p}{\partial x} y + 0(y^3),$$

т. е. считать распределение напряжения трения линейным.

В этом случае

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 0(y^2). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (1) будем иметь:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0(y^2). \quad (7)$$

Таким образом, вблизи стенки существует область, в которой с точностью до y^2 левая часть дифференциального уравнения Прандтля обращается в нуль.

Естественно предполагать, что ламинарный подслей, в силу своей чрезвычайной малости, целиком находится в области, для которой левую часть дифференциального уравнения Прандтля можно полагать равной нулю.

Тогда дифференциальное уравнение движения в ламинарном подслое принимает следующий вид:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (8)$$

Интегрируя первый раз, получим:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} y + \mu \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 = 0. \quad (9)$$

Интегрируя второй раз, будем иметь:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + \mu u + c_1 y + c_2 = 0. \quad (10)$$

Произвольные постоянные определим из условий, что при $y=0$ скорость $u=0$, а при $y=\delta_n$, т. е. на внешней границе ламинарного подслоя скорость $u=u_n$. При этом $c_2=0$

$$c_1 = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta_n^2}{2} - \mu u_n}{\delta_n}. \quad (11)$$

Очевидно, что согласно (9) напряжение трения у стенки

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = -c_1 = \mu \frac{u_n}{\delta_n} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta_n}{2}. \quad (12)$$

До сих пор существовала лишь зависимость между толщиной ламинарного подслоя δ_l , динамической скоростью трения $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ и кинематической вязкостью ν полученная Карманом (см. ссылку 13), исходя из анализа размерности¹. Эта зависимость, как известно, выражается следующим образом:

$$\frac{\delta_l v_*}{\nu} = \text{const} = \alpha. \quad (13)$$

Предположим, что, подобно критическому числу Рейнольдса трубы и критическому числу Рейнольдса ламинарного пограничного слоя, существует критическое число Рейнольдса ламинарного подслоя, т. е. имеет место следующая зависимость:

$$Re_{\text{лам. крит.}} = \frac{\delta_l u_l}{\nu} = \text{const} = \alpha^2. \quad (14)$$

Вообще говоря, величина критического числа Рейнольдса ламинарного подслоя может зависеть от продольного градиента давления $\frac{\partial p}{\partial x}$. Однако, в силу того, что ламинарный подслей очень тонок в первом приближении, можно, вероятно, пренебречь влиянием сил давления на критическое число Рейнольдса ламинарного подслоя. Так поступает и Карман, когда полагает при выводе выражения (13), что δ_l зависит лишь от напряжения трения на стенке и от физических констант ρ и μ .

Определяя произвольную постоянную c_1 в уравнении (9) из условия, что при $y=0$ $\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_0$, получим $c_1 = -\tau_0$. Тогда уравнение (10) дает:

$$u = \frac{\tau_0 y}{\mu} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2}. \quad (15)$$

Подставляя (15) при $y = \delta_l$ в (14), получим:

$$\begin{aligned} Re_{\text{лам. крит.}} &= \frac{\delta_l u_l}{\nu} = \frac{\tau_0 \delta_l^2}{\mu \nu} + \frac{1}{\mu \nu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta_l^3}{2} = \\ &= \frac{v_*^2 \delta_l^2}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta_l^3}{2} = \text{const} = \alpha^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Сопоставление первого члена выражения (16) с выражением (13) указывает, что кармановский критерий $\frac{\delta_l v_*}{\nu}$ является корнем квадратным из критического числа Рейнольдса ламинарного подслоя в предположении линейного распределения скоростей в ламинарном подслое. Поскольку постоянство кармановского критерия для ламинарного пограничного слоя при внутренней задаче прекрасно подтверждается опытом, есть основание ожидать, что постоянство обобщенного критерия будет иметь место в случае внешней задачи. Следует отметить, что второй член выражения (16) может составить для верхней поверхности крыла при наличии угла атаки более 4% α^2 .

