

Э. Маделунг

**Математический аппарат
физики**

Справочное руководство

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э1 **Э. Маделунг**
Математический аппарат физики: Справочное руководство / Э. Маделунг – М.: Книга по Требованию, 2013. – 618 с.

ISBN 978-5-458-36667-0

Книга представляет собой обширное справочное пособие по математике и теоретической физике. Благодаря обилию фактического материала и своеобразной манере изложения книга получила широкую известность во многих странах. Основное содержание книги: I. Математика. 1) Числа, функции и операторы. 2) Дифференциальное и интегральное исчисление. 3) Ряды и разложения. 4) Теория функций (в частности, специальные функции). 5) Алгебра. 6) Преобразования. 7) Векторный и тензорный анализ. 8) Специальные системы координат. 9) Теория групп (с теорией представлений). 10) Дифференциальные уравнения (обыкновенные и с частными производными, линейные задачи, теория возмущений). 11) Интегральные уравнения. 12) Вариационное исчисление. 13) Теория вероятностей. II. Физика. 1) Механика. 2) Электродинамика (с включением оптики). 3) Теория относительности. 4) Квантовая теория (с теорией излучения). 5) Термодинамика. 6) Статистические методы. Книга представляет единственное в своем роде пособие и будет полезна широкому кругу специалистов-физиков, математиков, инженеров, работников научно-исследовательских институтов и лабораторий. Она может быть также использована аспирантами и студентами университетов и вузов.

ISBN 978-5-458-36667-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	12
Из предисловия автора к четвертому изданию	14
Введение	15

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ МАТЕМАТИКА

Система понятий математики	19
Раздел первый. Числа, функции и операторы	20
А. Числа	20
1. Натуральные числа (20). 2. Рациональные числа (22). 3. Иррациональные числа (22). 4. Операции (23). 5. Функции (23). 6. Пределы (24).	
В. Многомерные числа	25
1. Числовые пространства и многообразия (25). 2. Многомерные алгебры (26). 3. Комплексные числа (26). 4. Кватернионы (17). Гиперкомплексные числа высшего порядка (28). Клиффордовы числа (28).	
С. Числовые последовательности и функции	29
1. Простые и кратные последовательности (29). 2. Суммы и средние значения (31). 3. Разложение векторов и функций (33).	
Д. Операторы	31
1. Понятие оператора (34). 2. Единичный оператор E и дельта-функция (35). 3. Операторы, связанные с данным оператором (38). 4. Алгебра операторов (39). 5. Алгебранческое построение операторов (40). 6. Специальные элементарные линейные операторы (41). 7. Дифференциальные операторы (45). 8. Преобразования (46). 9. Собственные значения и собственные решения (47). 10. Операторные уравнения (48). 11. Представление операторов матрицами (49). 12. Многопараметрические операторы (50). 13. Симметризирующий оператор (51).	
Раздел второй. Дифференциальное и интегральное исчисление	53
А. Определения и обозначения	53
В. Правила дифференцирования	54
1. Произведения и частные (54). 2. Функции от функций (55). 3. Обратные функции (55). 4. Неявные функции (56). 5. Параметрическое задание функций (56). 6. Полный дифференциал (56). 7. Введение новых переменных (56). 8. Целые рациональные функции r -й степени от n переменных (57). 9. Дифференцирование интегралов (58).	
С. Таблица производных и интегралов	59

D. Методы интегрирования	61
1. Общие замечания (61). 2. Рациональные функции; разложение на простейшие дроби (62).	
E. Определенные интегралы	64
1. Методы вычисления (64). 2. Оценки (66). 3. Приближение интегралов суммами (66). 4. Некоторые формулы (67). 5. Несобственные функции (70). 6. Эллиптические интегралы (71).	
F. Конечные разности	74
Раздел третий. Ряды и разложения	79
A. Ряды	79
1. Общие сведения (79). 2. Признаки сходимости (80). 3. Суммы некоторых рядов (81).	
B. Разложение функций в ряды	82
1. Представление произвольной функции при помощи известных функций (83). 2. Разложение функций в степенные ряды (84). 3. Ортогональные системы функций (88). 4. Разложения по ортогональным системам (91). 5. Специальные ортогональные разложения (94).	
Раздел четвертый. Функции	98
A. Общая теория функций	93
1. Определения и обозначения (98). 2. Комплексные функции (99). 3. Аналитические функции (100). 4. Криволинейные интегралы (102). 5. Разложение аналитических функций в степенные ряды (103). 6. Методы вычисления комплексных интегралов (107). 7. Отображение, осуществляемое комплексными функциями (110). 8. Наглядное изображение комплексных функций (111).	
B. Специальные функции	114
1. Определение функций (114). 2. Классификация функций (114). 3. Алгебраические функции (115). 4. Элементарные трансцендентные функции (119). 5. Функции гипергеометрического типа (129). 6. Конфлюэнтные гипергеометрические функции (139). 7. Факториал $\Pi(x)$ и гамма-функция $\Gamma(x)$ (151). 8. Функции Матье (и Хилла) (154). 9. Эллиптические интегралы и функции (155).	
Раздел пятый. Алгебра	161
A. Линейные уравнения	161
1. Определения и обозначения (161). 2. Разрешимость и решения (162). 3. Вторая нормальная форма (164). 4. Линейные уравнения с бесконечным числом неизвестных (165).	
B. Матрицы	166
1. Определения, обозначения (166). 2. Операции с конечными матрицами (167). 3. Определитель, ранг, след (169). 4. Специальные матрицы (169). 5. Матрицы со свойствами симметрии (170). 6. Преобразование матриц (172). 7. Бесконечные матрицы (175).	
C. Определители	186
1. Определения (176). 2. Теоремы об определителях (177). 3. Умножение, дифференцирование (178). 4. Оценка и окаймление определителя (178). 5. Специальные определители (179). 6. Бесконечные определители (180). 7. Практическое вычисление (180).	

D. Комбинаторика	181
1. Перестановки (181). 2. Сочетания, размещения (182). 3. Биномальные коэффициенты (182).	
Раздел шестой. Преобразования	184
A. Общие преобразования	184
1. Общие сведения (184). 2. Геометрическая интерпретация (185). 3. Инварианты (185).	
B. Линейные преобразования	186
1. Линейные пространства (186). 2. Общие линейные преобразования (187). 3. Унитарные и ортогональные преобразования (188). 4. Преобразование квадратичных и эрмитовых форм (192).	
C. Преобразование прикосновения (контактное преобразование)	193
1. Двумерный случай (193). 2. Многомерный случай (199).	
Раздел седьмой. Векторный анализ	201
A. Векторы в трехмерном евклидовом пространстве	201
1. Определения (201). 2. Векторная алгебра (202). 3. Алгебраические векторные уравнения (204). 4. Интегральные и дифференциальные выражения (205). 5. Преобразование результатов дифференциальных операций (207). 6. Радиус-вектор r (209). 7. Интегральные теоремы (212). 8. Специальные векторные поля (217). 9. Векторные поля, не всюду непрерывные (218). 10. Совокупности векторов (221). 11. Точечная решетка и взаимная решетка (222). 12. Волновые поля (225). 13. Представление Фурье периодических и непериодических полей (230). 14. Комплексные векторы (236). 15. Кватернионы в векторной символике (237). 16. Гиперкомплексные векторы (238). 17. Дуальные векторы (239). 18. Преобразование к движущейся системе координат (241). 19. Область интегрирования, зависящая от времени (242).	
B. Тензоры в трехмерном пространстве	242
1. Линейные функции поля (242). 2. Понятие тензора (243). 3. Специальные тензоры (245). 4. Скаляры, связанные с тензорами (245). 5. Собственные значения и собственные векторы (246). 6. Геометрическая интерпретация тензора (247). 7. Представление тензоров с помощью векторов (247). 8. Тензорные поля (248). 9. Тензоры, зависящие от времени (249). 10. Тензорные поля, получаемые из векторных полей при помощи дифференциальных операций (249). 11. Тензоры высшего ранга (251).	
C. Векторы и тензоры в пространствах произвольного числа измерений	251
1. Системы векторов (251). 2. Системы координат (253). 3. Компоненты вектора (254). 4. Компоненты тензора (255). 5. Преобразования (255). 6. Дифференцирование и свертывание (256). 7. Неевклидовы пространства (259). 8. Системы координат, зависящие от времени (движущиеся) (260). 9. Ортогональные координаты (260).	
Раздел восьмой. Специальные системы координат	264
A. Двумерные системы	264
1. Декартова система координат x, y (264). 2. Общие (в общем случае неортогональные) системы координат ξ, η (265). 3. Общие ортогональные системы координат u, v, ξ, η (266). 4. Плоские полярные координаты (267). 5. Плоские параболические координаты (268). 6. Плоские эллиптические координаты (268). 7. Плоские биполярные координаты (269).	

