

Шарль Штурм

**Курс анализа, читанный в
Парижской политехнической
школе м. Штурмом, членом
Французского института**

Том 1

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
Ш94

Ш94 **Штурм Ш.**
Курс анализа, читанный в Парижской политехнической школе м. Штурмом,
членом Французского института: Том 1 / Шарль Штурм – М.: Книга по Тре-
бованию, 2026. – 461 с.

ISBN 978-5-521-38659-8

Дифференциальное исчисление Интегральное исчисление

ISBN 978-5-521-38659-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2026

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2026

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

4. Функція одного перемѣннаго можетъ быть представлена геометрически.

Для этого достаточно разсматривать независимое перемѣнное x какъ абсциссу, а функцію y , какъ соотвѣтствующую ординату плоской кривой, выражаемой уравн.

$$y = f(x).$$

Эта кривая обыкновенно непрерывна, т. е. при незначительно измѣняющихся величинахъ x , ордината ея также незначительно измѣняется; въ такомъ случаѣ говорятъ, что y есть *непрерывная функція отъ x* .

Подобнымъ образомъ функцію двухъ независимыхъ перемѣнныхъ можно представить поверхностію; функцій же трехъ, четырехъ и большаго числа независимыхъ перемѣнныхъ неспособны выразиться геометрически.

5. Функція называется *явною* тогда, когда она выражается непосредственно черезъ одно или нѣсколько перемѣнныхъ, отъ которыхъ она зависитъ; такъ что, выполнивъ показанныя дѣйствія надъ этими перемѣнными, съ точностію получимъ ея величину. Такъ напр.

$$y = x + \sqrt{x^2 - a^2}, \quad y = a^x,$$

суть явныя функціи отъ x .

Неявныя функціями называются такія функціи, которыя съ перемѣнными, отъ которыхъ онѣ зависятъ, связаны не рѣшенными уравненіями или какими-нибудь условіями, которыя не выражены аналитически. Таково, напр., y въ уравненіи

$$y^3 - 2xy + 2x^2 - a^2 = 0.$$

Функція обратится въ явную тогда, когда изъ уравн. опредѣлимъ ея величину y :

$$y = x \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Способъ предѣловъ.

6. Когда послѣдовательными величины переменнаго неопредѣленно приближаются къ постоянной и опредѣленной величинѣ, такъ что разность можетъ сдѣлаться меньше всякой данной величины, то эта опредѣленная величина называется *предѣломъ* величинъ переменнаго. Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

Площадь круга есть предѣлъ, къ которому приближается площадь вписаннаго правильнаго многоугольника по мѣрѣ того, какъ число его сторонъ увеличивается. Дѣйствительно, въ геометріи доказывается, что площадь правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ при достаточно большомъ числѣ его сторонъ, можетъ разниться отъ площади круга на величину, по нашему желанію, малую. Надо замѣтить, что для этого нѣтъ необходимости доказывать, что площадь правильнаго, вписаннаго многоугольника увеличивается съ числомъ его сторонъ.

Подобнымъ образомъ, если рассмотримъ дугу и ея синусъ, то отношеніе $\frac{\sin x}{x}$, которое всегда меньше единицы, можетъ отличаться отъ единицы на величину, по нашему желанію, малую, если только дугѣ будемъ давать достаточно малыя величины. Слѣдовательно, когда x уменьшается неопредѣленно, предѣлъ $\frac{\sin x}{x}$ равенъ единицѣ.

Очевидно также, что нѣтъ необходимости доказывать, и обыкновенно даже не доказываютъ, что отношеніе $\frac{\sin x}{x}$ постоянно увеличивается, когда x , меньшее четверти окружности, неопредѣленно уменьшается.

7. Функціи, представляющіяся въ видѣ $\frac{0}{0}$, при известной величинѣ переменнаго, часто имѣютъ предѣлы. Примѣ-

ромъ мы имѣемъ отношеніе $\frac{\sin x}{x}$, которое при $x = 0$ обращается въ $\frac{0}{0}$, и предѣломъ имѣетъ единицу. Равнымъ образомъ выраженіе:

$$y = 2a - \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2},$$

при $x = a$, обращается въ $\frac{0}{0}$. Всякій разъ, когда будемъ давать x величины, отличающіяся отъ a , но которыя послѣдовательно приближаются къ a , величины y будутъ опредѣлены и равны величинамъ выраженія

$$2a - \frac{x^2 + ax + a^3}{x + a};$$

но, по мѣрѣ того, какъ x будетъ болѣе и болѣе приближаться къ a , это послѣднее выраженіе все менѣе и менѣе будетъ разниться отъ

$$2a - \frac{3a}{2} \text{ или } \frac{a}{2}.$$

Слѣдовательно, предѣлъ для величинъ y есть $\frac{a}{2}$.

8. Переменное количество можетъ неопредѣленно приближаться къ предѣлу, оставаясь всегда менѣе или болѣе этого предѣла. Но можетъ случиться, что переменное, будетъ то больше, то меньше предѣла, къ которому оно приближается, такъ сказать, колебаясь въ ту и другую сторону.