¹ Принимая линейное распределение скоростей в ламинарном подслое, т. е. считая, что скорость на внешней границе ламинарного подслоя

$$u_l = \frac{\tau_0 \delta_l}{\mu} = \frac{v_*^2 \delta_l}{\nu},$$

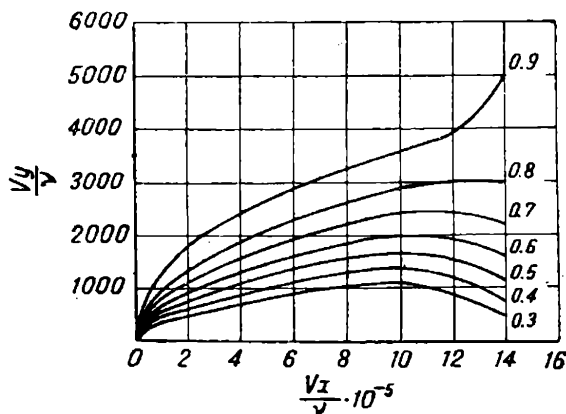
Карман подставлял δ_l из выражения (13) и получил еще и следующую зависимость для скорости на внешней границе ламинарного подслоя

$$u_l = \frac{v_*^2 \delta_l}{\nu} = \frac{v_*^2 \alpha \nu}{\nu v_*} = \alpha v_*.$$

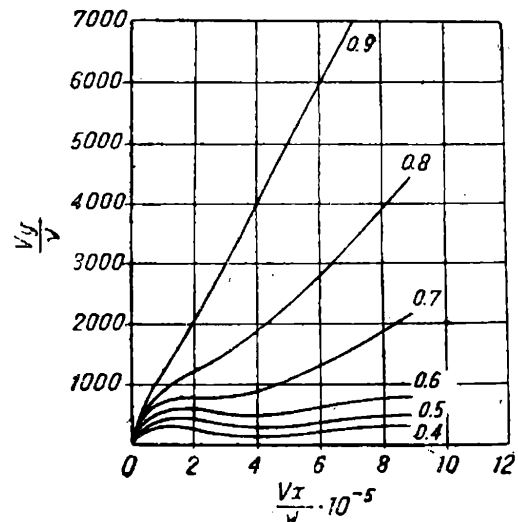
Поскольку значение величины α колеблется, примерно, от 10 до 12,5 значения критического числа Рейнольдса ламинарного подслоя могут быть приняты, примерно, в пределах от 100 до 150.

Естественно, может возникнуть вопрос, почему величина критического числа Рейнольдса ламинарного подслоя так сильно отличается от величины критического числа Рейнольдса ламинарного слоя или критического числа Рейнольдса трубы (которое, как известно, равно около 2000).

Некоторое объяснение возможности существования столь большой разницы в величинах критических чисел Рейнольдса дают опыты Драйдена (см. ссылку 8) по замеру степени турбулентности внутри пограничного слоя. На фиг. 1, 2, 3 и 4 мы воспроизводим результаты этих интереснейших опытов.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 и 2 даны изотакхи в пограничном слое пластинки. По осям координат отложены расстояния от передней кромки x и расстояния от поверхности пластины y , приведенные к безразмерному виду путем умножения на скорость потока V и деления на кинематическую вязкость ν . Цифры у кривых дают значение отношения скоростей $\frac{u}{V}$. Опыты, соответствующие фиг. 1, были произведены в трубе при степени турбулентности $\epsilon = \frac{\sqrt{V'^2}}{V} 100 = 0,5$.

Опыты, соответствующие фиг. 2, были произведены в трубе за турбулизирующей решеткой при степени турбулентности в 3%. Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный в первом случае имел место при числе Рейнольдса $\frac{Vx}{\nu} \cong 1100000$, а во втором случае при числе Рейнольдса, равном $\frac{Vx}{\nu} \cong 100000$.

