

**П. С. Александров**

**Энциклопедия элементарной математики**

**Том 3. Функции и пределы (основы анализа)**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 37-053.2  
ББК 74.27я7  
П11

П11 **П. С. Александров**  
Энциклопедия элементарной математики: Том 3. Функции и пределы (основы анализа) / П. С. Александров – М.: Книга по Требованию, 2023. – 560 с.

**ISBN 978-5-458-25955-2**

Энциклопедия элементарной математики в 5 томах. Том 3. Функции и пределы (основы анализа). Предлагаемая читателю книга третья «Энциклопедии элементарной математики» завершает первый большой раздел этого издания, посвященный систематическому изложению тех элементов математической науки, на основе которых складываются школьные курсы арифметики, алгебры и отчасти тригонометрии. Если материал первых двух книг ограничивался преимущественно вопросами арифметики и алгебры в собственном смысле слова как учения о числах, их обобщениях, операциях над ними (имеются в виду алгебраические операции: сложение, вычитание, умножение и деление) и алгебраических уравнениях, то третья книга посвящена вопросам анализа, а именно, функциям и пределам. Наряду с учением об элементарных функциях и обстоятельно изложенной теорией пределов, сюда вошли также наиболее элементарные сведения из дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов и сведения о функциях комплексного переменного.

**ISBN 978-5-458-25955-2**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2023  
© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригиналe, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



## ПРОИЗВОДНЫЕ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

(И. П. Натансон)

Введение . . . . .	299
<b>Г л а в а I. Производные . . . . .</b>	<b>303</b>
§ 1. Производная и дифференциал . . . . .	303
1. Задачи, приводящие к понятию производной . . . . .	303
2. Определение производной . . . . .	307
3. Дифференцируемость и непрерывность. Односторонние производные . . . . .	309
4. Производные простейших элементарных функций . . . . .	312
5. Дифференцирование обратных функций . . . . .	318
6. Правила комбинирования формул дифференцирования . . . . .	320
7. Дифференциал . . . . .	327
8. Производные и дифференциалы высшего порядка . . . . .	333
9. Частные производные и полный дифференциал . . . . .	337
§ 2. Важнейшие теоремы о производных . . . . .	339
10. Теоремы Ферма и Ролля . . . . .	339
11. Формулы Лагранжа и Коши. Правило Лопитала . . . . .	342
12. Формула Тейлора . . . . .	346
13. Исследования П. Л. Чебышева и С. Н. Бернштейна . . . . .	353
§ 3. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций . . . . .	354
14. Признаки постоянства и монотонности функции . . . . .	354
15. Экстремум функции . . . . .	359
16. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на замкнутом промежутке . . . . .	363
<b>Г л а в а II. Интегралы . . . . .</b>	<b>366</b>
§ 4. Неопределённые интегралы . . . . .	366
17. Основные понятия . . . . .	366
18. Интегрирование с помощью подстановки . . . . .	369
19. Интегрирование по частям . . . . .	371
20. Общие замечания по поводу интегрирования элементарных функций . . . . .	373
§ 5. Определённые интегралы . . . . .	377
21. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла . . . . .	377
22. Определённый интеграл . . . . .	380
23. Основные свойства интеграла . . . . .	385
24. Интеграл, как функция верхнего предела . . . . .	391
25. Вычисление определённого интеграла с помощью неопределённого . . . . .	393
26. Формула Валлиса . . . . .	398
27. Приближённое вычисление определённых интегралов . . . . .	400
§ 6. Приложения интегрального исчисления . . . . .	408
28. Вычисление площадей . . . . .	408
29. Вычисление объёмов . . . . .	411
30. Длина дуги кривой . . . . .	417
31. Площадь поверхности вращения . . . . .	418
32. Общие указания по поводу приложений интегрального исчисления и его связей с дифференциальным исчислением . . . . .	420

