

Н.С. Кошляков

**Уравнения в частных производных
математической физики**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н.С. Кошляков**
Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков – М.: Книга по Требованию, 2024. – 712 с.

ISBN 978-5-458-31994-2

Книга «Уравнения в частных производных математической физики» предназначена в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов университетов и технических вузов. Она является результатом переработки и дополнения двух известных книг: «Дифференциальные уравнения математической физики» (авт. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов) и «Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка» (авт. М. М. Смирнов).

ISBN 978-5-458-31994-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

§ 5.	Некоторые интегральные представления функций Бесселя	169
§ 6.	Функции Ханкеля	172
§ 7.	Функции Бесселя мнимого аргумента	173

Г л а в а XIV. *Малые колебания нити, подвешенной за один конец*

§ 1.	Свободные колебания подвешенной нити	176
§ 2.	Вынужденные колебания подвешенной нити	180

Г л а в а XV. *Малые радиальные колебания газа*

§ 1.	Радиальные колебания газа в сфере	184
§ 2.	Радиальные колебания газа в неограниченной цилиндрической трубке	191

Г л а в а XVI. *Полиномы Лежандра*

§ 1.	Дифференциальное уравнение Лежандра	195
§ 2.	Ортогональность полиномов Лежандра и их норма	198
§ 3.	Некоторые свойства полиномов Лежандра	200
§ 4.	Интегральные представления полиномов Лежандра	201
§ 5.	Производящая функция	203
§ 6.	Рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра и их производными	204
§ 7.	Функция Лежандра второго рода	205
§ 8.	Малые колебания вращающейся струны	205

Г л а в а XVII. *Применение метода Фурье к исследованию малых колебаний прямоугольной и круглой мембраны*

§ 1.	Свободные колебания прямоугольной мембраны	210
§ 2.	Свободные колебания круглой мембраны	214
§ 3.	Метод Фурье в многомерном случае	219

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Дифференциальные уравнения эллиптического типа

Г л а в а XVIII. *Интегральные формулы, применяемые в теории дифференциальных уравнений эллиптического типа*

§ 1.	Определения и обозначения	224
§ 2.	Формулы Остроградского—Гаусса и Грина	227
§ 3*.	Преобразование формулы Грина	231
§ 4*.	Функции Леви	232
§ 5*.	Формула Грина—Стокса	234
§ 6*.	Формула Грина—Стокса в случае двух измерений	238
§ 7.	Представление некоторых дифференциальных выражений в ортогональных системах координат	239

Г л а в а XIX. *Уравнения Лапласа и Пуассона*

§ 1.	Уравнения Лапласа и Пуассона. Примеры задач, приводящих к уравнению Лапласа	248
§ 2.	Граничные задачи	254
§ 3.	Гармонические функции	257
§ 4.	Единственность решений граничных задач	263
§ 5.	Фундаментальные решения уравнения Лапласа. Основная формула теории гармонических функций	268
§ 6.	Формула Пуассона. Решение задачи Дирихле для шара	273
§ 7.	Функция Грина	277
§ 8.	Гармонические функции на плоскости	282

Глава XX. Теория потенциала

§ 1.	Ньютоновский потенциал	287
§ 2.	Потенциалы разных порядков	289
§ 3.	Мультиполи	292
§ 4.	Разложение потенциала по мультиполям. Сферические функции	295
§ 5.	Потенциалы простого и двойного слоя	299
§ 6*.	Поверхности Ляпунова	300
§ 7*.	Сходимость и непрерывная зависимость несобственных интегралов от параметров	303
§ 8*.	Поведение потенциала простого слоя и его нормальных производных при пересечении слоя	305
§ 9*.	Тангенциальные производные потенциала простого слоя и производные по любому направлению	309
§ 10*.	Поведение потенциала двойного слоя при пересечении слоя	311
§ 11.	Уровенные распределения	312
§ 12.	Энергия гравитационного поля. Задача Гаусса	315
§ 13.	Поле тяжести. Теорема Стокса	319
§ 14.	Логарифмический потенциал	323

Глава XXI. Сферические функции

§ 1.	Построение системы линейно-независимых сферических функций	328
§ 2.	Ортогональность сферических функций	332
§ 3.	Разложение по сферическим функциям	335
§ 4.	Применение сферических функций для решения граничных задач	338
§ 5.	Функция Грина задачи Дирихле для шара	341
§ 6.	Функция Грина задачи Неймана для шара	343

Глава XXII. Приложение теории сферических функций к решению задач математической физики

§ 1.	Электростатический потенциал проводящего шара, разделенного слоем диэлектрика на два полушария	346
§ 2.	Задача о стационарном распределении температуры в шаре	348
§ 3.	Задача о распределении электричества на индуктивно заряженном шаре	350
§ 4.	Обтекание шара потоком несжимаемой жидкости	355

