С.П. Глазенап

Тригонометрия

Часть I. Решение прямолинейных треугольников

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С11

С.П. Глазенап
С11 Тригонометрия: Часть I. Решение прямолинейных треугольников / С.П. Глазенап – М.: Книга по Требованию, 2013. – 130 с.

ISBN 978-5-458-28304-5

Автор предлагаемого учебника по тригонометрии русский ученый профессор Сергей Павлович Глазенап [Глазенап С. П.] , астроном, инициатор создания и руководитель строительства Петербургской обсерватории. Помимо этого учебника, С. Глазенап является автором ряда значимых трудов по астрономии и математике [Математика] . В части I учебника рассматривается тригонометрическое решение прямолинейных треугольников. Решить треугольник [Решение треугольника] значит найти по данным значениям некоторых его элементов (углов, сторон) значения остальных. Тригонометрическое решение треугольников основывается на определенной зависимости между сторонами и углами треугольника. Такой способ является наиболее точным и универсальным.Издание содержит 6 глав, каждая из которых в свою очередь подразделяется на несколько параграфов. Первую главу можно назвать вводной, в ней говорится об основных понятиях тригонометрии. Во второй главе представлены тригонометрические таблицы и объясняется их устройство и то, как ими пользоваться (до появления калькуляторов без тригонометрических таблиц [Таблица тригонометрическая] решить задачи, связанные с прямолинейными треугольниками, было весьма сложно). Последующие две главы посвящены решению прямоугольных и косоугольных треугольников [Треугольник косоугольный] . В пятой главе приводятся способы вычисления площадей треугольников. В заключение автор показывает, как, пользуясь правилами треугольников, можно решить задачи, встречающиеся на практике (определение расстояния между двумя недоступными предметами, определение высоты объекта и др.).

ISBN 978-5-458-28304-5

Сокращения, принятые в настоящем учебнике:

Километр	обозначается	km	Фут	обозначается	ф.
Метр	„	m	Дюйм	„	д.
Дециметр	„	dm	Линия	„	л.
Сантиметр	„	cm	Десятина	„	дес.
Миллиметр	„	mm	Гектар	„	гект.
Верста	„	вер.	Килограмм	„	клгр.
Сажень	„	саж.	Час	„	ч.
Аршин	„	арш.	Минута	„	м.
Вершок	„	верш.	Секунда	„	с.
Квадр. метр	„	m^2	Кубич. метр	„	m^3
„ сантиметр	„	cm^2	„ сантиметр	„	cm^3
„ миллиметр	„	mm^2	„ миллиметр	„	mm^3
„ аршин	„	кв. арш.	„ аршин	„	куб. арш.
„ сажень	„	кв. саж.	„ сажень	„	куб. саж.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Тригонометрические величины.

§ 1. Предмет тригонометрии. Предмет прямолинейной тригонометрии есть решение прямолинейных треугольников посредством вычисления. Слово „тригонометрия“ — греческое, сложное, состоящее из двух слов: τρίγωνον (треугольник) и μετρέω (измеряю).

В начальной геометрии излагаются способы решения треугольников геометрическим путем или построением с помощью циркуля, линейки и транспортира. Простота и изящество геометрического способа решения треугольников, с теоретической точки зрения, не оставляют желать ничего лучшего, но практическое выполнение самого решения является во многих случаях мало удовлетворительным. Транспортиры разделены, в большинстве случаев, на градусы или полуградусы; следовательно, нанесение углов на чертеже не может быть произведено с большою точностью; последняя оценивается самое большее в $\frac{1}{10}$ градуса; если же в задаче углы даны с точностью до секунды, то очевидно, что они не могут быть наносимы на чертеж с тою точностью, с какою они даны. В зависимости от неточного нанесения углов получается и неточное решение треугольников. Подобное же затруднение встречается в геометрическом решении при измерении его сторон. Опыт показал, что циркулем можно измерять с точностью до одной полусотой доли дюйма; если поэтому на чертеже длина в 100 саж. изображается одним дюймом, то измерения могут быть производимы только с точностью до $\frac{1}{200}$ от 100 саж., или до $\frac{1}{2}$ сажени; действительность же предъявляет иногда бóльшие требования.

Из сказанного мы выводим заключение, что геометрическое решение треугольника, теоретически совершенное, не может удовлетворять всем требованиям науки и практики. Вот почему явилась необходимость изыскать способ, посредством которого можно для каждого данного треугольника найти решение с любою точностью. Решение треугольников производится с помощью особых „тригонометрических величин", определяющих зависимость между углами и сторонами треугольника.

