П. С. Александров

Энциклопедия элементарной математики

Том 3. Функции и пределы (основы анализа)

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 37-053.2
ББК 74.27я7
П11

П. С. Александров
П11 Энциклопедия элементарной математики: Том 3. Функции и пределы (основы анализа) / П. С. Александров – М.: Книга по Требованию, 2023. – 560 с.

ISBN 978-5-458-25955-2

Энциклопедия элементарной математики в 5 томах.Том 3. Функции и пределы (основы анализа).Предлагаемая читателю книга третья «Энциклопедии элементарной математики» завершает первый большой раздел этого издания, посвященный систематическому изложению тех элементов математической науки, на основе которых складываются школьные курсы арифметики, алгебры и отчасти тригонометрии. Если материал первых двух книг ограничивался преимущественно вопросами арифметики и алгебры в собственном смысле слова как учения о числах, их обобщениях, операциях над ними (имеются в виду алгебраические операции: сложение, вычитание, умножение и деление) и алгебраических уравнениях, то третья книга посвящена вопросам анализа, а именно, функциям и пределам. Наряду с учением об элементарных функциях и обстоятельно изложенной теорией пределов, сюда вошли также наиболее элементарные сведения из дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов и сведения о функциях комплексного переменного.

ISBN 978-5-458-25955-2

ПРОИЗВОДНЫЕ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

(*И. П. Натансон*)

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(*В. Л. Гончаров*)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга третья «Энциклопедии элементарной математики» завершает первый большой раздел этого издания, посвящённый систематическому изложению тех элементов математической науки, на основе которых складываются школьные курсы арифметики, алгебры и отчасти тригонометрии. Если материал первых двух книг ограничивался преимущественно вопросами арифметики и алгебры в собственном смысле слова как учения о числах, их обобщениях, операциях над ними (имеются в виду алгебраические операции: сложение, вычитание, умножение и деление) и алгебраических уравнениях, то третья книга посвящена вопросам анализа, а именно, функциям и пределам. Наряду с учением об элементарных функциях и обстоятельно изложенной теорией пределов, сюда вошли также наиболее элементарные сведения из дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов и сведения о функциях комплексного переменного.

Понятия производной и интеграла давно стучатся в двери общеобразовательной школы; как бы ни относиться к вопросу об их фактическом включении в школьные программы, сколько-нибудь удовлетворительное завершённое изложение элементарных основ математической науки без этих основных понятий следует признать немыслимым при современном состоянии науки.

Что касается функций комплексного переменного, то нет ни возможности, ни необходимости в том, чтобы вводить, хотя бы и не в близком будущем, систематические сведения о них в школьную программу. Однако тот основной факт, что элементарные функции являются аналитическими функциями, определёнными во всей комплексной плоскости (за исключением, быть может, определённых точек) и что, следовательно, полного понимания свойств этих функций и связей между ними можно достичь, только рассматривая их как функции комплексного переменного, оправдывает включение в нашу книгу небольшого очерка об аналитических функциях комплексного переменного.

Редакция

В. Л. ГОНЧАРОВ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

ГЛАВА I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ И ГРАФИКАХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Элементарные функции

Ближайшим предметом рассмотрения в математике являются числа и выполняемые над ними операции (действия). И понятие числа и понятие операции допускают неограниченные расширения и обобщения. В настоящей статье, если не сделано особой оговорки, речь будет итти лишь о действительных числах и (в трёх первых главах) преимущественно о тех операциях, которые изучаются в элементарной математике и потому сами носят название *элементарных*. Сюда относятся прежде всего алгебраические операции — сложение, вычитание, умножение и деление, затем возведение в произвольную степень и извлечение корня произвольной степени, логарифмирование по произвольному положительному основанию и, наконец, составление из данной величины шести тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс, косеканс, секанс и котангенс), а также так называемых обратных функций (арксинус, арккосинус и т. д.).