Глава XXIII*. Гравитационные волны на поверхности жидкости

§ 1.	Постановка проблемы	358
§ 2.	Двумерные волны в бассейне ограниченной глубины	361
§ 3.	Кольцевые волны	368
§ 4.	Метод стационарной фазы	371

Глава XXIV. Уравнение Гельмгольца

§ 1.	Связь уравнения Гельмгольца с некоторыми уравнениями гиперболического и параболического типов	375
§ 2.	Сферически симметричные решения уравнения Гельмгольца в ограниченной области	378
§ 3.	Собственные числа и собственные функции граничной задачи общего вида. Разложения по собственным функциям	384
§ 4.	Разделение переменных в уравнении Гельмгольца в цилиндрических и сферических координатах	389

§ 5.	Сферически симметричные решения уравнения Гельмгольца в бесконечной области	394
§ 6.	Интегральные формулы	401
§ 7.	Разложения в ряды по частным решениям уравнения Гельмгольца в бесконечной области	407
§ 8*.	Вопросы единственности решений внешних граничных задач для уравнения Гельмгольца	409

Глава XXV. Излучение и рассеяние звука

§ 1.	Основные зависимости для звуковых полей	413
§ 2.	Звуковое поле вибрирующего цилиндра	415
§ 3.	Звуковое поле пульсирующего шара. Точечный источник	418
§ 4.	Излучение из отверстия в плоском экране	420
§ 5.	Звуковое поле при произвольном колебании поверхности шара	422
§ 6.	Исследование поля шара при произвольном колебании его поверхности. Акустические или колебательные мультиполи	426
§ 7.	Рассеяние звука	432

Дополнение к части второй *. Сведения об уравнениях эллиптического типа общего вида

§ 1.	Общий вид уравнения эллиптического типа	435
§ 2.	Основные граничные задачи	436
§ 3.	Сопряженные граничные задачи	438
§ 4.	Фундаментальные решения. Функция Грина	439
§ 5.	Теоремы единственности	441
§ 6.	Условия разрешимости граничных задач	443

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

Уравнения параболического типа

Глава XXVI. Постановка граничных задач. Теоремы единственности

§ 1.	Первая граничная задача. Теорема о максимуме и минимуме	448
§ 2.	Задача Коши	450

Глава XXVII. Распространение тепла в бесконечном стержне

§ 1.	Распространение тепла в неограниченном стержне	451
§ 2.	Распространение тепла в полуограниченном стержне	459

Глава XXVIII. Применение метода Фурье к решению граничных задач

§ 1.	Распространение тепла в ограниченном стержне	463
§ 2.	Неоднородное уравнение теплопроводности	471
§ 3.	Распространение тепла в бесконечном цилиндре	473
§ 4.	Распространение тепла в цилиндре конечных размеров	476
§ 5.	Распространение тепла в однородном шаре	478
§ 6.	Распространение тепла в прямоугольной пластинке	485

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

Дополнительные сведения

Глава XXIX. Уравнения электромагнитного поля

§ 1.	Векторные поля	488
------	--------------------------	-----

§ 2.	Уравнения Лоренца — Максвелла	498
§ 3.	Уравнения Максвелла	501
§ 4.	Уравнения магнитной гидродинамики	508
§ 5.	Потенциалы электромагнитного поля	513
§ 6.	Периодические по времени электромагнитные поля	515
§ 7.	Условия на бесконечности и граничные условия	520
§ 8.	Представление электромагнитного поля с помощью двух скалярных функций	527
§ 9.	Теорема единственности	530

Г л а в а ХХХ. *Направляемые электромагнитные волны*

§ 1.	Поперечно-электрические, поперечно-магнитные и поперечно-электромагнитные волны	535
§ 2.	Волны между идеально проводящими плоскостями, разделенные диэлектриком	536
§ 3.	Дальнейшее рассмотрение направляемых волн	542
§ 4.	ТМ-волны в волноводе круглого сечения	550
§ 5.	ТЕ-волны в волноводе круглого сечения	552
§ 6.	Волны в коаксиальном кабеле	553
§ 7.	Волны в диэлектрическом стержне	555

Г л а в а ХХХІ. *Электромагнитные рупоры и резонаторы*

§ 1.	Секториальный рупор и секториальный резонатор	561
§ 2.	Сферический резонатор	566

Г л а в а ХХХІІ. *Разложение по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля*