В. Трехмерные системы	270
1. Декартова система координат x, y, z (270). 2. Общие цилиндрические координаты (271). 3. Вращательно-симметричные координаты u, v, φ (273). а) Сферические координаты (274). б) Параболические координаты вращения (275). γ) Координаты вытянутого эллипсоида вращения (276). δ) Координаты сплющенного эллипсоида вращения (278). е) Тороидальные координаты (279). ζ) Пространственные биполярные координаты (280). 4. Кошачьи координаты r, u, v (281). 5) Общие эллипсоидальные координаты (282).	
С. N -мерные полярные координаты	285
Раздел девятый. Теория групп	288
А. Общие определения и теоремы	288
1. Группы (288). 2. Подгруппы (289). 3. Преобразование, нормальный делитель (290).	
В. Непрерывные группы	291
С. Теория представлений	293
1. Общие сведения относительно представлений группы (293). 2. Основные теоремы о представлениях (295).	
Д. Специальные группы	297
1. Группы вращений и их представления (297). 2. Представления и характеры групп перестановок (298). 3. Группы симметрии (кристаллы) (300).	
Раздел десятый. Дифференциальные уравнения	309
А. Общие сведения о дифференциальных уравнениях	309
1. Классификация дифференциальных уравнений (309). 2. Решения дифференциальных уравнений (310). 3. Линейные задачи (313).	
В. Обыкновенные дифференциальные уравнения	313
1. Дифференциальные уравнения первого порядка (313). 2. Некоторые особые формы дифференциальных уравнений высшего порядка (317). 3. Линейные дифференциальные уравнения (320). 4. Системы дифференциальных уравнений (332). 5. Уравнения Пфафа (335).	
С. Дифференциальные уравнения с частными производными	337
1. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка (337). 2. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, линейные относительно вторых производных (339).	
Д. Линейные задачи	349
1. Общие сведения (349). 2. Однородные задачи второго порядка (351). 3. Краевые задачи для эллиптических уравнений (356). 4. Задачи с начальными условиями для гиперболических уравнений (359).	
Е. Теория возмущений.	361
1. Задачи о собственных значениях (362). 2. Метод вариации постоянных (370). 3. Прочие методы (371).	

Раздел одиннадцатый. Интегральные уравнения	376
А. Интегральные уравнения второго рода	376
1. Общие положения (376). 2. Симметрическое ядро, однородное уравнение (378). 3. Симметрическое ядро, неоднородное уравнение (380). 4. Несимметрическое ядро (382).	
В. Интегральные уравнения первого рода	382
Раздел двенадцатый. Вариационное исчисление	384
А. Приведение к дифференциальным уравнениям	384
1. Вариация без дополнительных условий (384). 2. Вариация с дополнительными условиями (388).	
В. Прямые методы решения	389
1. Метод Рунца (389). 2. Сведение к задаче с бесконечным числом переменных (389). 3. Аппроксимация ломаными линиями (391).	
Раздел тринадцатый. Статистика (исчисление вероятностей)	392
А. Основные понятия	392
1. Способ описания (392). 2. Относительные частоты (393). 3. Вероятность (394). 4. Основные элементарные правила (395). 5. Средние значения (396).	
В. Статистика серий	396
1. Общие правила (396). 2. Отклонения (397). 3. Особые случаи (399). 4. Корреляция (400).	
С. Теория выравнивания	401
1. Теория ошибок (401). 2. Выравнивание (402). 3. Выравнивание посредственных наблюдений (403).	

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ФИЗИКА

Система понятий теоретической физики	407
Раздел первый. Механика	411
А. Основы механики точки	411
В. Постановка задач	413
С. Механика одной материальной точки	413
1. Общие сведения (413). 2. Особые случаи (414). 3. Уравнения движения в произвольных координатах (417). 4. Так называемые принципы механики точки (421).	
D. Система материальных точек	423
1. Общие сведения (423). 2. Формальное сведение к динамике одной материальной точки (424). 3. Колебания около положений равновесия (425). 4. Механика твердого тела (427).	
E. Механика континуума	430
1. Основные понятия и кинематика (431). 2. Силы (433). 3. Теория упругости (434). 4. Переход к гидродинамике (439). 5. Гидродинамика (440).	

