К.Х. Кнорре

Исследование о Прогрессике

штаба Черноморского флота и портов

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 93
ББК 63.3
К11

К.Х. Кнорре

К11 Исследование о Прогрессике: штаба Черноморского флота и портов / К.Х. Кнорре – М.: Книга по Требованию, 2022. – 46 с.

ISBN 978-5-458-11889-7

Ученый Комитет Морского министерства издал в 1837 году книгу под заглавием "Аналитическое исследование о кривой линии, Прогрессике, употребляемой в корабельной архитектуре", сочиненную корпуса корабельных инженеров полковником Поповым.

ISBN 978-5-458-11889-7

въ него, можно бы уменьшить однимъ, раздѣливъ обѣ части на любаго изъ нихъ, напр. на $n-1$, чѣмъ оно приняло бы видъ

$$xy^2+\frac{a}{n-1}y^2=\frac{b^2n}{n-1}x,$$

и означивъ каждаго изъ сомножителей $\frac{a}{n-1}$ и $\frac{b^2n}{n-1}$ одною только буквою; но мы будемъ употреблять это сокращеніе только тамъ, гдѣ оно принесетъ существенную пользу.

Изъ прежде принятаго уравненія выводится формула

$$y^2=\frac{b^2nx}{a+(n-1)x},$$

которая показываетъ, что каждой абциссѣ x соотвѣтствуютъ двѣ равныя ординаты y съ противными знаками, то есть: что кривая расположена симметрически по обѣимъ сторонамъ оси абциссъ. Полагая $x=o$, выходитъ также $y=o$, слѣдовательно кривая проходитъ чрезъ начало координатъ; полагая же $x=a$, выходитъ $y=b$; откуда заключить должно, что постоянныя a и b суть пара данныхъ координатъ. При весьма малыхъ абциссахъ членъ $(n-1)x$ въ знаменателѣ ничтоженъ въ сравненіи съ a, почему въ такомъ случаѣ безъ чувствительной погрѣшности будетъ

$$y^2=\frac{b^2nx}{a};$$

слѣдовательно около начала координатъ прогрессика сливается съ коническою параболою, имѣющею параметръ $\frac{b^2 n}{a}$, и потому эта точка будетъ вершиною.

3.

Что же касается до постояннаго n, которое Г. Поповъ назвалъ *Экспонентомъ*, то оно тѣсно сопряжено съ натурою кривой. Прогрессики, у коихъ n находится между нулемъ и 1, во всѣхъ свойствахъ такъ много разнствуютъ съ тѣми, у коихъ оно падаетъ внѣ этихъ предѣловъ, что Г. Поповъ счелъ нужнымъ дать имъ разныя имена. Онъ называетъ послѣднія *прогрессиками параболическими*, а первыя *прогрессиками конхоидальными*. Впрочемъ не должно думать, чтобы n имѣло всегда постоянную величину для той же кривой, какая бы пара координатъ не принималась для a и b; напротивъ того, между a, b и n существуетъ такая зависимость, что всякой новой парѣ координатъ соотвѣтствуетъ и новое n въ той же кривой. Чтобы выразить эту зависимость, примемъ вмѣсто a и b координаты α и β, и назовемъ ν экспонентъ, соотвѣтствующій этому положенію, то уравненія

$$xy^2+\frac{\alpha}{\nu-1}y^2=\frac{\beta^2\nu}{\nu-1}x$$

$$\text{и } xy^2+\frac{a}{n-1}y^2=\frac{b^2 n}{n-1}x$$

очевидно тогда только принадлежатъ той же кривой, когда

$$\frac{\alpha}{\nu-1}=\frac{a}{n-1} \text{ и } \frac{\beta^2\nu}{\nu-1}=\frac{b^2n}{n-1}.$$

Второе изъ этихъ уравненій даетъ

$$\frac{1}{\nu}=1+\frac{\beta^2}{b^2}\cdot\frac{1-n}{n}.$$

Приложимъ эту формулу прежде къ прогрессикамъ пораболическимъ, у коихъ по опредѣленію

$$\frac{1-n}{n}<0.$$

Замѣтимъ вообще, что абцисса никогда не сдѣлается мнимою, какая бы величина не принималась для ординаты; ибо въ уравненіе прогрессики входитъ только первая степень x; откуда сомножитель β^2 можетъ имѣть всѣ величины отъ нуля до безконечно великой. Назначая же ему послѣдовательно величины отъ нуля до $\frac{b^2n}{n-1}$, получимъ для $\frac{\beta^2}{b^2}\cdot\frac{1-n}{n}$ величины отъ нуля до -1, а для ν величины отъ 1 до безконечно великой; уменьшая же β^2 послѣдовательно отъ безконечно великой до $\frac{b^2n}{n-1}$, получимъ для ν всѣ отрицательныя величины отъ нуля до безконечно великой. Изъ этого разсужденія слѣдуетъ, что экспонентъ всякой прогрессики параболической можетъ получать всѣ возможныя величины лежащія внѣ предѣловъ 0 и 1, лишь бы коорди-

наты α и β были свойственно приняты. И потому, е
будетъ задана кривая съ отрицательнымъ n, то мо
всегда преобразовать уравненіе ея такъ, чтобъ она по
чила положительное n превышающее 1; отчего можно
стоянно полагать въ прогрессикѣ параболической $n>$
не вредя всеобщности.