На фиг. 3 и 4 даны кривые равных степеней турбулентности. Эти кривые, которые могли бы быть названы изотурбами или изопульсами, на фиг. 3 соответствуют степени турбулентности набегающего потока в 0,5%, т. е. изотакхам на фиг. 1, а кривые на фиг. 4 соответствуют степени турбулентности набегающего потока в 3%, т. е. изотакхам на фиг. 2. Цифры на кривых фиг. 3 и 4 дают значение процента турбулентности $\epsilon = \frac{\sqrt{u'^2}}{V} 100$, где $\overline{u'^2}$ — есть среднее квадратичное продольного компонента пульсаций.

3) В турбулентной части пограничного слоя пульсации значительно меньше, чем в переходном участке, но все же значительно больше, чем в набегающем потоке (фиг. 4).



Подставляя (14) в (12), получим закон сопротивления:

который может быть легко использован во всех тех случаях, когда скорость на внешней границе ламинарного подслоя может быть выражена из распределения скоростей в турбулентной части пограничного слоя с помощью зависимости (14) в явном виде.

8

4. В качестве примера, где скорость u_δ может быть получена в явном виде из распределения скоростей в турбулентной части пограничного слоя, рассмотрим случай степенного распределения скоростей, т. е. положим:

$$u = u_\delta \left(\frac{y}{\delta} \right)^n, \quad (18)$$

здесь u_δ — скорость на внешней границе турбулентного пограничного слоя, δ — толщина турбулентного пограничного слоя; n — показатель степени, несколько зависящий от числа Рейнольдса.

Подставляя (14) в (18) при $y = \delta_\lambda$, будем иметь:

$$u_\lambda = u_\delta \left(\frac{\delta_\lambda}{\delta} \right)^n = u_\delta \left(\frac{\alpha^2 \nu}{u_\lambda \delta} \right)^n.$$

Откуда

$$u_\lambda^{1+n} = u_\delta \frac{\alpha^{2n} \nu^n}{\delta^n}$$

и

$$u_\lambda = u_\delta^{\frac{1}{n+1}} \frac{\alpha^{\frac{2n}{n+1}} \nu^{\frac{n}{n+1}}}{\delta^{\frac{n}{n+1}}}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (17), получим:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{\alpha^2} \rho u_\delta^{\frac{2}{n+1}} \frac{\alpha^{\frac{4n}{n+1}} \nu^{\frac{2n}{n+1}}}{\delta^{\frac{2n}{n+1}}} - \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\nu \delta^{\frac{n}{n+1}}}{\alpha^{\frac{2n}{n+1}} \nu^{\frac{n}{n+1}} u_\delta^{\frac{1}{n+1}}} \frac{\partial p}{\partial x} = \\ &= 2\alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}} \frac{\rho u_\delta^2}{2} \left(\frac{u_\delta \delta}{\nu} \right)^{-\frac{2n}{n+1}} - \frac{1}{2} \alpha^{\frac{2}{n+1}} \frac{\nu}{u_\delta} \left(\frac{u_\delta \delta}{\nu} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned} \quad (20)$$

Сравнивая (20) с кармановским степенным законом сопротивления [см. ссылку 3, формулу (14)]:

$$\tau_0 = \zeta \frac{\rho u_\delta^2}{2} \left(\frac{u_\delta \delta}{\nu} \right)^{-\frac{2n}{n+1}},$$

мы видим, что первый член выражения (20) в точности соответствует кармановскому степенному закону, тогда как второй член очень немного изменяет напряжение трения за счет влияния градиента давления на профиль скоростей в ламинарном подслое.

