

Х. Барендрегт

**Ламбда-Исчисление
его синтаксис и семантика**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
X11

X11 **Х. Барендрегт**
Ламбда-Исчисление: его синтаксис и семантика / Х. Барендрегт – М.: Книга по Требованию, 2023. – 606 с.

ISBN 978-5-458-28170-6

ISBN 978-5-458-28170-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

место и классический материал, часто переосмысленный с новых позиций. Это достигнуто за счет оригинального построения книги. Сначала конспективно излагаются с подробными мотивировками и примерами основные понятия и результаты, что позволяет читателю сформировать общую картину, а во второй половине книги приводятся доказательства и определения «второго слоя». Более того, даже в конспективной части не все разделы взаимозависимы, так что читатель, заинтересованный в знакомстве лишь с некоторыми из них, имеет такую возможность.

Можно надеяться, что издание книги Х. Барендрегта будет способствовать как развитию исследований в области оснований математики и математической логики, связанных с лямбда-исчислением, так и повышению уровня программистов (а может быть, и программирования).

Автор значительно переработал некоторые разделы книги для русского издания, внес изменения, уточнения, написал добавления и предисловие. Редактор и переводчик пользуются случаем выразить ему благодарность.

А. С. Кузичев,
Г. Е. Минц

Предисловие автора к русскому изданию

Читатели этого издания получают значительно улучшенное изложение вопросов, связанных с семантикой лямбда-исчисления. В английском издании понятия лямбда-алгебры и лямбда-модели вводятся корректным, но несколько утомительным способом. Недавние исследования коллег позволили мне полностью переписать гл. 5, подведя категорное основание под оба вида моделей лямбда-исчисления.

Кроме того, в это издание внесены исправления и сделаны добавления в конце книги.

Так как книга написана скорее в систематическом, чем в дидактическом стиле, я намечу возможный порядок изложения (или чтения) содержащегося в ней материала. Совсем небольшой курс состоит из §§ 2.1, 3.1, 3.2, гл. 6, §§ 1.2, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4. Этот материал дает представление о рекурсивной силе языка и содержит как теоретико-модельное (посредством модели D_A), так и синтаксическое (через теорему Чёрча — Россера) доказательства непротиворечивости.

К этому базисному курсу можно добавить сначала §§ 7.1, 7.2, 8.1, 8.2, 8.3, 10.1, 11.1, 11.2, 13.1, 13.2, 18.1, 18.2, где рассматривается теория комбинаторов, разрешимость, бёмовские деревья, специальные понятия редукции и модели $P\omega$ и D_∞ .

Затем можно добавить §§ 10.2, 10.3, 14.1, 14.3, 16.1, 16.2, 19.1, 19.2, которые подводят к анализу значений термов в моделях.

Другие подборки по своему вкусу читатель может найти с помощью последних разделов глав 2, 3, 4 и 5, содержащих обзор оставшейся части книги. Автору больше всего нравятся следующие: §§ 13.4, 15.3, 17.1, 20.4, а также 9.4, 10.4, 17.2 и гл. 21, хотя последние несколько более техничны.

Я благодарю Г. Е. Минца, который перевел английский текст на русский язык, А. С. Кузичева — научного редактора перевода и Г. М. Цукерман — издательского редактора книги.

Х. Барендрегт

Апрель 1983 г.

*Музыка — это некая таинственная математика,
элементы которой подобны бесконечности*

Клод Дебюсси

Эта книга посвящается
двум женщинам:
Долли Барендрегт-Кессинг

и
Марии Монтеessori.
Первая дала мне жизнь
и показала пример
добросовестности.
Вторая учила меня, не поучая,
и привила мне стремление
к истине

Предисловие

Бестиповое лямбда-исчисление было введено около 1930 года, в расчете на то, что оно станет основанием логики и математики. Из-за появления парадоксов эта цель, однако, не была достигнута. Тем не менее, непротиворечивая часть этой системы составила весьма удачную теорию вычислений. Она дала важный толчок развитию теории рекурсии, а в последнее время — и информатике. Более того, несмотря на парадоксы, все еще сохраняется возможность использовать лямбда-исчисление в качестве нового основания логики. Этой проблеме в последнее время снова уделяется много внимания.