§ 1.	Введение	568
§ 2.	Задача Штурма—Лиувилля	568
§ 3.	Функция Грина	571
§ 4.	Экстремальные свойства собственных функций	572
§ 5.	Разложение по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля на конечном интервале	577
§ 6.	Сингулярная задача Штурма—Лиувилля	582
§ 7.	Разложение по собственным функциям сингулярной задачи Штурма—Лиувилля на полубесконечном интервале	586
§ 8.	Вычисление спектральной функции (полубесконечный интервал)	590
§ 9.	Разложение по собственным функциям сингулярной задачи Штурма—Лиувилля на интервале, бесконечном в обе стороны	593
§ 10.	Разложение по бесселевым функциям	596

Г л а в а ХХХІІІ. *Применение интегральных преобразований для решения задач математической физики*

§ 1.	Введение	609
§ 2.	Условия, обеспечивающие возможность интегрального преобразования	611
§ 3.	Интегральные преобразования в конечных пределах	616
§ 4.	Интегральные преобразования с бесконечными пределами (общий случай)	620
§ 5.	Некоторые часто применяемые преобразования с бесконечными пределами	626

Г л а в а ХХХІV. *Примеры применения конечных интегральных преобразований*

§ 1.	Колебания тяжелой нити	631
§ 2.	Колебания мембраны	634

§ 3. Распределение тепла в цилиндрическом стержне	637
§ 4. Распространение тепла в круглой трубе	641
§ 5. Поток тепла в шаре	643
§ 6. Стационарный поток тепла в параллелепипеде	647
<i>Г л а в а ХХХV. Примеры применения интегральных преобразований с бесконечными пределами</i>	
§ 1. Задача о колебаниях бесконечной струны	650
§ 2. Линейный поток тепла в полуограниченном стержне	652
§ 3. Распределение тепла в цилиндрическом стержне, поверхность которого поддерживается при двух различных температурах	654
§ 4. Установившееся тепловое состояние бесконечного клина	658
<i>Г л а в а ХХХVI. Излучение электромагнитных колебаний</i>	
§ 1. Введение	661
§ 2. Вертикальный излучатель в однородной среде над идеально проводящей плоскостью	663
§ 3. Вертикальный излучатель в однородной среде над средой с конечной электропроводностью	668
§ 4. Магнитная антенна над средой с конечной электропроводностью	670
§ 5. Поле произвольной системы излучателей	677
§ 6. Горизонтальный излучатель над средой с конечной электропроводностью	680
<i>Г л а в а ХХХVII. Движение вязкой жидкости</i>	
§ 1. Уравнения движения вязкой жидкости	686
§ 2. Движение вязкой жидкости в полупространстве над вращающимся диском бесконечного радиуса	691
§ 3. Движение вязкой жидкости в плоском диффузоре	693
Литература	698
Предметный указатель	701
Некоторые обозначения	708
Николай Сергеевич Кошляков (краткий биографический очерк)	709

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(x_1, \dots, x_n)$, независимые переменные x_1, \dots, x_n и частные производные от неизвестной функции, называется *дифференциальным уравнением с частными производными*.

Оно имеет вид

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0, \quad (1)$$

где F — заданная функция своих аргументов.

Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение (1), называется *порядком уравнения с частными производными*.

Наиболее общее уравнение с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными x и y может быть записано в виде

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (2)$$

Аналогично наиболее общее уравнение с частными производными второго порядка имеет вид

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \quad \left(r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \quad (3)$$

Уравнение с частными производными называется *квазилинейным*, если оно линейно относительно всех старших производных от неизвестной функции. Так, например, уравнение

$$\begin{aligned} A(x, y, u, u_x, u_y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(\dots) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ + C(\dots) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

есть квазилинейное уравнение второго порядка.

Уравнение с частными производными называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и ее частных

производных. Так, например, уравнение

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + G(x, y) u = F(x, y) \quad (5)$$

есть линейное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $u(x, y)$.

Решением уравнения с частными производными (1) называется всякая функция $u = u(x_1, \dots, x_n)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Так, например:

1) при изучении различных видов волн — упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений мы приходим к *волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (6)$$

где c — скорость распространения волны в данной среде;

2) процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, так же как и явления диффузии, описываются *уравнением теплопроводности*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \quad (7)$$

3) при рассмотрении установившегося теплового состояния в однородном изотропном теле мы приходим к *уравнению Пуассона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z). \quad (8)$$

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение (8) переходит в *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (9)$$

Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также удовлетворяют уравнению Лапласа, в котором отсутствуют массы и соответственно электрические заряды.

Уравнения (6)—(9) часто называют *основными уравнениями математической физики*. Их подробное изучение дает возможность построить теорию широкого круга физических явлений и решить ряд физических и технических задач.

Каждое из уравнений (6)—(9) имеет бесчисленное множество частных решений. При решении конкретной физической задачи

необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Итак, задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые *граничные условия*, т. е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и *начальные условия*, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления.