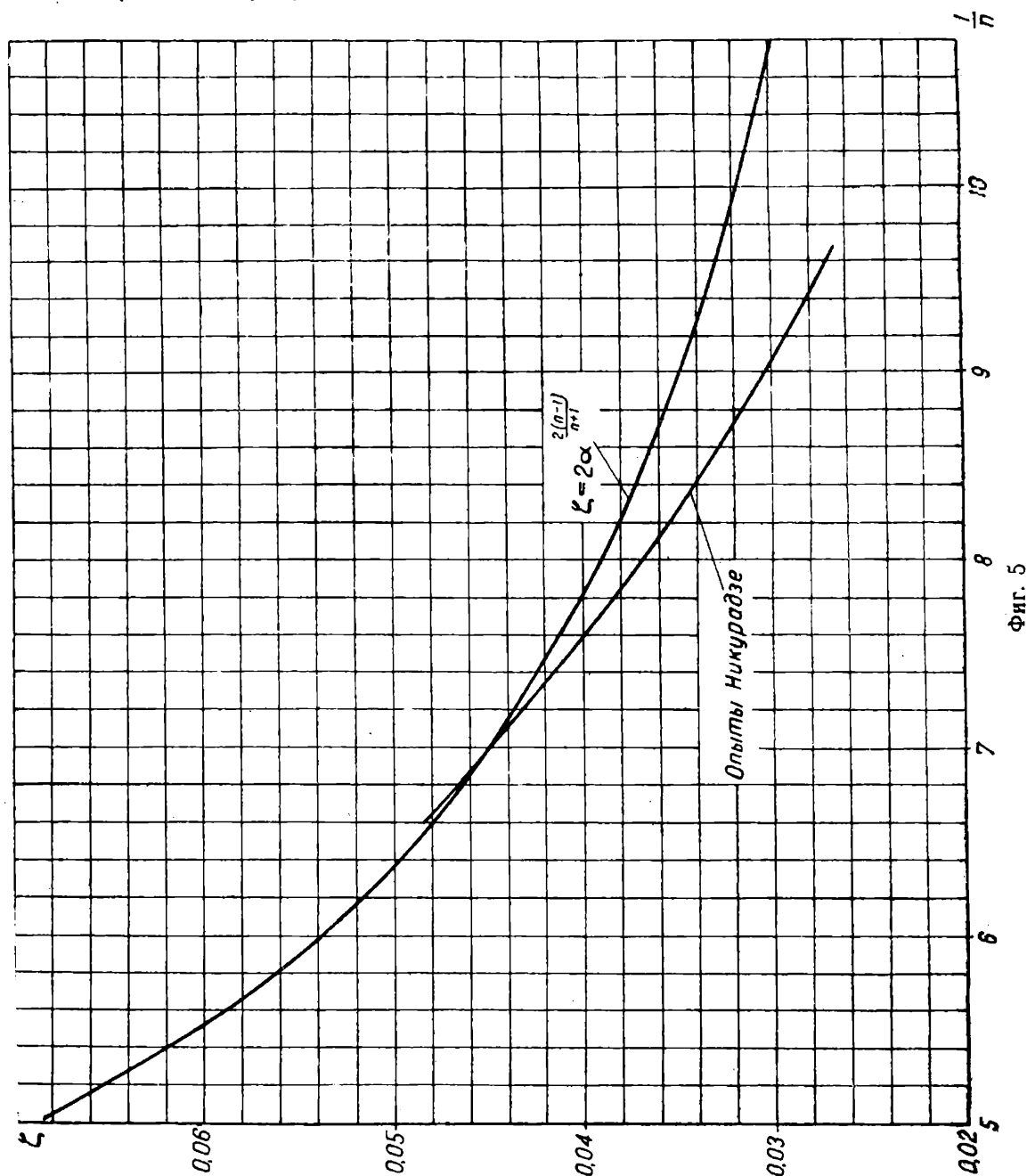
При этом следует отметить, что при постоянном показателе степени и при прочих равных условиях с увеличением числа Рейнольдса пограничного слоя первый член выражения (20) падает, тогда как второй растет.

Конечно, следует иметь в виду, что формула (20) не может учитывать влияния градиента давления на профиль скоростей при внешней задаче, так как хорошо известно, что при наличии инерционных сил профиля скорости отнюдь не подобны друг другу (см. I часть настоящей работы фиг. 1, 2 и 3).