<b>Г л а в а III. Ряды . . . . .</b>	<b>425</b>
§ 7. Ряды с постоянными членами . . . . .	425
33. Основные понятия . . . . .	425
34. Простейшие свойства рядов . . . . .	429
35. Положительные ряды . . . . .	431
36. Знакочередующиеся ряды . . . . .	437
37. Абсолютная сходимость . . . . .	440
38. Вопрос о перестановке членов ряда. Умножение рядов . . . . .	441
§ 8. Степенные ряды . . . . .	447
39. Промежуток сходимости . . . . .	447
40. Свойства суммы степенного ряда . . . . .	452
41. Разложение логарифма и составление таблиц логарифмов . . . . .	457
42. Разложение арктангенса и вычисление $\pi$ . . . . .	465
43. Общие замечания по поводу разложения функций в степенные ряды . . . . .	469
44. Биномиальный ряд . . . . .	472
45. Очерк аналитической теории тригонометрических функций . . . . .	481

### ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(*В. Л. Гончаров*)

§ 1. Рациональные функции . . . . .	493
§ 2. Пределы. Ряды . . . . .	496
§ 3. Показательная функция. Синус и косинус . . . . .	500
§ 4. Выражение тригонометрических функций через показательную . . . . .	504
§ 5. Гиперболические и тригонометрические функции . . . . .	507
§ 6. Логарифм . . . . .	508
§ 7. Произвольная степень . . . . .	510
§ 8. Обратные тригонометрические и гиперболические функции . . . . .	511
§ 9. Производная . . . . .	513
§ 10. Интеграл . . . . .	517
§ 11. Приближение функций многочленами . . . . .	523
§ 12. Первообразная функция . . . . .	526
§ 13. Интеграл Коши . . . . .	532
§ 14. Понятие аналитической функции . . . . .	536
§ 15. Свойства аналитических функций . . . . .	539
§ 16. Геометрический смысл аналитических функций . . . . .	544
§ 17. Примеры конформных отображений . . . . .	547
<b>Алфавитный указатель . . . . .</b>	<b>553</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга третья «Энциклопедии элементарной математики» завершает первый большой раздел этого издания, посвящённый систематическому изложению тех элементов математической науки, на основе которых складываются школьные курсы арифметики, алгебры и отчасти тригонометрии. Если материал первых двух книг ограничивался преимущественно вопросами арифметики и алгебры в собственном смысле слова как учения о числах, их обобщениях, операциях над ними (имеются в виду алгебраические операции: сложение, вычитание, умножение и деление) и алгебраических уравнениях, то третья книга посвящена вопросам анализа, а именно, функциям и пределам. Наряду с учением об элементарных функциях и обстоятельно изложенной теорией пределов, сюда вошли также наиболее элементарные сведения из дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов и сведения о функциях комплексного переменного.

Понятия производной и интеграла давно стучатся в двери общеобразовательной школы; как бы ни относиться к вопросу об их фактическом включении в школьные программы, сколько-нибудь удовлетворительное завершённое изложение элементарных основ математической науки без этих основных понятий следует признать немыслимым при современном состоянии науки.

Что касается функций комплексного переменного, то нет ни возможности, ни необходимости в том, чтобы вводить, хотя бы и не в близком будущем, систематические сведения о них в школьную программу. Однако тот основной факт, что элементарные функции являются аналитическими функциями, определёнными во всей комплексной плоскости (за исключением, быть может, определённых точек) и что, следовательно, полного понимания свойств этих функций и связей между ними можно достичь, только рассматривая их как функции комплексного переменного, оправдывает включение в нашу книгу небольшого очерка об аналитических функциях комплексного переменного.

*Редакция*



В. Л. ГОНЧАРОВ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ  
ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО  
ПЕРЕМЕННОГО.  
ПРЕДЕЛЫ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ  
И ФУНКЦИЙ.  
ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ



# ГЛАВА I

## ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ И ГРАФИКАХ УРАВНЕНИЙ

### § 1. Элементарные функции

Ближайшим предметом рассмотрения в математике являются числа и выполняемые над ними операции (действия). И понятие числа и понятие операции допускают неограниченные расширения и обобщения. В настоящей статье, если не сделано особой оговорки, речь будет идти лишь о действительных числах и (в трёх первых главах) преимущественно о тех операциях, которые изучаются в элементарной математике и потому сами носят название *элементарных*. Сюда относятся прежде всего алгебраические операции — сложение, вычитание, умножение и деление, затем возвведение в произвольную степень и извлечение корня произвольной степени, логарифмирование по произвольному положительному основанию и, наконец, составление из данной величины шести тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс, косеканс, секанс и котангенс), а также так называемых обратных функций (арксинус, арккосинус и т. д.).