§ 2. Углы и их измерение. Величина плоского угла, как известно, не зависит от длины его сторон. Углы могут быть измеряемы некоторым постоянным углом, имеющим определенную величину. Всего чаще за единицу углов берут девяностую долю прямого (d). Угол, равный $\frac{d}{90}$, называется градусом *). Градус делится на 60 минут, минута—на 60 секунд, а секунды делятся на десятые, сотые и т. д. доли по десятичной системе. Градусы, минуты и секунды обозначаются: $^\circ$, $'$, $''$. Например, $27^\circ 31' 48{,}6''$ читается следующим образом: 27 градусов, 31 минута и 48,6 секунды.

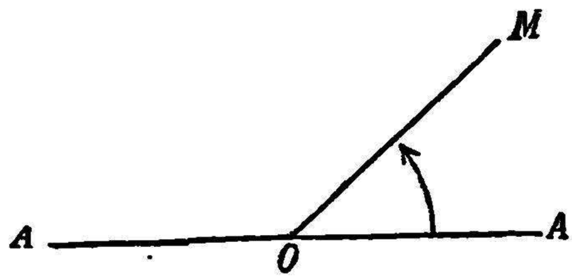
В треугольниках, изучение свойств которых составляет предмет первой части тригонометрии, ни один из углов не может быть равен или больше 180°.

Все углы могут быть образуемы вращением линии OM около вершины угла O. Линия OA называется *начальною* или *основною*, а линия OM, могущая принимать всевозможные положения,—*производящею линиею* или *радиусом-вектором*. Линия

*) Иногда, в целях практического удобства, прямой угол делится на 100 или же на 6 частей. Угол $\frac{d}{100}$ называется **градом** и обозначается 1^g, а $\frac{d}{6}$ называется часом и обозначается $1^ч$ или 1^h.

OA называется также *основною стороною* данного угла, а линия OM—*его второю стороною.*

При образовании углов вращением линии OM около точки O линия OM может в частном случае совместиться с OA или с ее продолжением OA', и тогда угол исчезает, но для общности принято считать, что в первом случае угол равен 0°, а во втором 180°.

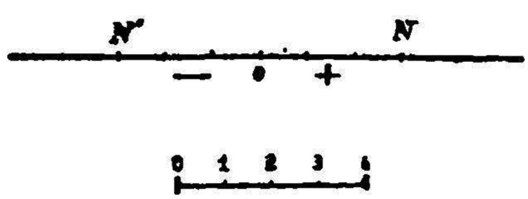


Величины, могущие принимать всевозможные значения между данными пределами, называются *непрерывными.* Углы, как мы сейчас указали, могут принимать всевозможные значения между 0° и 180°; следовательно, они обладают свойством непрерывности.

§ 3. Правило Декарта для определения положения точки на линии и на плоскости.

1. Определение положения точки на прямой линии.

Положение точки на данной прямой определяется относительно некоторой произвольно избранной на ней точки. Пусть O будет произвольно избранная точка на прямой линии $N'N$, и требуется определить положение точек N и N' этой прямой относительно избранной точки O. Положение некоторой точки N или N' на прямой линии относительно точки O будет определено, если известно ее расстояние от O и направление, в котором она лежит. Расстояния выражаются в линейных единицах, а направление алгебраическим знаком. Условимся принимать расстояния, лежащие по одну сторону от точки O, за положительные (+), а лежащие по другую сторону,—за отрицательные (—). Например, примем расстояния, направленные



вправо от точки O, за положительные, а влево—за отрицательные. Заметим, что выбор той или другой стороны для положительных отрезков совершенно произволен, но если при решении некоторой задачи остановимся на известном направлении, то до конца решения задачи нельзя менять условия. В таком случае точки N и N', лежащие, например, в расстоянии 3 единиц от точки O, определятся величинами:

точка N расстоянием . . $ON = +3$
„ N' „ . . $ON' = -3$

По данной величине расстояния и ее знаку получится одна и только одна точка на прямой линии; если же знака не дано, то получатся две точки на равном расстоянии от начальной точки O: одна N — направо, а другая N' — налево от нее