В этом случае нельзя уже применять степенной закон с постоянным показателем.

Как известно, на основании многочисленных экспериментов при $n = \frac{1}{7}$ коэффициент $\zeta = 0,045$, сопоставляя это значение коэффициента с значением

величины $2\alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}}$ при $n = \frac{1}{7}$, мы получим $\alpha = 12,548$. Это обстоятельство указывает, что величина кармановского критерия для ламинарного подслоя, полученная из степенного закона сопротивления, довольно хорошо согласуется с ранее полученными значениями для α на основании распределения скоростей. Так, у Кармана $\alpha = 11,5$ (см. ссылку 15), у Г. А. Гуржиенко (см. ссылку 1) $\alpha = 10,47$.



Фиг. 5

Выражение, полученное для константы кармановского степенного закона сопротивления:

$$\zeta = 2\alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}} \quad (21)$$

дает возможность подсчитывать коэффициент ζ при различных n . Раньше коэффициент ζ мог быть определен только на основании экспериментов.

На фиг. 5 нанесены значения коэффициента ζ , согласно формулы (21) при $\alpha = 12,548$. Для сравнения на ту же диаграмму нанесены значения коэффициента ζ , полученные при опытах Никурадзе (см. ссылку 17) в прямых, круглых, гладких трубах. Зависимость коэффициента ζ от показателя n определялись по фиг. 44 работы Никурадзе, которая воспроизводится нами на фиг. 6. При заданном значении абсциссы $\log \frac{ud}{\nu}$ снимались значения величин m и ζ , а затем показатель степени n определялся из соотношения:

$$m = -\frac{2n}{n+1}.$$

Несмотря на имеющиеся расхождения между теоретическими и экспериментальными значениями ζ при малых n , мы имеем теперь возможность, пользуясь формулой (21), оценить коэффициент ζ для больших значений показателя и для которых не имеется опытных данных.

Интересно отметить, что при использовании коэффициента, определенного по формуле (21) для расчета толщин пограничного слоя тела вращения при показателе $n = \frac{1}{6}$, были получены толщины пограничного слоя, хорошо согласующиеся с экспериментом.

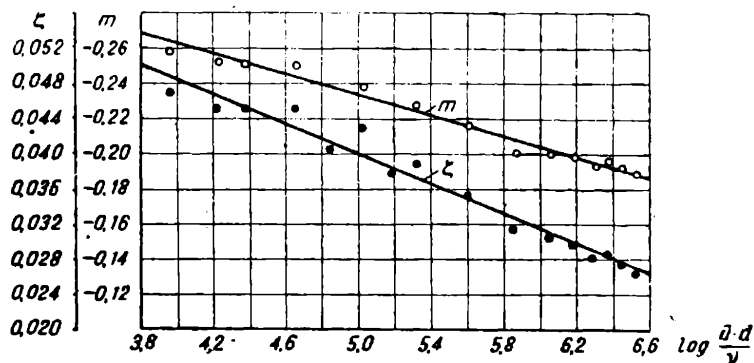
5. Ввиду того, что кривые распределения скоростей нельзя достаточно удовлетворительно выразить с помощью степенной зависимости, необходимо при получении закона сопротивления исходить из распределения скоростей, полученных, используя профиль напряжения трения, соответствующий внешней задаче.

В первой части настоящей работы указывалось, каким образом эти профили могут быть получены. Однако, формула распределения скоростей, полученная при этом [см. формулу (22) первой части работы] настолько сложна, что пользование ею представляет значительные затруднения. Кроме того, эта формула получена при использовании совокупности всего лишь трех условий (I), (II) и (III).

Чтобы получить более простые формулы распределения скоростей при этом с использованием также и условий (IV) и (V), представим корень квадратный из напряжения трения в пограничном слое отнесенного к напряжению трения у стенок в виде полинома:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} = B_0 + B_1 \eta + B_2 \eta^2 + B_3 \eta^3 + B_4 \eta^4 + \dots, \quad (22)$$

коэффициенты которого определяются из условий, имеющих место для $\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}$ и его производных у стенки и на внешней границе пограничного слоя, используя для этого условие, имеющее место для $\frac{\tau}{\tau_0}$ и его производных.



Фиг. 6

I. У стенки, т. е. при $\frac{y}{\delta} = \eta = 0$ мы имели

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 \quad (I)$$

и, следовательно,

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} = 1. \quad (I')$$

II. При $\eta = 0$ мы имели:

$$\frac{\partial \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \eta} = \frac{\partial \left(\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \right)^2}{\partial \eta} = 2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} = \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x} = A_1, \quad (II)$$

откуда

$$\left(\frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2} A_1. \quad (II')$$

III. На внешней границе пограничного слоя, т. е. при $\eta = 1$ мы имели

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 0 \quad (III)$$

и, следовательно,

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} = 0. \quad (III')$$

IV. У стенки, т. е. при $\eta = 0$ мы имели:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \left(\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \right)^2}{\partial \eta^2} = 2 \left[\left(\frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} \right)^2 + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \frac{\partial^2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (IV)$$

откуда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0} = - \left(\frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}^2 = \\ = - \frac{1}{4} \frac{\delta^2}{\tau_0^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 = - \frac{1}{4} A_1^2. \end{aligned} \quad (IV')$$

V. Положим равенство нулю второй производной на внешней границе пограничного слоя. Тогда, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial \left(\frac{u}{v_*} \right)}{\partial \eta} = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\frac{l}{\delta}},$$

где $\frac{l}{\delta}$ есть безразмерный путь смещения, будем иметь:

$$\left[\frac{\partial^2 \left(\frac{u}{v_*} \right)}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=1} = \left[\frac{\frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} \frac{l}{\delta} - \frac{\partial \left(\frac{l}{\delta} \right)}{\partial \eta} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\left(\frac{l}{\delta} \right)^2} \right]_{\eta=1} = 0.$$

В силу того, что при $\eta = 1$

$$\frac{l}{\delta} \neq 0, \quad \frac{l}{\delta} \neq \infty, \quad \frac{\partial \left(\frac{l}{\delta} \right)}{\partial \eta} \neq \infty$$

написанное равенство может иметь место при

$$\frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} = 0. \quad (V')$$

Определяем коэффициенты полинома (22) из выявленных нами условий.

а) При использовании совокупности условий (I'), (II'), (III'), (IV') и (V'), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1; \quad B_1 = \frac{A_1}{2}; \quad B_2 = -\frac{1}{8} A_1^2, \\ B_3 &= -4 - \frac{3}{2} A_1 + \frac{1}{4} A_1^2; \quad B_4 = 3 + A_1 - \frac{A_1^2}{8}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

б) При использовании совокупностью условий (I'), (II'), (III') и (IV') будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1; \quad B_1 = \frac{A_1}{2}; \quad B_2 = -\frac{1}{8} A_1^2; \\ B_3 &= -1 - \frac{A_1}{2} + \frac{A_1^2}{8}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

в) При использовании совокупности условий (I'), (II'), (III') и (V'), будем иметь:

$$B_0 = 1; \quad B_1 = \frac{A_1}{2}; \quad B_2 = -3 - A_1; \quad B_3 = 2 + \frac{A_1}{2}. \quad (24')$$

г) Наконец, при совокупности условий (I'), (II') и (III') будем иметь:

$$B_0 = 1; \quad B_1 = \frac{A_1}{2}; \quad B_2 = -1 - \frac{A_1}{2}. \quad (23')$$

Интерполируя напряжения трения с помощью полинома (1) первой части этой работы или с помощью полинома (22) этой части, мы можем встретиться со значением критерия A_1 , при которых вблизи внешней границы пограничного слоя, т. е. при η , близких единице, появятся отрицательные значения напряжения трения, что, конечно, непригодно.