Въ прогрессикѣ же конходальной имѣемъ

$$\frac{1-n}{n}>o;$$

слѣдовательно, назначая количеству β^2 всѣ величины
нуля до безконечно великой, получимъ для $\frac{1}{\nu}$ всѣ воз
жныя величины >1; слѣдовательно ν можетъ получать
кривыхъ этого рода всѣ величины между нулемъ и 1,
никогда не выйдетъ изъ сихъ предѣловъ.

4.

Займемся теперь изслѣдованіемъ нѣкоторыхъ свойс
прогрессики параболической. Всякая кривая тре
степени имѣетъ или три азимптоты, или только од
Кривая этого чина, не имѣющая вовсе азимптоты,
существуетъ. Перемѣняя въ одно время знаки абци
a и x, не производимъ никакой перемѣны въ уравненіи п
грессики, почему можемъ полагать a всегда положите
нымъ; ибо всѣ заключенія, выведенныя при этомъ предпо
женіи, простираются также и для отрицательнаго a, ли

бы абциссы были считаемы въ противную сторону. Что же касается до ординаты b, то только квадратъ ея входитъ въ уравненіе, а потому все равно, считать ли ее положительною или отрицательною. Разсматривая же формулу

$$y^2=\frac{b^2n}{\frac{a}{x}+n-1},$$

легко увѣриться можно, что для всѣхъ положительныхъ величинъ абциссы, будетъ также $y^2>o$; поелику же знаменатель $\frac{a}{x}+n-1$ дѣлается тѣмъ меньше чѣмъ больше x, то y^2 безпрерывно увеличивается при возрастающемъ x, но съ быстротою тѣмъ меньшею, чѣмъ больше x; наконецъ, когда x дѣлается весьма великимъ, то y^2 получаетъ постоянную величину $\frac{b^2n}{n-1}$. Слѣдовательно кривая имѣетъ двѣ азимптоты параллельныя оси и удаленныя отъ нее по обѣ стороны на разстояніе $b\sqrt{\frac{n}{n-1}}$. Когда же $x<o$, то будетъ также $y^2<o$, доколѣ x находится между нулемъ и $-\frac{a}{n-1}$; слѣдовательно въ этомъ пространствѣ кривая пресѣкается. Но когда $x=-\frac{a}{n-1}$, тогда ордината дѣлается безконечно великою; слѣдовательно третяя азимптота пересѣкаетъ ось подъ прямымъ угломъ въ разстояніи

$-\frac{a}{n-1}$ отъ начала. Когда наконецъ $x < -\frac{a}{n-1}$, то y^2, оставаясь всегда положительнымъ, уменьшается постепенно до предѣла $\frac{b^2 n}{n-1}$. Изъ этого разсужденія легко видѣть можно, что прогрессика параболическая имѣетъ три вѣтви, изображенныя въ чертежѣ 1-мъ, гдѣ Bx означаетъ ось абциссъ, считаемыхъ отъ A къ x; EF, GH и JK азимптоты расположенныя такъ, что

$$AB = \frac{a}{n-1} \quad \text{и} \quad BC = BD = b\sqrt{\frac{n}{n-1}},$$

а FAH, ELJ и GMK вѣтви кривой.

5.

Когда $n = 1$, то первый членъ въ уравненіи

$$(n-1)\,xy^2 + ay^2 = b^2 nx$$

уничтожается, и кривая дѣлается коническою параболою которую можно считать переходомъ изъ прогрессики параболической въ конхоидальную. Свойства параболы так извѣстны, что этотъ случай не требуетъ дальнѣйшаго объясненія, почему приступимъ къ изслѣдованію прогрессики конхоидальной, у которой n находится между 1 и нулемъ. Когда увеличиваемъ x постепенно, начиная отъ нуля, то квадратъ ординаты быстро растетъ, такъ, что он уже дѣлается безконечно великимъ, когда

$$x = \frac{a}{1-n};$$

слѣдовательно кривая имѣетъ азимптоту, пересѣкающую ось абциссъ подъ прямымъ угломъ въ разстояніи $\frac{a}{1-n}$ отъ начала. Но когда

$$x > \frac{a}{1-n} \text{ или когда } x < 0,$$

то выходитъ всегда $y^2 < 0$, откуда заключить должно, что вся кривая занимаетъ только пространство отъ $x = 0$ до $x = \frac{a}{1-n}$, и что она не имѣетъ ни другихъ вѣтвей, ни азимптотъ. Чертежъ 2 изображаетъ такую кривую JAK съ ея азимптотою JK, находлящеюся отъ начала въ разстояніи $AB = \frac{a}{1-n}$.

6.

Для начертанія прогрессики можно, принявъ достаточное число ординатъ по произволу, вычислить соотвѣтствующія имъ абциссы по формулѣ

$$x = \frac{ay^2}{b^2 n + (1-n)y^2}.$$

Эту формулу можно приспособить къ вычисленію логарифмами, полагая для прогрессики параболической

$$\frac{y}{b}\sqrt{\frac{n-1}{n}} = \cos\varphi; \text{ тогда } x = \frac{a.\cot^2\varphi}{n-1}.$$

Впрочемъ формула $\frac{y}{b}\sqrt{\frac{n-1}{n}} = \cos.\varphi$ тогда только даетъ дѣйствительныя величины для φ, когда $y < b\sqrt{\frac{n}{n-1}}$: по

му для тѣхъ вѣтвей кривой, гдѣ $y > b\sqrt{\frac{n}{n-1}}$, сдѣлаемъ

$$\frac{b}{y}\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \cos. T;\ \text{тогда найдется}\ x = -\frac{a}{(n-1)\sin^2 T}.$$

Для прогрессики же конхоидальной, полагая

$$\frac{b}{y}\sqrt{\frac{n}{1-n}} = \cot\psi,\ \text{будетъ}\ x = \frac{a\sin^2\psi}{1-n}.$$

Въ этомъ видѣ формулы такъ удобны, что я предпоче бы вычисленіе всякому графическому способу. По мое мнѣнію, одно изъ главныхъ преимуществъ образова корпуса судовъ на математическихъ основаніяхъ состо въ томъ, что вычисленіемъ можно находить для лекал размѣренія, во всей точности соотвѣтствующія назнач ной кривой поверхности, не прибѣгая никогда къ чер жу; а этого преимущества мы совершенно лишимся, е ли по прежнему будемъ опредѣлять размѣренія шпан утовъ съемкою ординатъ съ чертежа, въ особенности к гда онѣ опредѣлены геометрическими строеніями, подв женными въ практикѣ всѣмъ невѣрностямъ черчен Впрочемъ желая доставить корабельнымъ Инженерамъ способы выбирать по собственному усмотрѣнію меж черченіемъ и вычисленіемъ, я буду вездѣ, гдѣ задачи гутъ быть рѣшены геометріею, излагать, кромѣ аналитическихъ способовъ, и строенія.

7.

Теорема. Да будутъ a и x двѣ абциссы, а b и y соотвѣтствующія имъ ординаты какой либо прогрессики. На прямой AB (чертежъ 3) возьмемъ точку G, такъ чтобъ было

$$AB : AG = b^2 : y^2,$$

потомъ изъ точки C, принятой по произволу внѣ линіи AB, проведемъ чрезъ B и G прямыя CE и CM, сдѣлаемъ $CE = n . CB$, гдѣ n означаетъ экспонентъ прогрессики, и соединимъ точки A и E прямою AE, то говорю, что будетъ

$$AE : AM = a : x.$$

Доказательство. Проведя ED параллельно къ MC, будетъ

$$AG : BG = AG : AB - AG = y^2 : b^2 - y^2$$
$$BG : DG = CB : CE \qquad = 1 : n$$

$$AG : DG = AM : EM \qquad = y^2 : n(b^2 - y^2)$$
$$AE : AM = AM + EM : AM = y^2 + n(b^2 - y^2) : y^2;$$

но изъ формулы $x = \dfrac{ay^2}{b^2 n + (1-n) y^2}$ выходитъ

$$y^2 + n(b^2 - y^2) : y^2 = a : x,$$

слѣдовательно $AE : AM = a : x$.

Можно еще спросить, какимъ образомъ должно опредѣлить G такъ, чтобъ было

$$AB : AG = b^2 : y^2?$$

Къ тому Геометрія доставляетъ разные способы: моя между точкою A и произвольною линіею, проведенною чр B, напр. CE, вмѣстить линіи AF и AH равныя b, чр точки A, F и H провести кругъ, и взять $AJ = AK$: тогда JK пересѣчетъ AD въ G.

Для доказательства проведемъ діаметръ AL; тс имѣемъ

$$AO : AL = AF^2 : AL^2$$
$$AL : AN = AL^2 : AJ^2$$

$$AO : AN = AF^2 : AJ^2 = b^2 : y^2$$

Но $AO : AN = AB : AG$

слѣдовательно $AB : AG = b^2 : y^2$.

8.

Предъидущая теорема доставляетъ легкій способъ сысканія абциссъ, соотвѣтствующихъ любому числу о натъ прогрессики, у коей даны a, b и n. Примемъ н вершину въ a (чертежъ 4), и ось абциссъ по напра нію ax. Проведемъ ay перпендикулярно къ ax; отъ тс a, положимъ разстояніе ab равное b и возьмемъ на ay доста ное число точекъ $g, g_{,}$ и пр. Чрезъ $b, g, g_{,}$ и пр. проведемъ мыя gm, $g_{,}m_{,}$ и пр. параллельныя къ ax, и сдѣлаемъ b Нѣтъ надобности что бы промежутки ag, gg и пр. были ны; напротивъ того, кажется выгоднѣе сблизить между сс