Н.С. Кошляков

Уравнения в частных производных математической физики

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н.С. Кошляков

Н11 Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков – М.: Книга по Требованию, 2024. – 712 с.

ISBN 978-5-458-31994-2

Книга «Уравнения в частных производных математической физики» предназначена в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов университетов и технических вузов. Она является результатом переработки и дополнения двух известных книг: «Дифференциальные уравнения математической физики» (авт. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов) и «Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка» (авт. М. М. Смирнов).

ISBN 978-5-458-31994-2

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Глава XIV. *Малые колебания нити, подвешенной за один конец*

Глава XV. *Малые радиальные колебания газа*

Глава XVI. *Полиномы Лежандра*

Глава XVII. *Применение метода Фурье к исследованию малых колебаний прямоугольной и круглой мембраны*

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Дифференциальные уравнения эллиптического типа

Глава XVIII. *Интегральные формулы, применяемые в теории дифференциальных уравнений эллиптического типа*

Глава XIX. *Уравнения Лапласа и Пуассона*

Глава XX. *Теория потенциала*

Глава XXI. *Сферические функции*

Глава XXII. *Приложение теории сферических функций к решению задач математической физики*

Глава XXIII*. *Гравитационные волны на поверхности жидкости*

Глава XXIV. *Уравнение Гельмгольца*

Глава XXX. *Направляемые электромагнитные волны*

Глава XXXI. *Электромагнитные рупоры и резонаторы*

Глава XXXII. *Разложение по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля*

Глава XXXIII. *Применение интегральных преобразований для решения задач математической физики*

Глава XXXIV. *Примеры применения конечных интегральных преобразований*

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$, независимые переменные $x_1, \ldots, x_n$ и частные производные от неизвестной функции, называется *дифференциальным уравнением с частными производными*.

Оно имеет вид

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \qquad (1)$$

где F — заданная функция своих аргументов.

Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение (1), называется *порядком уравнения с частными производными*.

Наиболее общее уравнение с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными x и y может быть записано в виде

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial u}{\partial x}, \; q = \frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (2)$$

Аналогично наиболее общее уравнение с частными производными второго порядка имеет вид

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \quad \left(r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \; t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \qquad (3)$$

Уравнение с частными производными называется *квазилинейным*, если оно линейно относительно всех старших производных от неизвестной функции. Так, например, уравнение

$$A(x, y, u, u_x, u_y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(\ldots) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ + C(\ldots) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (4)$$

есть квазилинейное уравнение второго порядка.

Уравнение с частными производными называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и ее частных производных. Так, например, уравнение

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+ \\ +D(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+G(x, y)u=F(x, y) \quad (5)$$

есть линейное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $u(x, y)$.

Решением уравнения с частными производными (1) называется всякая функция $u=u(x_1, \ldots, x_n)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Так, например:

1) при изучении различных видов волн — упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений мы приходим к *волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \quad (6)$$

где c — скорость распространения волны в данной среде;

2) процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, так же как и явления диффузии, описываются *уравнением теплопроводности*:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right); \quad (7)$$

3) при рассмотрении установившегося теплового состояния в однородном изотропном теле мы приходим к *уравнению Пуассона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(x, y, z). \quad (8)$$

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение (8) переходит в *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \quad (9)$$

Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также удовлетворяют уравнению Лапласа, в котором отсутствуют массы и соответственно электрические заряды.

Уравнения (6)—(9) часто называют *основными уравнениями математической физики*. Их подробное изучение дает возможность построить теорию широкого круга физических явлений и решить ряд физических и технических задач.

Каждое из уравнений (6)—(9) имеет бесчисленное множество частных решений. При решении конкретной физической задачи необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Итак, *задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.* Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые *граничные условия*, т. е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и *начальные условия*, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления.

Математическая задача, имеющая своей целью описать действительность, должна удовлетворять следующим трем требованиям: 1) *решение должно существовать*, 2) *решение должно быть единственным* и 3) *решение должно быть устойчивым*. Это значит, что малые изменения любого из данных задачи должны вызывать соответственно малые изменения решения.

Задача, удовлетворяющая всем трем требованиям, называется *корректно поставленной задачей.*

Глава I

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Уравнение колебаний струны

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. *Под струной понимают тонкую нить, которая может свободно изгибаться*, т. е. не оказывает сопротивления изменению ее формы, не связанному с изменением ее длины. Сила натяжения T_0, действующая на струну, предполагается значительной, так что можно пренебречь действием силы тяжести.

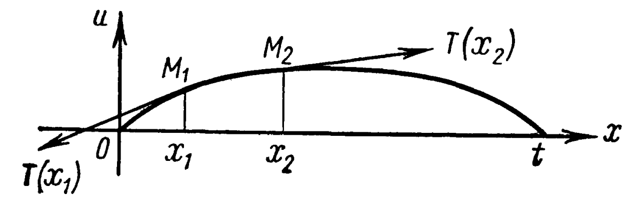

Рис. 1

Пусть в положении равновесия струна направлена по оси Ox.

Будем рассматривать только поперечные колебания струны, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикулярно оси Ox.

Обозначим через $u(x, t)$ смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции $u(x, t)$, очевидно, дает форму струны в этот момент времени (рис. 1). Рассматривая далее только малые колебания струны, будем считать, что смещение $u(x, t)$, а также производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами.

Выделим произвольный участок (x_1, x_2) струны (см. рис. 1), который при колебании струны деформируется в участок M_1M_2. Длина дуги этого участка в момент времени t равна

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}\,dx \approx x_2 - x_1 = S,$$

вследствие чего можно считать, что в процессе малых колебаний удлинения участков струны не происходит. Отсюда в силу закона Гука следует, что величина натяжения T в каждой точке струны не меняется со временем. Таким образом, при наших предположениях изменением величины натяжения струны, возникающим при ее движении, можно пренебречь по сравнению с натяжением, которому она была уже подвергнута в положении равновесия. Покажем, что величину натяжения T можно считать не зависящей от x, т. е. $T \approx T_0$. Действительно, на участок M_1M_2 струны действуют силы натяжения, направленные по касательным к струне в точках M_1 и M_2, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций на ось Ox всех этих сил должна равняться нулю. Так как мы рассматриваем только поперечные колебания, то силы инерции и внешние силы направлены параллельно оси Ou, тогда

$$T(x_1)\cos\alpha(x_1) - T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0,$$

где $\alpha(x)$ — угол между касательной в точке с абсциссой x к струне в момент времени t с положительным направлением оси x. В силу малости колебаний

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1,$$

и, следовательно,

$$T(x_1) \approx T(x_2).$$

Отсюда ввиду произвольности x_1 и x_2 следует, что величина натяжения T не зависит от x. Таким образом, можно считать, что $T \approx T_0$ для всех значений x и t.

Перейдем к выводу уравнения колебаний струны. Для этого воспользуемся принципом Даламбера, на основании которого все силы, действующие на некоторый выделенный участок в струне, включая силы инерции, должны уравновешиваться.

Рассмотрим произвольный участок M_1M_2 струны и составим условие равенства нулю суммы проекций на ось Ou всех сил, действующих на него: сил натяжения, равных по величине и направленных по касательным к струне в точках M_1 и M_2, внешней силы, направленной параллельно оси Ou, и силы инерции.

Сумма проекций на ось Ou сил натяжения, действующих в точках M_1 и M_2, равняется

$$Y = T_0 [\sin \alpha(x_2) - \sin \alpha(x_1)],$$

но вследствие наших предположений

$$\sin \alpha(x) = \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

и, следовательно,

$$Y = T_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} \right].$$

Замечая теперь, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx,$$

окончательно получим

$$Y = T_0 \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx. \tag{1}$$

Обозначим через $p(x, t)$ внешнюю силу, действующую на струну параллельно оси Ou и рассчитанную на единицу длины. Тогда проекция на ось Ou внешней силы, действующей на участок M_1M_2 струны, будет равна

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} p(x, t)\, dx. \tag{2}$$

Пусть $\rho(x)$ — линейная плотность струны, тогда сила инерции участка M_1M_2 струны будет равна

$$-\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dx. \tag{3}$$

Сумма проекций (1)—(3) на ось Ou всех сил, действующих на участок M_1M_2 струны, должна быть равна нулю, т. е.

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t) \right] dx = 0.$$

Отсюда ввиду произвольности x_1 и x_2 следует, что подынтегральная функция должна равняться нулю для каждой точки струны в любой момент времени t, т. е.

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, t). \tag{4}$$

Это есть искомое *уравнение колебаний струны.*