Перечисленные операции могут выполняться, смотря по обстоятельствам, в том или ином заранее указанном порядке над данными числами или над буквами (переменными величинами), обозначающими числа. Мы будем предполагать, по крайней мере в пределах глав I и II, что число выполняемых операций конечно. Результат вычисления можно обозначить какой-нибудь новой буквой; при этом те буквы, которые участвовали в вычислении, ставятся в скобках, в определённом порядке, будучи разделены запятыми. Например:

$$v = u^{\operatorname{tg} u}, \tag{1}$$

или

$$f(t) = \frac{2t}{t^2+1}, \tag{2}$$

или ещё

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 25. \tag{3}$$

Получаемые таким образом математические выражения, или формулы, способные принимать то или иное числовое значение в зависимости от числовых значений входящих (т. е. участвующих в вычислении) величин, являются **элементарными функциями** этих величин.

Входящие в данную формулу «переменные» величины называются *независимыми*, сама же функция носит название *зависимой* переменной.

Функциональные символы вроде $f(t)$ или $F(x, y)$ особенно удобны в следующем отношении: что бы ни представляли собой величины c, a, b — числа или же новые буквенные выражения, — через $f(c)$ или $F(a, b)$ обозначают то, что получится, если вместо t подставить c, или вместо x подставить a, а вместо y подставить b. Так, из соотношений (2) и (3) вытекает:

$$f(3)=\frac{2\cdot 3}{3^2+1}=\frac{3}{5}, \qquad f(1)=\frac{2\cdot 1}{1^2+1}=1;$$

$$F(6,\ 7)=6^2+7^2-25=60, \quad F(4,\ 3)=4^2+3^2-25=0,$$

и точно так же

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{2\cdot\frac{m}{n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^2+1}=\frac{2mn}{m^2+n^2}, \quad f(-t)=\frac{2(-t)}{(-t)^2+1}=-\frac{2t}{t^2+1},$$

$$F(px,\ qy)=(px)^2+(qy)^2-25=p^2x^2+q^2y^2-25.$$

Если независимые переменные не выписаны в скобках (что имеет своё преимущество краткости), то в случае подстановок запись приходится усложнять; например, соотношение (1) даёт:

$$[v]_{u=\pi}=\pi^{\operatorname{tg}\pi}=1,$$

или же пользуются описательными оборотами речи: «при $u=\pi$ величина v принимает значение 1».

Читателю, несомненно, знакомо определение функции (от одной переменной) как **соответствия** между числовыми значениями независимой переменной и числовыми значениями зависимой переменной.

Переменная величина y называется функцией переменной величины x (в некотором промежутке I), *если каждому значению x* (из I) *соответствует некоторое определённое значение y.*

В таком общем виде определение функции было дано Н. И. Лобачевским в 1834 г. в следующих словах[1]:

«Это общее понятие (функции. — *Ред.*) требует, чтобы функцией от x называть число, которое даётся для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением или условием, которое подаёт средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной».

Слово «соответствует» (или «сопоставляется» иногда также говорят «отвечает») оставляет открытым вопрос о том, какова должна быть природа

[1]) Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. V, Гостехиздат, 1951, стр. 43.

правила, посредством которого устанавливается соответствие: важно лишь, чтобы такого рода правило было указано.

В частности, правило соответствия может иметь «эмпирический» характер; так, если говорят о температуре как функции времени, то правило заключается в том, чтобы в назначенный момент времени зафиксировать показание термометра.

В преподавании элементарной математики имеют особенно важное, если не исключительное, значение такие функции, для которых правило соответствия носит «оперативный» или «аналитический» характер: оно указывает, в надлежащем порядке, те математические действия (операции), которые надо совершить над значением x, чтобы получить значение y.

Нет оснований противопоставлять понятие однозначного аналитического выражения понятию функции как соответствия: первое является частным случаем второго[1]).