В результате лямбда-исчисление выросло в теорию, заслуживающую самостоятельного изучения. Предметом, которому посвящена эта книга, является *чистое* лямбда-исчисление. Книга по-видимому, будет полезна и читателям, интересующимся приложениями, ибо приложения лямбда-исчисления имеют обычно скорее эвристический, чем непосредственный характер. В частности, конструкции лямбда-исчисления воспитывают интуицию, позволяющую ориентироваться в семантике языков программирования. Эта книга написана для логиков, математиков, специалистов по информатике и философов.

Благодарности. Эта книга была написана по предложению Анне Трулстра, одного из редакторов серии *Studies in Logic*. Эйнар Фредрикссон из издательства «Норс-Холланд» проявлял терпение даже после того, как минул срок сдачи рукописи.

В 1974/1975 году с Яном Бергстрой, Яном Виллемом Клопом и Генри Волькеном мы вели очень продуктивный семинар.

Весьма полезными для меня были несколько бесед с Гордоном Плоткиным и Даной Скоттом. Ян Виллем Клоп был всегда готов обсуждать со мной лямбда-исчисление. Не все его идеи, имеющие отношение к рассматриваемым вопросам, попали в эту книгу; им посвящена монография Клопа [1980]. Прочли части рукописи и высказали критические комментарии следующие математики: Марьянджол Дедзани, Роджер Хиндли, Карст Койманс, Жан-Жак Леви, Джузеппе Лонго, Герд Мичке, Альберт Виссер и Крис Уодсворт.

Я особенно благодарен Джозефу Куинси, который прочел всю рукопись и внес много предложений, улучшивших как английский язык книги, так и ее математический стиль, Адриану Резусу, подготовившему указатели и библиографию, а также Яну Виллему Клопу, который чертил схемы.

Основная часть книги написана в Утрехтском университете, где благодаря Дирку ван Далену создана превосходная рабочая обстановка. Дополнительную поддержку оказали Нидерландская организация содействия прогрессу чистой науки (Z. W. O.), Институт математических исследований Цюрихской политехнической школы и, наконец, Математический институт в Обервольфахе (ФРГ), где я завершил рукопись.

Прежде чем издать эту книгу, ее надо было напечатать на машинке. Девяносто процентов этой работы проделала До Брейгель-Вольграфф (которая печатала быстрее, чем я был способен писать); оставшиеся десять процентов напечатали Анс, Элвин, Джок, Марианна, Ренске, Синекке и Софи. Я благодарен им от всего сердца.

Утрехт, Нидерланды
Февраль 1980 года

Хенк Барендрегт

Добавление при корректуре

Основную часть первой корректуры я читал в Конье (Италия) в горном пансионе Марьянджолы Дедзани-Чанкальини. Вместе с Симонеттой Ронки делла Рокка они создали мне прекрасные условия для работы.

Август 1980 г.

Х. Б.

Во время чтения второй корректуры Карст Койманс продолжал успешно охотиться за ошибками и предложил несколько улучшений.

Декабрь 1980 г.

Х. Б.

Указания читателю

Требуемая подготовка

Эта книга по существу не требует предварительной подготовки. Лишь временами нужны элементарные сведения из логики первого порядка, топологии, теории множеств, теории рекурсии и теории категорий. Если потребуется, читатель может найти эти сведения в следующих книгах.

Логика первого порядка: Эндертон [1972], Барвайз [1977а].

Общая топология: Келли [1955].

Теория множеств: Халмош [1960], Ван Дален и др. [1978], Келли [1955].