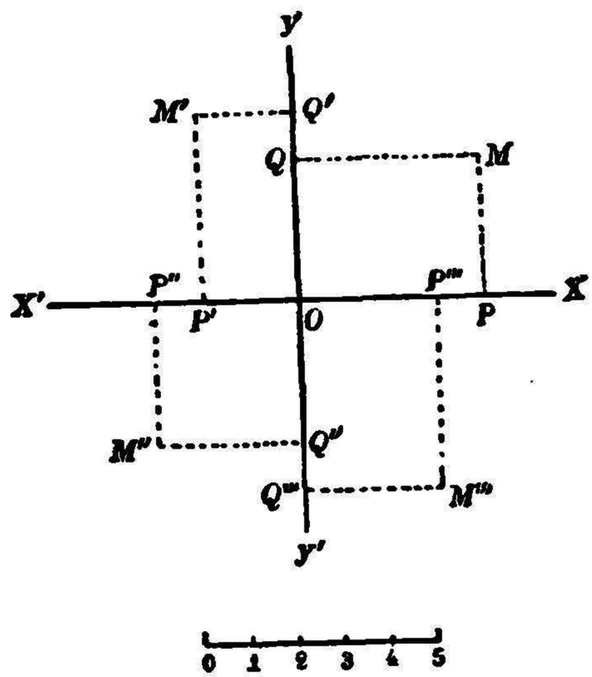
2. Определение положения точки на плоскости. Пусть XX' и YY' будут две взаимноперпендикулярные прямые линии, пересекающиеся в точке O. Положение некоторой точки M на плоскости будет известно, если дано *ее расстояние* от обоих прямых XX' и YY', и если, кроме того, известно, *с какой стороны* от каждой из прямых находится данная точка M.

Из данной точки M проведем перпендикуляры MP и MQ к прямым XX' и YY' и условимся выражать $MP = QO$ *положительным числом*, если данная точка M лежит *над* прямой XX', и *отрицательным*, если точка лежит *под* той же прямой; затем, условимся выражать $MQ = PO$ *положительным числом*, если данная точка M лежит *вправо* от прямой YY', и *отрицательным*, если она лежит *влево* от той же прямой.

Заметим, что, как и при определении положения точки на прямой, выбор той или другой стороны для положительных отрезков совершенно произволен, но если при решении некоторой задачи остановимся на известном направлении, то до конца решения задачи нельзя менять условия.

Величины $MP=QO$ и $MQ=PO$ называются *координатами точки* M, а взаимноперпендикулярные линии XX' и YY' — *координатными осями*. Координата MP, параллельная оси YY', называется *ординатою*, а MQ, параллельная оси XX', *абсциссою* точки M.

Изложенные условные определения предложены в XVII столетии французским математиком Декартом.



На основании изложенного условия положение четырех точек M, M', M'' и M''' определяется следующим образом:

Точка M, лежащая в области XOY, имеет обе координаты положительные; например: $MP=+3$; $MQ=+4$.

Точка M', лежащая в области $X'OY$, имеет положительную ординату и отрицательную абсциссу: например $M'P'=+4$ и $M'Q'=-2$.

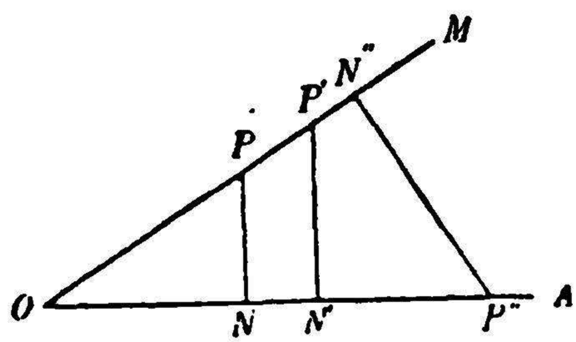
Точка M'', лежащая в области $X'OY'$, имеет обе координаты отрицательные; например: $M''P''=-3$ и $M''Q''=-3$.

Точка M''', лежащая в области XOY', имеет отрицательную ординату и положительную абсциссу; например: $M'''P'''=-4$ и $M'''Q'''=+3$.

По данным величинам координат и их знаку мы получим положение одной и только одной точки на плоскости; если же даны величины координат, а знака их не дано, то на плоскости получится положение четырех точек, и, следовательно, будет неопределенность.

В применении к углам перпендикуляры, опущенные из любой точки одной из сторон данного угла на другую или на ее продолжение, считаются положительными; отрезки же от вершины угла до основания перпендикуляра считаются положительными в том случае, если они лежат на стороне данного угла, и отрицательными, если они лежат на ее продолжении.

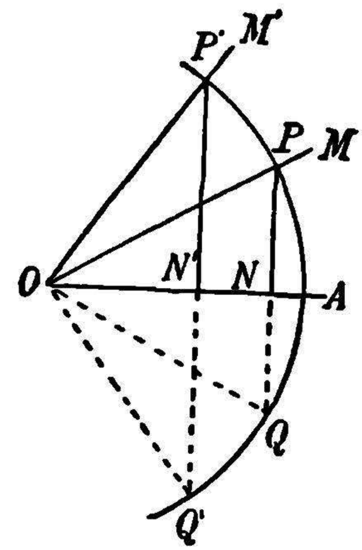
§ 4. Зависимость между острым углом и его линиями. Пусть $y = AOM$ будет некоторый острый угол. Выберем на той или другой его стороне произвольные точки P, P', P'' и т. д. и опустим из них перпендикуляры на другую сторону: PN, $P'N'$, $P'N''$ и т. д. Мы получим ряд треугольников ONP, $ON'P'$, $ON''P'$ и т. д.; они все подобны, так как имеют, кроме прямого угла, общий угол $y = AOM$. Из их подобия мы выводим следующие ряды отношений:



