

Г.К. Суслов

Основы аналитической механики

Том 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 93
ББК 63.3
Г11

Г11 **Г.К. Суслов**
Основы аналитической механики: Том 2 / Г.К. Суслов – М.: Книга по Требованию, 2026. –
302 с.

ISBN 978-5-517-97510-2

ISBN 978-5-517-97510-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2026
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2026

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг — не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель — вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания — решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

§§

Вступленіе . .
Оглавленіе

СТР.

I
III--VII

Аналитическая механика.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ.

(Продолженіе).

Интегрирование уравненій динамики.

233. Предварительныя замѣчанія 1

ГЛАВА XXXIV.

Послѣдній множитель Якоби.

234. Множитель системы совокупныхъ уравненій	2
235. Дифференціальное уравненіе для множителя	4
236. Послѣдній множитель Якоби	8
237. Приложеніе теоріи послѣдняго множителя Якоби къ уравненіямъ динамики въ независимыхъ координатахъ	11
238. Приложеніе теоріи послѣдняго множителя къ уравненіямъ свободнаго движенія, содержащимъ множители связей	14

ГЛАВА XXXV.

Теорема Якоби-Пуассона.

239. Лемма	19
240. Скобки Пуассона	20
241. Тождество Пуассона	21
242. Теорема Якоби-Пуассона	22

ГЛАВА XXXVI.

Главная функція Гамильтона въ независимыхъ координатахъ. Функція характеристическая.

243. Главная функція Гамильтона въ независимыхъ координатахъ	27
244. Производныя главной функціи	29
245. Частное дифференціальное уравненіе Якоби-Гамильтона для главной функціи	32
246. Характеристическая функція Гамильтона	38

ГЛАВА XXXVII.

Главная и характеристическая функціи для несвободнаго движенія въ координатахъ, связанныхъ условными уравненіями.

247. Предварительныя замѣчанія	48
248. Главная функція въ координатахъ, связанныхъ условными уравненіями	49
249. Производныя главной функціи	51
250. Частное дифференціальное уравненіе для главной функціи	54
251. Число постоянныхъ произвольныхъ	61
252. Функція характеристическая	67

ГЛАВА XXXVIII.

Нѣкоторыя приложенія предыдущей теоріи.

253. Поверхности равнаго дѣйствія. Теорема лорда Кельвина	69
254. Минимумъ Лагранжева дѣйствія	73

Динамика твердаго тѣла.

ГЛАВА XXXIX.

Уравненія движенія свободнаго твердаго тѣла.

255. Различныя формы живой силы свободнаго твердаго тѣла	86
--	----

§§		СТР.
256.	Живая сила свободного твердаго тѣла, отнесенная къ непо- движнымъ осямъ	87
257.	Живая сила свободного твердаго тѣла, отнесенная къ осямъ неизмѣнно съ тѣломъ связаннымъ	92
258.	Лагранжева форма живой силы свободного твердаго тѣла . .	98
259.	Различные типы уравненій движенія свободного твердаго тѣла.	100
260.	Уравненія движенія свободного твердаго тѣла, отнесенныя къ осямъ неподвижнымъ	100
261.	Уравненія движенія свободного тѣла, отнесенныя къ осямъ неизмѣнно съ тѣломъ связаннымъ. Эйлеровы уравненія вращенія твердаго тѣла	102
262.	Выводъ уравненій движенія твердаго тѣла изъ начала Даламбера.	105
263.	Лагранжевы уравненія движенія свободного твердаго тѣла . .	110

ГЛАВА XL.

Уравненія движенія несвободнаго твердаго тѣла.

264.	Живая сила твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки	115
265.	Уравненія вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.	116
266.	Уравненія вращенія тяжелаго твердаго тѣла вокругъ неподвиж- ной точки	118
267.	Кинематическія связи твердаго тѣла конечныя и дифферен- ціальныя	119
268.	Примѣры на связи твердаго тѣла	120
269.	Уравненія движенія несвободнаго твердаго тѣла	125

ГЛАВА XLI.

Вращеніе тяжелаго твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

Эйлеровъ случай.

270.	Эйлеровъ случай вращенія тяжелаго твердаго тѣла вокругъ не- подвижной точки. Вращеніе твердаго тѣла по инерціи . .	130
271.	Простѣйшіе интегралы движенія. Теорема Лагранжа	132
272.	Геометрическая интерпретація Poinsot	135
273.	Интерпретація Mac Cullagh'a	138
274.	Опредѣленіе p , q , r какъ функцій времени	141
275.	Опредѣленіе угловъ Эйлера какъ функцій времени	146
276.	Полодіи. Герполодіи	147
277.	Вторая интерпретація Poinsot	154
278.	Установившіяся или стационарныя вращенія твердаго тѣла по инерціи	156
279.	Случай, когда эллипсоидъ инерціи поверхность вращенія . .	158

ГЛАВА XLII.

Вращенія Poinsoṭ и à la Poinsoṭ.

280. Вращенія Poinsoṭ	161
281. Сопряженныя вращенія Darboux	163
282. Вращенія à la Poinsoṭ	167
283. Теорема Sylvester'a	167

ГЛАВА XLIII.

Лагранжевъ случай вращенія тяжелаго твердаго тѣла.

284. Лагранжевъ случай вращенія тяжелаго твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки. Симметричный тяжелый гироскопъ	170
285. Простѣйшіе интегралы движенія	171
286. Окончаніе интеграціи	172
287. Сферическій гироскопъ	174
288. Разложеніе движенія тяжелаго сферическаго гироскопа на вращенія Poinsoṭ и à la Poinsoṭ	175
289. Теорема Якоби о разложеніи движенія тяжелаго симметричнаго гироскопа	182

ГЛАВА XLIV.

Случай вращенія тяжелаго твердаго тѣла, разсмотрѣнный С. В. Ковалевскою.

290. Условія, при которыхъ тяжелое твердое тѣло совершаетъ движеніе, указанное С. В. Ковалевскою	183
291. Простѣйшіе (алгебраическіе) интегралы движенія. Геометрическое толкованіе ихъ	184
292. Подготовительныя преобразованія	186
293. Криволинейныя координаты s_1, s_2 С. В. Ковалевскою	188
294. Приведеніе къ квадратурамъ	196

ГЛАВА XLV.

Гессовъ случай вращенія тяжелаго твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки; случай Бобылева-Стеклова.

295. Условія, при которыхъ тяжелое твердое тѣло совершаетъ Гессово движеніе	200
296. Простѣйшіе (алгебраическіе) интегралы движенія	202
297. Геометрическая интерпретація Гессова движенія	203
298. Случай Бобылева-Стеклова	206

ГЛАВА XLVI.

Примѣры на движеніе несвободнаго твердаго тѣла (связи конечныя)

299.	Волчекъ на горизонтальной плоскости	209
300.	Симметричный гироскопъ. Прецессія регулярная и псевдoreгулярная	212
301.	Вращеніе тѣла около неподвижной осн. Физическій маятникъ	217

ГЛАВА XLVII.

Примѣры на движеніе несвободнаго твердаго тѣла (связи неинтегрирующіяся).

302.	Движеніе тѣлъ, связанныхъ съ нитью, которая не поддается крученію	224
303.	Видоизмѣненіе начала Даламбера для системъ съ неинтегрирующимися связями	228

ГЛАВА XLVIII.

Уравненія движенія твердаго тѣла по отношенію къ осямъ, имѣющимъ собственное движеніе.

304.	Уравненія движенія твердаго тѣла по отношенію къ осямъ, имѣющимъ собственное движеніе	234
305.	Катаніе шара по поверхности	236

Мгновенныя силы и ударъ.

ГЛАВА XLIX.

Ударъ системы о связь. Дѣйствіе мгновенныхъ силъ на систему.

306.	Ударъ матеріальной системы о неудерживающую связь	244
307.	Рѣшеніе задачи объ ударѣ въ произвольныхъ координатахъ	253
308.	Измѣненіе живой силы системы за время удара. Теоремы Карно	256
309.	Законъ количествъ движенія и законъ моментовъ количествъ движенія для мгновенныхъ силъ	259
310.	Начало Даламбера для мгновенныхъ силъ	262
311.	Теорема лорда Кельвина	265
312.	Теорема Bertrand'a	267

ГЛАВА L.

Дѣйствіе мгновенныхъ силъ на твердое тѣло. Соудареніе твердыхъ тѣлъ.

313. Дѣйствіе мгновенныхъ силъ на твердое тѣло .	270
314. Центръ удара	272
315. Соудареніе твердыхъ тѣлъ .	274
Указатель	282

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

Динамика системы.

(Продолжение).

Интегрирование уравнений динамики.

233. Предварительныя замѣчанія. Въ предыдущемъ было изложено, какъ слѣдуетъ писать уравненія движенія матеріальной системы, подчиненной идеальнымъ (§ 184) связямъ, если положеніе системы отнесено къ координатамъ декартовымъ (§ 186, уравненія Лагранжа перваго рода), къ произвольной системѣ координатъ (§ 197), къ координатамъ независимымъ (§ 198, уравненія Лагранжа втораго рода). Было также показано, какими уравненіями можно замѣнить названныя совокупныя, если система консервативна (§ 199, уравненія Якоби для системы консервативной) и, наконецъ, какія уравненія (§ 201, уравненія Гамильтона) представляютъ собою выраженія союзныя (§ 200) вышеупомянутымъ. Теперь мы перейдемъ къ выводу нѣкоторыхъ теоремъ, относящихся къ интегрированію перечисленныхъ нами уравненій движенія. Въ особенности обратимъ вниманіе на связь между уравненіями совокупными и соответственнымъ уравненіемъ съ частными производными. Въ своемъ изложеніи мы будемъ главнымъ образомъ останавливаться на тѣхъ положеніяхъ, которыя такъ или иначе иллюстрируютъ свойства движенія, и пропустимъ почти все то, что служитъ собственно для преодоленія аналитическихъ трудностей интеграціи.