Математическая задача, имеющая своей целью описать действительность, должна удовлетворять следующим трем требованиям: 1) решение должно существовать, 2) решение должно быть единственным и 3) решение должно быть устойчивым. Это значит, что малые изменения любого из данных задачи должны вызывать соответственно малые изменения решения.

Задача, удовлетворяющая всем трем требованиям, называется *корректно поставленной задачей*.

Глава I

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Уравнение колебаний струны

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. Под струной понимают тонкую нить, которая может свободно изгибаться, т. е. не оказывает сопротивления изменению ее формы, не связанному с изменением ее длины. Сила натяжения T_0 , действующая на струну, предполагается значительной, так что можно пренебречь действием силы тяжести.

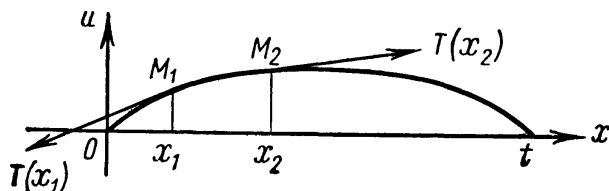


Рис. 1

Пусть в положении равновесия струна направлена по оси Ox .

Будем рассматривать только поперечные колебания струны, предполагая, что

движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикулярно оси Ox .

Обозначим через $u(x, t)$ смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции $u(x, t)$, очевидно, дает форму струны в этот момент времени (рис. 1). Рассматривая далее только малые колебания струны, будем считать, что смещение $u(x, t)$, а также

производная $\frac{du}{dx}$ столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами.

Выделим произвольный участок (x_1, x_2) струны (см. рис. 1), который при колебании струны деформируется в участок M_1M_2 . Длина дуги этого участка в момент времени t равна

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx x_2 - x_1 = S,$$

вследствие чего можно считать, что в процессе малых колебаний удлинения участков струны не происходит. Отсюда в силу закона Гука следует, что величина натяжения T в каждой точке струны не меняется со временем. Таким образом, при наших предположениях изменением величины натяжения струны, возникающим при ее движении, можно пренебречь по сравнению с натяжением, которому она была уже подвергнута в положении равновесия. Покажем, что величину натяжения T можно считать не зависящей от x , т. е. $T \approx T_0$. Действительно, на участок M_1M_2 струны действуют силы натяжения, направленные по касательным к струне в точках M_1 и M_2 , внешние силы и силы инерции. Сумма проекций на ось Ox всех этих сил должна равняться нулю. Так как мы рассматриваем только поперечные колебания, то силы инерции и внешние силы направлены параллельно оси Ou , тогда

$$T(x_1) \cos \alpha(x_1) - T(x_2) \cos \alpha(x_2) = 0,$$

где $\alpha(x)$ — угол между касательной в точке с абсциссой x к струне в момент времени t с положительным направлением оси x . В силу малости колебаний

$$\cos \alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx 1,$$

и, следовательно,

$$T(x_1) \approx T(x_2).$$

Отсюда ввиду произвольности x_1 и x_2 следует, что величина натяжения T не зависит от x . Таким образом, можно считать, что $T \approx T_0$ для всех значений x и t .

Перейдем к выводу уравнения колебаний струны. Для этого воспользуемся принципом Даламбера, на основании которого все силы, действующие на некоторый выделенный участок в струне, включая силы инерции, должны уравновешиваться.

Рассмотрим произвольный участок M_1M_2 струны и составим условие равенства нулю суммы проекций на ось Ou всех сил, действующих на него: сил натяжения, равных по величине и направленных по касательным к струне в точках M_1 и M_2 , внешней силы, направленной параллельно оси Ou , и силы инерции.

Сумма проекций на ось Ou сил натяжения, действующих в точках M_1 и M_2 , равняется

$$Y = T_0 [\sin \alpha(x_2) - \sin \alpha(x_1)],$$

но вследствие наших предположений

$$\sin \alpha(x) = \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

и, следовательно,

$$Y = T_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_1} \right].$$

Замечая теперь, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

окончательно получим

$$Y = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (1)$$

Обозначим через $p(x, t)$ внешнюю силу, действующую на струну параллельно оси Ou и рассчитанную на единицу длины. Тогда проекция на ось Ou внешней силы, действующей на участок M_1M_2 струны, будет равна

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x, t) dx. \quad (2)$$

Пусть $\rho(x)$ — линейная плотность струны, тогда сила инерции участка M_1M_2 струны будет равна

$$- \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx. \quad (3)$$

Сумма проекций (1)—(3) на ось Ou всех сил, действующих на участок M_1M_2 струны, должна быть равна нулю, т. е.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t) \right] dx = 0.$$

Отсюда ввиду произвольности x_1 и x_2 следует, что подинтегральная функция должна равняться нулю для каждой точки струны в любой момент времени t , т. е.

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, t). \quad (4)$$

Это есть искомое уравнение колебаний струны.