$$\left.\begin{aligned}
\frac{PN}{OP} &= \frac{P'N'}{OP'} = \frac{P''N''}{OP''} = \text{ и т. д.}\\
\frac{ON}{OP} &= \frac{ON'}{OP'} = \frac{ON''}{OP''} = \text{ и т. д.}\\
\frac{PN}{ON} &= \frac{P'N'}{ON'} = \frac{P''N''}{ON''} = \text{ и т. д.}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Мы видим, что для данного острого угла приведенные отношения остаются постоянными, где бы мы ни взяли точки P, P', P'' и т. д., из которых опущены перпендикуляры на другую сторону угла. Докажем, что с изменением угла изменяются и приведенные отношения.

Пусть AOM и AOM' (стр. 13) будут два каких-нибудь неравных между собою острых угла. На одной из сторон угла AOM выберем произвольную точку P, и радиусом OP из точки O, как центра, опишем окружность. Затем из P опустим перпендикуляр PN на OA и продолжим его до пересечения с окружностью в Q. Из P'—пересечения той же окружности со второю стороною бо́льшего угла AOM'—опустим перпендикуляр на ту же линию OA и продолжим его до пересечения с окружностью в Q'. Перпендикуляры PN и $P'N'$ будут полухорды дуг PAQ и $P'AQ'$, стягивающих центральные углы POQ и $P'OQ'$. В геометрии доказываются теоремы: 1) что меньшие дуги одной и той же полуокружности стягиваются меньшими хордами, а бо́льшие дуги—бо́льшими хордами; 2) что хорды, стягивающие меньшие дуги одной и той же полуокружности, лежат дальше от центра, чем хорды, стягивающие большие дуги. Итак, $P'Q' > PQ$, а следовательно и $\frac{1}{2}P'Q' > \frac{1}{2}PQ$ или $P'N' > PN$. Кроме того, по второй из приведенных теорем: $ON' < ON$; поэтому:



$$\frac{P'N'}{OP'} > \frac{PN}{OP},\ \frac{ON'}{OP'} < \frac{ON}{OP} \text{ и } \frac{P'N'}{ON'} > \frac{PN}{ON} \quad . \ . \ . \quad (A)$$

Итак, при изменении величины угла изменяется отношение его линий; поэтому:

1. Данному острому углу соответствуют одни и только одни значения отношений его линий, независимо от величины этих линий.

2. Различным острым углам соответствуют различные значения отношений линий углов;

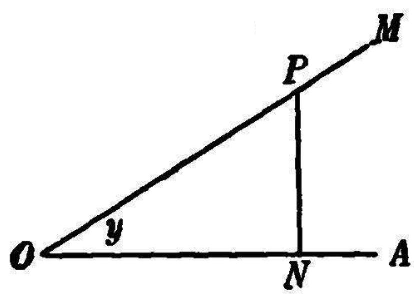
и, как следствие:

3. Два равных угла имеют равные отношения своих линий.

4. Данному значению отношений линий острого угла соответствует один и только один острый угол.

Отсюда мы заключаем, что приведенные отношения линий углов могут служить для измерения углов.

Рассмотренные нами углы AOM и AOM' избраны совершенно произвольно и, следовательно, они могут отличаться друг от друга на сколь угодно малую величину. Как бы, однако, они мало ни отличались друг от друга, отношения (A) остаются справедливыми и для бесконечно малого различия между углами; когда же избранные углы совместятся между собою и станут равными, то неравенство (A) превратится в равенство.



§ 5. Тригонометрические величины острого угла. Пусть $y=AOM$ будет некоторый острый угол, стороны которого суть OA и OM. Выберем на стороне OM произвольную точку P и опустим перпендикуляр PN на другую сторону OA угла y. Мы получим прямоугольный треугольник ONP; в нем:

отношение	$\frac{PN}{OP}$	называется	*синусом*	угла y
„	$\frac{ON}{OP}$	„	*косинусом*	„ „
„	$\frac{PN}{ON}$	„	*тангенсом*	„ „
„	$\frac{ON}{PN}$	„	*котангенсом*	„ „
„	$\frac{OP}{ON}$	„	*секансом*	„ „
„	$\frac{OP}{PN}$	„	*косекансом*	„ „

Эти отношения называются *тригонометрическими величинами* данного угла y. Для краткости тригонометрические величины обозначаются следующим образом: