

Клейн Феликс

**Элементарная математика с
точки зрения высшей. лекции,
читанные в Геттингенском
университете Феликс Клейн**

Том 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
Ф38

Ф38 **Феликс К.**
Элементарная математика с точки зрения высшей. лекции, читанные в Геттингенском университете Феликс Клейн: Том 2 / Клейн Феликс – М.: Книга по Требованию, 2024. – 447 с.

ISBN 978-5-519-89276-6

ISBN 978-5-519-89276-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг — не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель — вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания — решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Центральное проектирование пространства на плоскость (проектирование соответствует с исчезающим определителем)	159
Рельефная перспектива	160
Применение проектирования для вывода свойств конических сечений	163
III. Внешние точечные преобразования	
1. Преобразование посредством обратных радиусов	166
Прямилло Поселье	169
Стереографическая проекция шара	171
2. Некоторые общие картографические проекции	172
Проекция Меркатора	173
Теорема Тиссо	175
Наиболее общие взаимно однозначные непрерывные точечные преобразования	177
Род и связность поверхностей	179
Теорема Эйлера о многогранниках	181
IV. Преобразования с изменением пространственного элемента	
1. Двойственные преобразования	183
2. Касательные преобразования	185
3. Некоторые примеры	190
Вид алгебраических кривых определенного порядка либо класса	—
Применение касательных преобразований к теории зубчатых колес	192
V. Теория мнимых элементов	
Мнимые циклические точки и мнимый круг сфер	198
Мнимое преобразование	200
Интерпретация по Штаудту самосопряженных мнимых образов посредством вещественных полярных систем	203
Полная интерпретация по Штаудту отдельных мнимых элементов	206
Соотношения положения мнимых точек и прямых	212

СИСТЕМАТИКА И ОБОСНОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ

I. Систематика

1. Обзор классификации геометрических дисциплин	217
Теория групп как геометрический классификационный принцип	221
Принцип Кэли: <i>projective geometry is all geometry</i>	224
Отступление в область теории инвариантов линейных подстановок	—

	Стр.
Систематика теории инвариантов	229
Разъяснения на простых примерах	231
3. Приложение теории инвариантов к геометрии	234
Интерпретация теории инвариантов с n переменными в аффи- ной геометрии пространства R_n с неподвижным началом	—
Ее интерпретация в проективной геометрии пространства R_{n-1}	241
4. Систематизация аффинной и метрической геометрии на основе принципа Кэли	241
Включение основных понятий аффинной геометрии в проек- тивную систему	—
Включение грассманова принципа детерминантов в инвариант- но-теоретическое понимание геометрии. Экскурс о тензорах	241
Включение основных понятий метрической геометрии в проек- тивную систему	254
Проективная трактовка геометрии треугольника	261

II. Основания геометрии

Общая постановка вопроса; соотношение с аналитической гео- метрией	262
Указания, относящиеся к построению чисто проективной гео- метрии с последующим присоединением метрической	263
1. Построение геометрии на плоскости, на основе движений	264
Построение аффинной геометрии, основанное на параллельных смещениях	—
Привлечение вращений к построению метрической геометрии	270
Окончательное установление выражений для расстояния и угла	281
Введение общих понятий площади и длины кривой	281
2. Другое обоснование метрической геометрии; роль аксиомы параллелей	281
Расстояние, угол, нагруженность как основные понятия	—
Аксиома параллелей и теория параллелей (неевклидова гео- метрия)	284
Философское значение неевклидовой геометрии	284
Включение неевклидовой геометрии в проективную систему	284
Общие замечания о современной геометрической аксиоматике	284
3. „Начала“ Евклида	284
Критические замечания к вопросу об историческом положении и научном значении „Начал“	—
Содержание 13 книг Евклида	284
Обоснование геометрии у Евклида	284
Начало первой книги	284
Отсутствие аксиом расположения у Евклида; возможность так называемых геометрических софизмов	284
„Архимедова аксиома“ у Евклида; отступление о „роговидных углах“, как примере системы величин, исключаемой этой аксиомой	284

Стр.

О ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ

Значение исторического базиса	345
Противопоставление современных требований	349
Критические замечания к традиционной постановке преподавания	354

I. Преподавание в Англии

Традиционный тип преподавания и экзаменов	352
Ассоциации содействия улучшению преподавания геометрии	354
Перри и его стремления	356
Некоторые учебники, учитывающие требования реформы	358

II. Преподавание во Франции

Петр Рамус и Клеро	360
„Начала“ Лежандра и их значение	363
Отступление о лежандровой теории параллелей	366
Последователи Лежандра	369
Реформа преподавания 1802 г.	370
Влияние „Новых начал“ Мере	372

III. Преподавание в Италии

Влияние Крмоны	373
Более старые учебники геометрии	375
Новейшие требования повышенной строгости	376
Школа Певзо	379
Стремления к реформе	379

IV. Преподавание в Германии

Влияния преподавания в народных школах (Песталоцци и Гербарта)	380
Австрийский план Эиснера и Бойника (1849); самостоятельная забота о развитии пространственной интуиции	383
Перенесение этих стремлений в северную Германию; учебники Гольдшмидлера	384
Импульсы со стороны экспериментальной психологии	386
Отношение к современному художественному воспитанию	389
Шопенгауэрова критика математики; отступление о доказательствах пифагоровой теоремы	391
Новейшие воздействия со стороны высшей школы	394
Австрийский учебный план 1900 г. и „Курс“ Гейдриха и Тройтлейна	396

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Добавление I

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рефераты в Энциклопедии	399
Классификация геометрических задач на построение	400
О построениях, выполнимых помощью наиболее употребитель- ных чертежных инструментов	402
О применении преобразований для упрощения геометрических задач	408
Новейшая литература по проведению эрлангенской программы	411
К начертательной геометрии	413
Правило Непера и Pentagramma mirificum	414

Добавление II

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПРЕПОДАВАНИИ ГЕОМЕТРИИ В ОТДЕЛЬНЫХ СТРАНАХ

Вопросы о современных школьных реформах	418
1. Англия	421
2. Франция	426
3. Италия	431
4. Германия (О дальнейшем развитии прусской школьной ре- формы)	434

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

К сказанному в предисловии редактора перевода первого тома и к характеристике содержания и формы изложения этого второго тома, содержащейся в предисловии самого автора, а также во введении, прибавить почти что нечего. Если в первом томе интереснейшие критические, методические, исторические соображения, замечания, сопоставления Клейна происходят на фоне фактов алгебры и анализа, в общем хорошо известных читателю с университетским математическим образованием, то здесь, во втором томе, обсуждаемые вещи в значительной части являются мало знакомыми такому читателю (если его знания ограничиваются университетскими воспоминаниями), особенно у нас в Союзе. Поэтому хотелось бы надеяться, что эти лекции, в которых так ярко скаывается наряду с широтой научных и педагогических горизонтов, глубиной и трезвостью творческой и критической мысли и специфически клейновской способностью к координации, систематизации, взаимному переплетению разнообразнейшего материала, также и полная энергии и воли к действию, всегда бодрая и заражающая этой бодростью окружающая личность автора, — будут способствовать и у нас в самых широких слоях учительства и учащейся молодежи подъему интереса к геометрическим дисциплинам, одинаково прекрасным как внутреннею красотой построения, так и богатством приложений, и к проблематике наилучшего их преподавания.

Несколько слов о выполнении перевода. Клейн еще при жизни занял бесспорное место среди классиков науки. Математики-исследователи и педагоги (не только математики!) цитируют его; быть может, чаще, чем кого бы то ни было. С другой стороны, стиль Клейна всегда в высокой степени индивидуален, а в этом произведении, полном характеристик личностей, эпох и направлений, особенно отражает мощную темпераментность автора. Поэтому малейший перефраз оригинала всегда рискует исказить