Понятие функции как аналитического выражения сложилось в первой половине XVIII в. Именно так определяли функцию И. Бернулли (1718 г.) и Л. Эйлер (1748 г.). Последний предложил следующее определение:

«Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств».

Следует, однако, заметить, что у Эйлера

1) не вполне чётко отграничены «допустимые» операции,

2) не исключаются формулы, содержащие бесчисленное множество операций.

Точное определение элементарной функции (в современном смысле) опирается на понятие функции как соответствия и формулируется так:

Функция называется элементарной, если её значения могут быть получены из постоянных чисел и значений независимых переменных посредством конечного числа элементарных операций.

Конкретные примеры неэлементарных функций приведены в главе IV. Там же указан и наиболее естественный способ их получения (см. § 49).

К понятию функции как соответствия нам придётся обращаться в данной статье неоднократно. Покуда же просим читателя, если идёт речь о «функциях», иметь в виду те самые элементарные функции, с которымв приходится встречаться в процессе преподавания.

В дальнейшем (в главах I—IV) число рассматриваемых переменных величин ограничивается двумя: ради единообразия они будут обозначены буквами x и y.

Пусть дано уравнение вида

$$F(x, y) = 0, \tag{4}$$

где $F(x, y)$ — какая-нибудь элементарная функция величин x и y[2]). Предположим, что x_0 и y_0 — произвольные числа. Если эти числа

---

[1]) Два понятия функции (более узкое и более широкое) можно сблизить между собой, или даже отождествить, одним из следующих способов:

а) устанавливая, что весьма обширные классы функций-соответствий допускают аналитическое представление (см., например, теорему Вейерштрасса в § 49 гл. IV);

б) рассматривая как математическую операцию переход от числового значения независимой переменной к соответствующему (в силу функционального соотношения) значению зависимой переменной.

[2]) Если в правой части уравнения стоит не нуль, всегда можно перенести всё в левую часть.

таковы, что при подстановке x_0 вместо x и y_0 вместо y[1]) уравнение удовлетворяется, т. е. его левая часть становится равной нулю,

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

то пара чисел (x_0, y_0) представляет собой решение (одно из решений) данного уравнения. Функция $F(x, y)$ может оказаться такой, что уравнение $F(x, y) = 0$ не имеет вовсе решений $\left(\text{например, при } F(x, y) = \frac{1}{x+y} \text{ или при } F(x, y) = 2^{x-y}\right)$; или она может быть такая, что существует только одно решение или, вообще, конечное число решений (например, при $F(x, y) = x^2 + y^2$ имеется единственное решение: $x = 0$, $y = 0$); не исключена и «противоположная крайность», когда функция $F(x, y)$ обращается в нуль тождественно, так что любая пара значений x и y оказывается решением.

Более важным и часто встречающимся является иной случай, когда существует бесконечное множество решений уравнения $F(x, y) = 0$, и дело обстоит именно таким образом, что, задав «произвольно» значение какой-нибудь одной переменной, можно подыскать одно значение (или несколько) другой переменной так, чтобы уравнение удовлетворялось. Тогда говорят, что данное уравнение устанавливает функциональную зависимость между переменными x и y.

Предположим, например, что

$$F(x, y) = 2x - 5y + 10. \tag{5}$$

Уравнение

$$2x - 5y + 10 = 0 \tag{6}$$

таково, что, задав значение x совершенно произвольно, можно найти решение, если взять значение y согласно формуле

$$y = \frac{2x + 10}{5}. \tag{7}$$

Таким образом, каждому значению x соответствует одно определённое значение y, удовлетворяющее нашему уравнению: оно даётся предыдущей формулой. Если положить

$$f(x) = \frac{2x + 10}{5},$$

то можно сказать, что уравнение $F(x, y) = 0$ равносильно уравнению $y = f(x)$.

---

[1]) Предполагается, что эта подстановка «имеет смысл», т. е. что совокупность операций, указываемых символом F, может быть выполнена при значениях $x = x_0$, $y = y_0$.