Теория рекурсии: Роджерс [1967].

Теория категорий: Арбиб и Мейнс [1975], Маклейн [1972].

Обозначения

В этой книге используются следующие обозначения.

$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел.
$P(\mathbb{N})$ или $P\omega$	множество всех подмножеств $\mathbb{N}$.
$\lambda x. \dots$	(металамбда-абстракция) — теоретико-множественная функция f , такая, что $f(x) = \dots$ для всех x (например, $(\lambda x. x^2 + 1) (3) = 10$).
$\mu x \dots$	наименьшее $x \in \mathbb{N}$, такое, что ...
Seq	множество кодов конечных последовательностей (при какой-либо стандартной их кодировке натуральными числами). Иными словами,

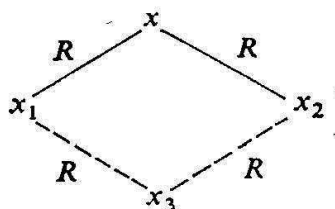
$$\text{Seq} = \{\langle n_1, \dots, n_k \rangle \in \mathbb{N} \mid k \in \mathbb{N}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

Если $\alpha = \langle n_1, \dots, n_k \rangle \in \text{Seq}$, то $\text{lh}(\alpha) = k$. Условимся, что $\langle \rangle \in \text{Seq}$ и $\text{lh}(\langle \rangle) = 0$. Если $\alpha = \langle n_1, \dots, n_p \rangle$, $\beta = \langle m_1, \dots, m_q \rangle$, то $\alpha * \beta = \langle n_1, \dots, n_p, m_1, \dots, m_q \rangle$ и $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда $p \leq q$ и $n_i = m_i$ для $1 \leq i \leq p$. Мы пишем $\alpha < \beta$, если $\alpha \leq \beta$, но $\beta \leq \alpha$ неверно.

Логические связки — это $\neg$ (не), $\vee$ (или), $\wedge$ (и), $\Rightarrow$ (влечет), $\Leftrightarrow$ (тогда и только тогда, когда; т. и. т. т., когда), $\forall$ (для всех), $\exists$ (существует). Они используются обычно в неформальном метаязыке. $\exists! x$ означает, что существует единственный x .

Некоторые «теоретико-категорные» картинки часто используются для краткой записи утверждений. Если, например, R —

бинарное отношение на множестве X , то схема



выражает следующее предложение:

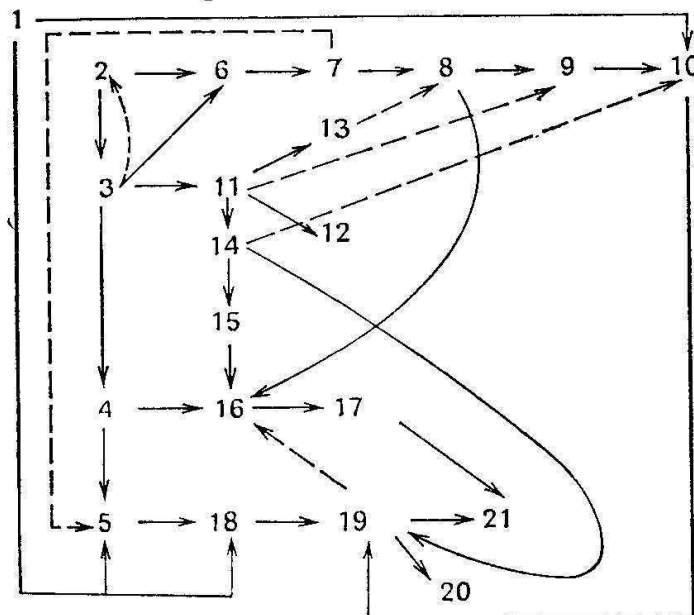
$$\forall x, x_1, x_2 \in X [xRx_1 \wedge xRx_2 \Rightarrow \exists x_3 \in X [x_1Rx_3 \wedge x_2Rx_3]].$$

Остальные обозначения будут самоочевидными.

Изложение материала

Основные вопросы чистого лямбда-исчисления — это *конверсия, редукция, теории и модели*. Они систематически рассматриваются в основных частях этой книги. Кроме этого имеется вводная часть, содержащая введение в каждую из остальных: глава i (последний параграф которой дает общий обзор) является для $2 \leq i \leq 5$ введением в часть i . Глава 1 содержит общее введение и сведения из менее известной теории полных частичных упорядочений.

Приводимая ниже таблица примерно показывает зависимости отдельных глав друг от друга. Пунктирная стрелка означает, что некоторые результаты более поздней главы сформулированы без доказательства в более ранней.



(Я надеюсь, что читателю будет проще разобраться в книге, чем в этой диаграмме.)

Каждая глава заканчивается параграфом, содержащим упражнения. Наиболее трудные из них помечены звездочкой (*).

Часть I

На пути к теории



Шейнфинкель (1922)
(предоставлено
миссис Н. Курант)



Карри (1963)



Чёрч (1965)



Россер
(фотография
Т. Хирано, 1935)



Клини
(фотография
Т. Хирано, 1935)



Тьюринг (1951)

Глава 1

Введение

1.1. Аспекты лямбда-исчисления

Лямбда-исчисление — это бестиповая теория, рассматривающая функции как *правила*, а не как графики. Понятие «функции как закона или правила» кажется старомодным и подразумевает переход от аргумента к значению, процесс, закодированный некоторым определением. Приписываемая обычно Дирихле мысль о том, что функции можно рассматривать как графики, т. е. множества, состоящие из пар аргумент — значение, была важным вкладом в математику. Тем не менее лямбда-исчисление снова рассматривает функции как правила, чтобы подчеркнуть их *вычислительные* аспекты.

Функции как правила рассматриваются в полной общности. Например, мы можем считать, что функции заданы определениями на обычном русском языке и применяются к аргументам, также описанным по-русски. Конкретнее, рассмотрим функции, заданные программами для машин и применяемые к другим таким программам. В обоих случаях перед нами бестиповая структура, где объекты изучения являются одновременно и функциями, и аргументами. Это — отправная точка *бестипового* λ -исчисления. В частности, функция может применяться к самой себе. При обычном понимании функции в математике (скажем, в теории множеств Цермело — Френкеля) это невозможно (из-за аксиомы фундирования). (См. также упр. 18.5.30.)

Имеются три аспекта λ -исчисления.

I. Основания математики.

II. Вычисления.

III. Чистое лямбда-исчисление.

Эти аспекты будут описаны ниже. Иная точка зрения на основания лямбда-исчисления выражена в работах Скотта [1975b], [1980] и [1980a].

I. Основания математики и лямбда-исчисление

Создатели лямбда-исчисления и близкой к нему теории комбинаторной логики преследовали две цели.

(1) Разработать общую теорию функций (охватывающую, например, формульные преобразования).

(2) Расширить эту теорию, введя в нее логические понятия, дающие основания логике и (частично) математике.

Первая из этих задач выделялась Шейнфинкелем и Карри, создателями комбинаторной логики, и неявно содержалась в работах Чёрча, который создал λ -исчисление.

К сожалению, все попытки дать основания математике окончились неудачей. Первоначальная система Чёрча [1932/33] оказалась противоречивой, как показали Клини и Россер [1935]. Широко известная противоречивая теория Фреге [1893], [1903] по существу содержит λ -исчисление, как отметил Акцель [1980]. Поэтому обнаружение ее противоречивости было в действительности еще одной неудачей.

Карри [1930] предложил непротиворечивую теорию, отвечающую первой из двух упомянутых выше целей (чистую комбинаторную логику), но логическая часть его теории слишком слаба для того, чтобы служить адекватным основанием логики.

После открытия парадокса Клини — Россера Чёрч разочаровался в своей программе в области оснований. Книга Чёрча [1941] содержит непротиворечивую (в силу теоремы Чёрча — Россера) подтеорию его первоначальной системы, имеющую дело только с функциональной частью. Эта теория и есть λ -исчисление.

С другой стороны, Карри не желал «бежать от парадоксов». Он предложил расширить чистую комбинаторную логику так называемыми иллативными понятиями, чтобы достичь второй из упомянутых целей и дать вместе с тем анализ парадоксов; см. Карри и др. [1958], [1972]. Хотя программа Карри не была выполнена, удалось все же достигнуть некоторого прогресса: см. Фитч [1974], Скотт [1975a], Селдин [1976/77] и Акцель [1980].

Имеются и другие направления в основаниях математики, родственные λ -исчислению. Феферман [1975], [1980] развивает систему, основанную на функции частичной аппликации (применения функции к аргументу), в качестве основания конструктивной математики. Лежащие в ее основе множества частичных функций родственны равномерно рефлексивным структурам Вайднера [1969] и Стронга [1968] (см. также Барендрегт [1975]). Остается открытым вопрос о соотношении между этими структурами и моделями λ -исчисления, в которых аппликация всегда определена. (См. добавление 1 в конце книги.)

Имеются связи между λ -исчислением, теорией доказательств и теорией категорий. В этом контексте, однако, используется типовое λ -исчисление; см. приложение А, в частности § А.3.

II. Вычисления и лямбда-исчисление

Теория рекурсии

Часть λ -исчисления, оперирующая только с функциями, оказалась весьма полезной. Используя эту теорию, Чёрч предложил формализацию понятия эффективной вычислимости с помощью λ -определимости. Клини [1936] показал, что λ -определимость эквивалентна рекурсивности по Гёделю — Эрбрану, а тем временем Чёрч сформулировал свой тезис (утверждающий, что рекурсивность является точной формализацией эффективной вычислимости). Тьюринг [1936], [1937] провел анализ механической вычислимости и показал, что получившееся понятие (вычислимость по Тьюрингу) эквивалентно λ -вычислимости.

После обнаружения парадоксов Клини перевел на новый язык результаты о λ -определимости и получил несколько фундаментальных теорем теории рекурсии (см. Кроссли [1975], с. 4—7). Теорема о перечислении частично рекурсивных функций, s-m-n-теорема и теорема о рекурсии своими корнями уходят в λ -исчисление.

Информатика

Развитие ЭВМ в последние десятилетия вызвало интенсивное развитие языков программирования. λ -исчисление имеет ряд общих черт с языками программирования и их реализацией. Например, связанные переменные λ -исчисления соответствуют формальным параметрам процедуры, а бестиповой аспект соответствует тому, что в машине программа неотличима от своих данных: и то и другое — последовательности битов.

Анализ, проведенный Тьюрингом, показывает, что, несмотря на свой очень простой синтаксис, λ -исчисление способно изобразить все механически вычисляемые функции. Поэтому на λ -исчисление можно смотреть как на парадигматический язык программирования. Отсюда, конечно, не следует, что мы должны писать на нем настоящие программы. Подразумевается лишь, что многие проблемы, возникающие в программировании, особенно в связи с вызовами процедур, предстают в λ -исчислении в чистом виде. Их изучение может принести пользу при проектировании и анализе языков программирования.

Например, ряд языков программирования обладает (быть может, без прямого намерения своих создателей) чертами, навеянными λ -исчислением. В Алголе 60, Алголе 68, Паскале процедуры могут быть аргументами процедур. В Лиспе, кроме того, процедура может быть результатом работы процедуры. Язык GEDANKEN, описанный Рейнольдсом [1970], непосредственно основан на λ -исчислении. О связях между λ -исчислением и языками программирования говорится у Маккарти [1962],