ГЛАВА XXXIV.

Послѣдній множитель Якоби.

234 Множитель системы совокупныхъ уравненій. Пусть имѣемъ систему совокупныхъ уравненій:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}, \quad (1)$$

гдѣ $X_1, X_2, \dots, X_n$ данныя функціи переменныхъ $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Интеграломъ системы (1) называется всякая функція f отъ $x_1, x_2, \dots, x_n$, дифференціалъ которой тождественно обращается въ нуль въ силу уравненій (1); другими словами, функція f для значеній переменныхъ, связанныхъ соотношеніями (1), сохраняетъ постоянное значеніе. Такимъ образомъ, если f интегралъ системы (1), то

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0$$

въ силу уравненій (1). А потому, условіе необходимое и достаточное для того, чтобы функція f служила интеграломъ системы (1), выражается такъ

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = K(f) = 0; \quad (2)$$

здѣсь символъ $K(f)$ введенъ для сокращенія.

Если $f_1, f_2, \dots, f_\lambda$ интегралы системы (1), т. е. если по (2):

$$K(f_1) = 0; \quad K(f_2) = 0; \dots \quad K(f_\lambda) = 0; \quad (3)$$

то и любая функція отъ нихъ: $\pi(f_1, f_2, \dots, f_\lambda)$, также будетъ интеграломъ, какъ это вытекаетъ изъ (3) и равенства:

$$K(\pi) = \frac{\partial \pi}{\partial f_1} K(f_1) + \frac{\partial \pi}{\partial f_2} K(f_2) + \dots + \frac{\partial \pi}{\partial f_\lambda} K(f_\lambda).$$

Данная система (1) можетъ имѣть только $(n-1)$ независимыхъ другъ отъ друга интеграловъ: $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$; всякій же другой интегралъ f представляется функциею отъ независимыхъ.

На самомъ дѣлѣ, прилагая условіе (2) къ функциямъ $f, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$, имѣемъ:

$$K(f) = X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0;$$

$$K(f_1) = X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} = 0;$$

$$K(f_{n-1}) = X_1 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0.$$

А эти равенства при $X_1, X_2, \dots, X_n$ отличныхъ отъ нуля могутъ выполняться лишь тогда, когда опредѣлитель

$$\begin{aligned} R = \sum \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} &= \frac{\partial(f, f_1, \dots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

обращается въ нуль, что и доказываетъ вышесказанное.

Если миноръ опредѣлителя (4), соответствующій элементу $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, означимъ черезъ A_1 , то условіе для обращенія R въ нуль можно написать такъ:

$$A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \quad (5)$$

Равенства (2) и (5) равносильны—оба выражаютъ собою условіе необходимое и достаточное для того, чтобы функция f была интеграломъ системы (1). Поэтому, сравнивая (2) и (5), заключаемъ, что должна существовать такая функция M , что

$$\frac{A_1}{X_1} = \frac{A_2}{X_2} = \dots = \frac{A_n}{X_n} = M. \quad (6)$$

Эта функція M носитъ названіе множителя системы совокупныхъ уравненій (1).

Если умножимъ на M лѣвую часть уравненія (2), то по (6) и (5) получимъ тождественно:

$$\begin{aligned} M \cdot K(f) &= A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = R = \\ &= \frac{\partial(f, f_1, f_2, \dots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \end{aligned} \quad (7)$$

235. Дифференціальное уравненіе для множителя. Нетрудно показать, что между минорами $A_1, A_2, \dots, A_n$ имѣетъ мѣсто тождественное соотношеніе:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0. \quad (8)$$

Прежде всего замѣтимъ, что лѣвая часть нашего равенства линейная и однородная функція вторыхъ производныхъ отъ функцій $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$, причемъ эти производныя входятъ исключительно въ формѣ

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (9)$$

гдѣ значки i и k различны.

Для нахождения коэффициента при производной (9) обратимъ вниманіе на то обстоятельство, что производная эта можетъ встрѣтиться лишь въ двухъ членахъ суммы (8):

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial A_k}{\partial x_k}.$$

Но каждый изъ миноровъ A_i и A_k представляется такъ:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\partial A_i}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial A_i}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial A_i}{\partial f_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial A_i}{\partial f_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_k}; \\ A_k &= \frac{\partial A_k}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial A_k}{\partial f_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial A_k}{\partial f_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, искомый коэффициентъ будетъ:

$$\frac{\partial A_i}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_k}} + \frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_i}}.$$