Раздел второй. Электродинамика (с включением оптики).	443
А. Общая теория	443
1. Электростатика (444). 2. Магнитостатика (447). 3. Электрический ток (448). 4. Электромагнетизм (450). 5. Электродинамика (451). 6. Силы (453). 7. Энергия (456). 8. Электрические системы единиц (458).	
В. Специальные случаи	460
1. Электродинамика квазистационарных токов (460). 2. Электродинамика однородной среды (461). 3. Электродинамика периодических полей в однородной среде (464). 4. Механика заряженных материальных точек (467). 5. Основы оптики (471). 6. Волны в анизотропных средах (кристаллооптика) (472).	
Раздел третий. Теория относительности	476
А. Специальная теория относительности	476
1. Пространственно-временная система отсчета (476). 2. Четырехмерное пространство (477). 3. Специальное преобразование Лоренца векторов и тензоров (478). 4. Кинематика (479). 5. Электродинамика (480). 6. Электродинамика движущихся сред (482). 7. Основные уравнения механики континуума (482). 8. Механика точки (483). 9. Общая теория поля (485). 10. Практическое применение теории относительности (487). 11. Релятивистские инварианты (489).	
В. Общая теория относительности	489
1. Основные положения (489). 2. Гравитационное поле (490). 3. Гравитация и материя (490).	
Раздел четвертый. Квантовая теория	492
А. Старая теория	492
1. Механика (492). 2. Электродинамика (494).	
В. Новая теория (волновая механика)	495
I. Нерелятивистская механика точки	496
1. Средства описания (496). 2. Уравнение Шредингера (497). 3. Описание при помощи операторов (501). 4. Постановка задач (503). 5. Общие формы решений уравнения Шредингера (504). 6. Классификация собственных решений (507). 7. Матричный метод (507). 8. Физическая интерпретация решений (511). 9. Соотношение неопределенностей (514). 10. Подсистемы и взаимодействие (515). 11. Принцип Паули (517). 12. Система многих одинаковых частиц (518). 13. Операторы Гамильтона со свойствами симметрии (520).	
II. Релятивистская механика точки	522
1. Основные уравнения (522). 2. Применение уравнений Дирака (526).	
III. Теория излучения	527
1. Теория излучения на основе принципа соответствия (527). 2. Квантовая теория излучения (528). а) Поле излучения, свободное от зарядов (529). б) Взаимодействие излучения с веществом (529). в) Простые процессы взаимодействия (532).	
Раздел пятый. Термодинамика	536
1. Основные понятия (536). 2. Процессы и равновесия (537). 3. Энергия (538). 4. Температура и энтропия (539). 5. Первичные и вторичные интенсивные переменные (540). 6. Коэффициенты и про-	

изводные (541). 7. Уравнения состояния и идеальные газы (543). 8. Процессы в гомогенных системах (544). 9. Процессы в замкнутых системах (545). 10. Равновесие в замкнутых системах (546). 11. Равновесие в незамкнутых системах (547). 12. Теория фаз (548). 13. Третье начало (549). 14. Смеси идеальных газов (549). 15. Реальные газы (551). 16. Обобщения (552). 17. Излучение в полости (552). 18. Релятивистская термодинамика (553).	
Раздел шестой. Статистические методы	554
А. Дискретные состояния	554
1. Общие сведения (554). 2. Термодинамическое равновесие (556).	
В. Статистическая механика	558
1. Классическая механика (558). 2. Разбиение фазового пространства на ячейки (560). 3. Кинетическая модель идеального газа (561).	
С. Статистики Ферми и Бозе	566
Приложение	568
1. Специальные интегралы Фурье (568). 2. Разложение в степенные ряды (569). 3. Преобразование Фурье (571). 4. Гармонический осциллятор в канонических переменных (573). 5. Движение планет в канонических переменных (573). 6. Вынужденные колебания (575). 7. Пример к теории групп (576). 8. Пример к методу Рунге (579). 9. Движение Кеплера (581). 10. Магнитное кольцо (584). 11. Строение атома (584). 12. Электронный газ (586). 13. Пример к расщеплению собственных значений (587). 14. Броуновское движение (589). 15. Флуктуации макроскопических величин (590). 16. Биномиальные коэффициенты (591). 17. Коэффициенты рядов (593). 18. Единицы количества электричества (594). 19. Единицы энергии (594). 20. Единицы длины (595). 21. Универсальные постоянные (595).	
Литература	596
Предметный указатель	605

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателя книга немецкого физика Э. Маделунга занимает особое место в физико-математической справочной литературе. За рубежом она пользуется большой популярностью в кругах специалистов и с момента выхода в свет ее первого издания в 1922 г. выдержала пять переизданий, причем при подготовке третьего и четвертого изданий автор в значительной степени переработал и дополнил ее. Особенности этой книги заключаются, во-первых, в отборе и систематизации материала и, во-вторых, в характере его изложения. Как пишет автор в предисловии к четвертому изданию, книга эта, не претендуя на то, чтобы быть учебным пособием, представляет собой «нечто большее, чем простой справочник или сборник формул». Отбор и систематизация материала в этой книге, в отличие от справочных изданий, рассчитанных на квалифицированного научного работника в области физико-математических наук, преследует цель дать более или менее полную картину математического аппарата теоретической физики, начиная с таких основных математических понятий, как понятия числа, функции и оператора, и кончая разделами математики, которые нашли применение в теоретической физике лишь в недавнее время. Кроме того, около одной трети книги посвящено обзору главнейших разделов теоретической физики, в котором автор, излагая в сжатом виде содержание соответствующих дисциплин, ставит перед собой цель раскрыть взаимопроникновение математических и физических идей, составляющих основу этих дисциплин. В этой связи представляет также интерес введение в физическую часть справочника, в котором автор делает попытку классификации физических теорий в соответствии с их структурой и характером применяемого ими математического аппарата.