Поэтому, необходимо исследовать диапазоны значений критерия A_1 , в которых полиномы напряжения трения или полиномы корня квадратного из напряжения трения при η , близком единице, бывают всегда положительны.

Особенный интерес представляет для нас определение этого диапазона для полиномов, полученных при максимальном количестве граничных условий, т. е. при совокупности условий (I), (II), (III), (IV) и (V)—для полинома трения и совокупности условий (I'), (II'), (III'), (IV') и (V')—для полинома, интерполирующего корень квадратный из напряжения трения.

Поскольку при совокупности этих условий первая производная полиномов в точке $\eta = 1$ равна нулю, определим значения A_1 , при которых происходит перемена знака вторых производных полиномов в точке $\eta = 1$.

При совокупности условий (I), (II), (III), (IV) и (V) будем иметь [см. первую часть работы стр. 8, формулы (4)].

$$\frac{\partial \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \eta} = A_1 + 3A_3 \eta^2 + 4A_4 \eta^3; \quad \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=1} = 6A_3 + 12A_4.$$

Определяем значение параметра A_1 , при котором вторая производная меняет свой знак из уравнения

$$6A_3 + 12A_4 = -24 - 18A_1 + 36 + 24A_1 = 6A_1 + 12 = 0,$$

откуда

$$A_1 = -2.$$

Таким образом, в точке $\eta = 1$ будет минимум при значениях

$$A_1 > -2. \quad (25)$$

При совокупности условий (I'), (II'), (III'), (IV') и (V') будем иметь:

$$\frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_1^2}{4} \eta + 3B_3 \eta^2 + 4B_4 \eta^3$$

и

$$\left[\frac{\partial^2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=1} = -\frac{A_1^2}{4} + 6B_3 + 12B_4.$$

Определяем значение параметра A_1 , при котором вторая производная меняет свой знак из уравнения:

$$\begin{aligned} -\frac{A_1^2}{4} + 6B_3 + 12B_4 &= -\frac{A_1^2}{4} - 24 - 9A_1 + \frac{3}{2} A_1^2 + \\ &+ 36 + 12A_1 - \frac{3}{2} A_1^2 = -\frac{1}{4} A_1^2 + 3A_1 + 12 = 0, \end{aligned}$$

откуда:

$$(A_1)_1 = 15,15; \quad (A_1)_2 = -3,15.$$

Иными словами, в точке $\eta = 1$ минимум будет при

$$-3,15 < A_1 < 15,15. \quad (25')$$

Таким образом, применение полинома (22) при совокупности условий (I'), (II'), (III'), (IV') и (V') допустимо лишь в диапазоне изменения параметра A_1 от $-3,15$ до $15,15$ и возможно даже в несколько меньшем диапазоне, как это будет показано ниже.

При использовании совокупности условий (I'), (II'), (III') и (V') в точке $\eta = 1$ минимум будет при

$$A_1 > -6, \quad (25'')$$

т. е. интерполяция (22) при совокупности этих условий пригодна при всех положительных значениях параметра A_1 . Это относится также к совокупности условий (I'), (II') и (III').

Естественно, встает вопрос о том, как будет изменяться параметр A_1 при переходе от модели к натуре, т. е. с изменением чисел Рейнольдса. Возможно, что при переходе от модели к натуре параметр A_1 , при положительных градиентах давления, настолько возрастет, что невозможно будет пользоваться интерполяцией (22).

Для выяснения этого обстоятельства рассмотрим, как изменяются величины, входящие в параметр

$$A_1 = \frac{\delta \frac{\partial p}{\partial x}}{\tau_0} \quad (26)$$

при переходе от модели к натуре. При этом, чтобы оценить изменение δ и τ_0 примем, что зависимость их от числа Рейнольдса достаточно хоро-