если не самую мысль, то нюанс, оттенок мысли автора. Вот почему мы старались возможно ближе передавать текст до мелких деталей включительно, хотя бы и ценою, иной раз, тяжеловесности перевода. В тех редких случаях, где нам казалось желательным и допустимым вставить, ради большей ясности, лишнее слово или вариант оригинального выражения, мы помещали эти слова и варианты в квадратные скобки; более значительные наши вставки отнесены в подстрочные выноски и тоже заключены в квадратные скобки. Что касается передачи математических терминов, то возможно, что она не всегда встретит всеобщее одобрение, что неизбежно по причине редкого употребления части соответствующих понятий в русской математической литературе. В частности, термины Грассмана: *Linienteil*, *Ebenteil*, *Raumteil* я передаю выражениями: „линейный элемент“, „плоскостный элемент“, „пространственный элемент“, а не „часть линии“ или „линейная часть“ и т. д. (указав, впрочем, на такой буквальный перевод). Дело в том, что Клейна интересует в соответствующих местах не буква, а самая идея разбираемых вещей, что доказывается уже тем, что он сам часто вместо грассманова *Linienteil* говорит *Vektor*; слово же „элемент“ казалось мне более подходящим здесь, чем „часть“.

Ввиду того, что из рекомендуемой Клейном литературы лишь очень немногое существует в русском переводе (Вебер-Вельштейн, Энриквес, Адлер, Эрлангенская программа,...), считаю уместным обратить внимание читателя на ценную книгу проф. В. Ф. Кагана „Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии“ (Одесса 1907).

Нелегкую в общем работу по переводу этого тома мне отчасти облегчили мои бывшие ученики М. А. Неймарк и В. В. Гуссов.

Почти тридцать лет минуло с тех пор, как я впервые подошел к знаменитому уже тогда профессору Феликсу Клейну с *Anmeldungsbuch* (зачетной книжкой) в руках. Пусть этот посильный труд переводчика-редактора явится скромным выражением чувства глубокой признательности незабвенному учителю.

Д. Крижановский.

Одесса, 8 июля 1938 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В соответствии с общим планом, развитым мною в предисловии к третьему изданию первого тома, относительно переиздания моих литографированных лекций, текст и изложение настоящего второго тома остались без перемен, если не считать небольших изменений в деталях и нескольких вставок. Оба прибавления, относящиеся к нерассмотренной в первоначальном тексте литературе научного и педагогического характера, были и на этот раз составлены, после повторных обсуждений со мною, г. Зейфартом (Seyfarth). Он же снова взял на себя наибольшую часть работы, связанной с изданием книги.

Ф. Клейн.

Геттинген, май 1925.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В предисловии к первому тому настоящих лекций (трифметика, алгебра, анализ) я выразил сомнение в том, сможет ли второй том, посвященный геометрии, появиться так скоро. Однако его уже удалось обработать, в значительной степени благодаря энергии г. Гейлингера, что я охотно отмечаю.

Относительно происхождения и цели всей этой серии лекций я не имею прибавить ничего особенного к тому, что было сказано в предисловии к первому тому. Но представляется, пожалуй, необходимым сказать несколько слов о новой форме, какую принял этот второй том.

Действительно, эта форма совершенно иная, чем в первом томе. Я решая дать, прежде всего, общий обзор всей области геометрии в том объеме, какой я считаю желательным для всякого учителя средней школы. Поэтому соображения, относящиеся к преподаванию геометрии, отошли на задний план; но зато они даны в связанной форме в конце, поскольку оставалось место.

При описанном изменении в расположении материал в известной степени сыграло свою роль желание избежать повторения одной какой-нибудь слишком стереотипной формы. Но можно привести и более серьезные внутренние основания. Мы не имеем по геометрии таких цельных учебников, соответствующих общему состоянию науки, какими мы обладаем по алгебре и анализу, благодаря наличию служащих образцом французских *Cours* (курсов). Вместо этого мы встречаем изложение то одной, то другой стороны нашего многообъемлющего предмета в соответствии с их разработкой той или другой группой исследователей. В противоположность этому казалось, точки зрения преследуемых мною педагогических и общенаучных целей, существенно важным попытаться дать более целостное суммарное изложение.

Заканчивая пожеланием, чтобы оба уже теперь готовых взаимно дополняющих друг друга тома „Элементарной математики с точки зрения высшей“ встретили в учительском мире то же дружеское внимание, как и лекции по вопросам организации преподавания математики, изданные в прошлом году г. Шиммаком (Schimmak) и мною.

Ф. Клейн.

Геттинген, Рождество 1908.

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые слушатели!

Курс, к чтению которого я сегодня приступаю, должен составить непосредственное продолжение и дополнение курса, прочитанного мною в последнюю зиму¹⁾. Теперь, как и тогда, моя цель заключается в том, чтобы все то, чем вы занимались в области математики за годы студенчества, поскольку оно может представить хотя бы какой-нибудь интерес для будущего учителя, свестиоедино, а главное — разъяснить с точки зрения его значения для постановки школьного преподавания математики. Зимой я осуществил эту программу поочередно для арифметики, алгебры и анализа; в текущем семестре очередь за геометрией, которая тогда оставалась в стороне. При этом наши рассуждения должны быть понятны, конечно, и независимо от прошлого курса. Кроме того, я хочу несколько изменить также и самый тон всего курса в целом. На первом плане должен стоять теперь, — я бы сказал, — энциклопедический момент; вы должны получить обзор всей области геометрии, который даст вам готовые рамки для размещения в них всех отдельных сведений, приобретенных вами за время вашего обучения, чтобы держать их, таким образом, наготове для какого угодно употребления. И лишь после этого, сам собою, возникнет также и тот интерес к школьному преподаванию математики, который зимой всегда служил для меня исходным пунктом.

¹⁾ [Этот зимний курс (посвященный арифметике, алгебре и анализу) был издан в виде I т. этих лекций, сперва в литографированном (1909), а потом в печатном виде. Русский перевод этого I т. (Д. А. Крыжановского под редакцией В. Ф. Кагана) был издан впервые в 1911 г. (издательством „Матезис“ в Одессе) под названием „Вопросы элементарной и высшей математики“, т. I и в настоящее время переиздан ГГТИ. В дальнейших ссылках на „т. I“ первое число указывает на страницу этого последнего русского издания ГГТИ, а второе (в скобках) на страницу упомянутого издания „Матезис“.]

Очень отмечу еще, что во время пасхальных каникул 1901 г. здесь, в Геттингене, состоялись каникулы и ринге для преподавателей математики и физики в старших классах. На этих курсах я сделал сообщение о моем нынешнем курсе, и в связи с ним, а также с докладом профессора хейншей гимназии Берендсона (Berendson), возникли очень интересные и живые прения по вопросу о реформе школьного обучения арифметике, алгебре и анализу и, в частности, о введении в школу дифференциального и интегрального исчисления¹⁾. Участники курсов обнаруживают при этом крайне острый интерес к этим вопросам, как и вообще к нашим стремлениям создать живую связь между университетом и школой. В направлении тех же стремлений должен воздействовать и мой университетский курс. Будем надеяться, что он со своей стороны поможет устранению тех старых жалоб, которые нам постоянно — и, увы, часто вполне заслуженно — приходится выслушивать со стороны школы: хотя университетское преподавание и дает много специальных знаний, тем не менее оно оставляет будущего учителя без всякой ориентировки относительно многих важных вещей общего характера, которыми он позже действительно может воспользоваться.

Относительно материала этих лекций замечу только, что я, как и в моем прежнем курсе, вынужден был предполагать, во мере надобности, что вам известны основные понятия из всех областей математики, которые сообщаются обыкновенно в других курсах, чтобы иметь возможность сделать ударение на обзоре всего. При этом я буду, конечно, каждый раз стараться настолько помочь вашей памяти краткими указаниями, чтобы вы без труда смогли вполне ориентироваться в литературе. Но, с другой стороны, я буду, — тоже наравне в первой части, — в гораздо большей степени, чем это обыкновенно делается, указывать на историческое

¹⁾ Ср. важный реферат Шиммеля „О постановке преподавания математики в деле новых реформаторских идей“ (H. Schimmack, Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reform, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 1901, 30, S. 513—527, 1902 (преданная также в виде брошюры вена, Leipzig 1902).