Перечисленные операции могут выполняться, смотря по обстоятельствам, в том или ином заранее указанном порядке над данными числами или над буквами (переменными величинами), обозначающими числа. Мы будем предполагать, по крайней мере в пределах глав I и II, что число выполняемых операций конечно. Результат вычисления можно обозначить какой-нибудь новой буквой; при этом те буквы, которые участвовали в вычислении, ставятся в скобках, в определённом порядке, будучи разделены запятыми. Например:

$$v = u^{\operatorname{tg} u}, \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}, \quad (2)$$

или ещё

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 25. \quad (3)$$

Получаемые таким образом математические выражения, или формулы, способные принимать то или иное числовое значение в зави-

симости от числовых значений входящих (т. е. участвующих в вычислении) величин, являются элементарными функциями этих величин.

Входящие в данную формулу «переменные» величины называются *независимыми*, сама же функция носит название *зависимой переменной*.

Функциональные символы вроде  $f(t)$  или  $F(x, y)$  особенно удобны в следующем отношении: что бы ни представляли собой величины  $c, a, b$  — числа или же новые буквенные выражения, — через  $f(c)$  или  $F(a, b)$  обозначают то, что получится, если вместо  $t$  подставить  $c$ , или вместо  $x$  подставить  $a$ , а вместо  $y$  подставить  $b$ . Так, из соотношений (2) и (3) вытекает:

$$f(3) = \frac{2 \cdot 3}{3^2 + 1} = \frac{3}{5}, \quad f(1) = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1} = 1;$$

$$F(6, 7) = 6^2 + 7^2 - 25 = 60, \quad F(4, 3) = 4^2 + 3^2 - 25 = 0,$$

и точно так же

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{2 \cdot \frac{m}{n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 1} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \quad f(-t) = \frac{2(-t)}{(-t)^2 + 1} = -\frac{2t}{t^2 + 1},$$

$$F(px, qy) = (px)^2 + (qy)^2 - 25 = p^2x^2 + q^2y^2 - 25.$$

Если независимые переменные не выписаны в скобках (что имеет своё преимущество краткости), то в случае подстановок запись приходится усложнять; например, соотношение (1) даёт:

$$[v]_{u=\pi} = \pi \operatorname{tg} \pi = 1,$$

или же пользуются описательными оборотами речи: «при  $u = \pi$  величина  $v$  принимает значение 1».

Читателю, несомненно, знакомо определение функции (от одной переменной) как соответствия между числовыми значениями независимой переменной и числовыми значениями зависимой переменной.

*Переменная величина  $u$  называется функцией переменной величины  $x$  (в некотором промежутке  $I$ ), если каждому значению  $x$  (из  $I$ ) соответствует некоторое определённое значение  $u$ .*

В таком общем виде определение функции было дано Н. И. Лобачевским в 1834 г. в следующих словах<sup>1)</sup>:

«Это общее понятие (функции.—Ред.) требует, чтобы функцией от  $x$  называть число, которое даётся для каждого  $x$  и вместе с  $x$  постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением или условием, которое подаёт средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной».

Слово «соответствует» (или «сопоставляется» иногда также говорят «отвечает») оставляет открытым вопрос о том, какова должна быть природа

<sup>1)</sup> Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. V, Гостехиздат, 1951, стр. 43.

правила, посредством которого устанавливается соответствие: важно лишь, чтобы такого рода правило было указано.

В частности, правило соответствия может иметь «эмпирический» характер; так, если говорят о температуре как функции времени, то правило заключается в том, чтобы в назначенный момент времени зафиксировать показание термометра.

В преподавании элементарной математики имеют особенно важное, если не исключительное, значение такие функции, для которых правило соответствия носит «оперативный» или «аналитический» характер: оно указывает, в надлежащем порядке, те математические действия (операции), которые надо совершить над значением  $x$ , чтобы получить значение  $y$ .

Нет оснований противопоставлять понятие однозначного аналитического выражения понятию функции как соответствия: первое является частным случаем второго<sup>1)</sup>.

Понятие функции как аналитического выражения сложилось в первой половине XVIII в. Именно так определяли функцию И. Бернулли (1718 г.) и Л. Эйлер (1748 г.). Последний предложил следующее определение:

«Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств».

Следует, однако, заметить, что у Эйлера

- 1) не вполне чётко отграничены «допустимые» операции,
- 2) не исключаются формулы, содержащие бесчиселенное множество операций.

Точное определение элементарной функции (в современном смысле) опирается на понятие функции как соответствия и формулируется так:

*Функция называется элементарной, если её значения могут быть получены из постоянных чисел и значений независимых переменных посредством конечного числа элементарных операций.*

Конкретные примеры неэлементарных функций приведены в главе IV. Там же указан и наиболее естественный способ их получения (см. § 49).

К понятию функции как соответствия нам придётся обращаться в данной статье неоднократно. Покуда же просим читателя, если идёт речь о «функциях», иметь в виду те самые элементарные функции, с которыми приходится встречаться в процессе преподавания.

В дальнейшем (в главах I—IV) число рассматриваемых переменных величин ограничивается двумя: ради единообразия они будут обозначены буквами  $x$  и  $y$ .

Пусть дано уравнение вида

$$F(x, y) = 0, \quad (4)$$

где  $F(x, y)$  — какая-нибудь элементарная функция величин  $x$  и  $y$ <sup>2)</sup>. Предположим, что  $x_0$  и  $y_0$  — произвольные числа. Если эти числа

<sup>1)</sup> Два понятия функции (более узкое и более широкое) можно сблизить между собой, или даже отождествить, одним из следующих способов:

а) устанавливая, что весьма обширные классы функций-соответствий допускают аналитическое представление (см., например, теорему Вейерштасса в § 49 гл. IV);

б) рассматривая как математическую операцию переход от числового значения независимой переменной к соответствующему (в силу функционального соотношения) значению зависимой переменной.

<sup>2)</sup> Если в правой части уравнения стоит не нуль, всегда можно перенести всё в левую часть.

таковы, что при подстановке  $x_0$  вместо  $x$  и  $y_0$  вместо  $y$ <sup>1)</sup> уравнение удовлетворяется, т. е. его левая часть становится равной нулю,

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

то пара чисел  $(x_0, y_0)$  представляет собой **решение** (одно из решений) данного уравнения. Функция  $F(x, y)$  может оказаться такой, что уравнение  $F(x, y) = 0$  не имеет вовсе решений (например, при  $F(x, y) = \frac{1}{x+y}$  или при  $F(x, y) = 2^{x-y}$ ); или она может быть такая, что существует только одно решение или, вообще, конечное число решений (например, при  $F(x, y) = x^2 + y^2$  имеется единственное решение:  $x = 0, y = 0$ ); не исключена и «противоположная крайность», когда функция  $F(x, y)$  обращается в нуль тождественно, так что любая пара значений  $x$  и  $y$  оказывается решением.

Более важным и часто встречающимся является иной случай, когда существует бесконечное множество решений уравнения  $F(x, y) = 0$ , и дело обстоит именно таким образом, что, задав «произвольно» значение какой-нибудь одной переменной, можно подыскать одно значение (или несколько) другой переменной так, чтобы уравнение удовлетворялось. Тогда говорят, что данное уравнение **устанавливает функциональную зависимость** между переменными  $x$  и  $y$ .

Предположим, например, что

$$F(x, y) = 2x - 5y + 10. \quad (5)$$

Уравнение

$$2x - 5y + 10 = 0 \quad (6)$$

таково, что, задав значение  $x$  совершенно произвольно, можно найти решение, если взять значение  $y$  согласно формуле

$$y = \frac{2x + 10}{5}. \quad (7)$$

Таким образом, каждому значению  $x$  соответствует одно определённое значение  $y$ , удовлетворяющее нашему уравнению: оно даётся предыдущей формулой. Если положить

$$f(x) = \frac{2x + 10}{5},$$

то можно сказать, что уравнение  $F(x, y) = 0$  равносильно уравнению  $y = f(x)$ .

<sup>1)</sup> Предполагается, что эта подстановка «имеет смысл», т. е. что совокупность операций, указываемых символом  $F$ , может быть выполнена при значениях  $x = x_0, y = y_0$ .