Что касается самого изложения материала книги, то оно, в отличие от большинства справочных изданий такого рода, до некоторой степени несет на себе отпечаток личных взглядов автора, выкристаллизовавшихся, как автор сообщает в предисловии к первому изданию, в процессе его многолетней исследовательской и педагогической работы. Это обстоятельство, несомненно, обусловило ряд важных достоинств книги, но в то же время привело к известной ее односторонности. Необычность характера изложения проявляется также в его

максимальной «физичности» в математической части и известной «математичности» в физической части. Следует, однако, отметить, что автор иногда слишком далеко отходит от общепринятых формулировок и оперирует представлениями, не укладывающимися в рамки математики. Хотя в книгах, предназначенных для физиков, допустимы отклонения от современного стандарта математической строгости и привычной для математика и физика-теоретика номенклатуры понятий, все же в отдельных случаях автор пошел в этом направлении дальше, чем это было необходимо. В частности, укажем на вводимое автором без ясного определения понятие «плотной последовательности» (стр. 22), которое, на наш взгляд, не служит никакой полезной цели.

В книге такого объема и такой калейдоскопичности не могут не встретиться и фактические погрешности. Те из них, которые были обнаружены при переводе, были исправлены, что иногда (но не во всех случаях) оговаривалось в подстрочных примечаниях. Были также выявлены некоторые другие погрешности, исправление которых без существенного пересмотра текста оказалось невозможным. Такие места переводились без изменений, но сопровождалась необходимыми пояснениями в подстрочных примечаниях. Кроме того, при переводе были опущены некоторые места, не имеющие непосредственного отношения к излагаемому справочному материалу.

Что касается библиографии, то полностью сохранен весь список литературы немецкого издания; он дополнен еще указаниями на некоторые распространенные у нас монографии, учебные и справочные руководства.

Мы здесь остановились на некоторых недостатках книги Э. Мадлунга подробнее, чем на многих ее достоинствах, которые легко обнаруживаются при пользовании ею. Эта книга, без сомнения, явится ценным вкладом в нашу справочную литературу и, как мы надеемся, окажет помощь широкому кругу читателей.

В. И. Левин

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Третье издание этой книги вышло в свет в 1935 г. Уже в 1942 г. я получил предложение подготовить новое издание книги; к этому времени полностью разошедшейся. Необходимая для этого работа растянулась почти на шесть лет. Принявшись за переработку книги, я вскоре понял, что было бы нецелесообразно ограничиться лишь небольшими улучшениями. Необходимость быть кратким и вместе с тем ясным заставила меня всюду стремиться к большей систематичности изложения.

Книга в новом издании сохранила свой прежний характер, хотя мои личные точки зрения получили в ней более полное выражение, чем в предыдущих изданиях. Некоторое увеличение объема книги объясняется многочисленными дополнениями, которые, как я полагал, могут повысить ее ценность. В ряде мест оказались возможными и сокращения. В части, посвященной физике, я приложил дальнейшие усилия к тому, чтобы с достаточной четкостью выявить связь между математическими и физическими идеями.

Я знаю, что моя книга во многих ее частях не встретит одобрения математиков. Они порицают мое непринужденное обращение с тем, что они рассматривают как свое священное достояние. Однако многое из того, что им представляется важным и интересным, для нас, физиков, не имеет большого значения. Мы не можем оснащать машину, которая должна нам служить, чрезмерно большим количеством предохранительных устройств и окружать ее предохраняющими надписями, не причиняя себе тем самым чувствительных неудобств.

Я хотел бы еще раз указать на то, что книга, не будучи учебником в собственном смысле слова, мыслилась все же как нечто большее, чем простой справочник или сборник формул. В ней по разным поводам высказан ряд мыслей, в настоящее время не являющихся еще общим достоянием, которые руководили мной при написании этой книги.

Франкфурт-на-Майне,
декабрь 1949 г.

Эрвин Маделунг