Такъ напримѣръ отношеніе $\frac{\sin x}{x}$ приближается къ нулю, когда x неопредѣленно возрастаетъ. Въ то же время всякій разъ, когда x дѣлается равнымъ кратному числу полуокружностей, $\frac{\sin x}{x}$ обращается въ нуль и мѣняетъ знакъ.

9. Если два количества, измѣняющіяся одновременно, постоянно равны между собою при всѣхъ величинахъ, которыя они принимаютъ, и если известно, что одно изъ

низъ приближается къ предѣлу, то очевидно, что другое будетъ также приближаться къ тому же предѣлу или къ предѣлу равному этому. Это есть основаніе способа предположъ, имѣющаго столь большое приложеніе во всѣхъ частяхъ математики.

Основываясь на этомъ, мы докажемъ, что площадь круга вѣмѣряется произведеніемъ его окружности на половину его радіуса. Означивъ черезъ a , p , r площадь, периметръ и апогею правильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругъ, получимъ,

$$a = p \cdot \frac{1}{2} r;$$

но a и $p \cdot \frac{1}{2} r$ суть двѣ величины, которыя измѣняются съ числомъ сторонъ, но которыя всегда остаются равными между собою; слѣдовательно, предѣлы ихъ равны. Если же черезъ A , C , R означимъ площадь, окружность и радіусъ круга, то A будетъ предѣлъ a , C будетъ предѣлъ p и R будетъ предѣлъ r ; слѣдовательно

$$A = C \cdot \frac{1}{2} R.$$

Способъ безконечно малыхъ.

10. Когда переменное получаетъ все меньшія и меньшія величины, такъ что оно можетъ сдѣлаться менѣ всякой данной величины, тогда говорить, что оно стало *безконечно малымъ*. Такимъ образомъ, разность между площадью круга и площадью вписаннаго многоугольника съ увеличиваніемъ числа сторонъ можетъ сдѣлаться безконечно малою.

Дробь $\frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ будетъ безконечно мала, когда x получаетъ величины большія и большія.

Слѣдовательно, безконечно малое не есть опредѣленная

величина, но, это есть величина совершенно переменная, имѣющая предѣломъ нуль.

11. Когда переменное получаетъ величины большія и большія, такъ что оно можетъ сдѣлаться болѣе всякой данной величины, тогда говорятъ, что оно стало *безконечно большимъ* или *безконечностію*, и тогда его означаютъ знакомъ ∞ или $\frac{K}{0}$. Напримѣръ, функція

$$y = a + \frac{a^2}{x - a}$$

обращается въ безконечность при $x = a$.

При величинахъ x , которыя мало отличаются отъ a , но которыя больше a , соответствующія величины y положительны; а при величинахъ x , меньшихъ a , величины y отрицательны. Слѣдовательно, смотря по обстоятельствамъ, безконечность можетъ быть положительною или отрицательною.

12. Безконечно малыя облегчаютъ вычисленіе конечныхъ величинъ. Съ помощію ихъ можно рѣшить слѣдующія двѣ задачи: 1) *найти предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ, зависящихъ между собою*; 2) *найти предѣлъ суммы безконечно малыхъ, число которыхъ увеличивается неопредѣленно*.

Въ болѣе чемъ числѣ случаевъ рѣшеніе этихъ задачъ упрощается слѣдующими двумя теоремами.

13. **ТЕОРЕМА I.** — *Предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ не измѣняется, когда они будутъ замѣнены другими, имъ не равными, но которыя имѣютъ съ ними отношенія, приближающіяся къ единицѣ.*

Пусть α и β будутъ два безконечно малыя; α' и β' такіе два другія безконечно малыя, чтобы предѣлы отношеній $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$ были равны единицѣ.

Очевидно,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta},$$

откуда

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta}.$$

Подобнымъ же образомъ

$$\frac{\alpha'}{\beta} = \frac{\beta'}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'},$$

отсюда

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta} = \lim \frac{\beta'}{\beta} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'};$$

слѣдовательно,

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

(14. Эту теорему можно доказать еще слѣдующимъ образомъ:

Такъ какъ $\frac{\alpha'}{\alpha}$ имѣетъ предѣломъ единицу, то, если положимъ

$$\alpha' = \alpha + \delta,$$

получимъ

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \frac{\delta}{\alpha},$$

гдѣ $\frac{\delta}{\alpha}$ должно приближаться къ нулю; это выражаютъ, говоря, что δ есть безконечно малое относительно α .

Равнымъ образомъ имѣемъ

$$\frac{\beta'}{\beta} = 1 + \frac{\delta'}{\beta};$$

поэтому

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha}}{1 + \frac{\delta'}{\beta}}.$$

Но такъ какъ $\frac{\delta}{\alpha}$ и $\frac{\delta'}{\beta}$ имѣютъ предѣломъ нуль, то

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1;$$

откуда

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

Такимъ образомъ, рассматривая эту теорему съ этой новой точки зрѣнія, мы заключаемъ, что:

Предѣлъ отношенія двухъ безконечно малыхъ не измѣняется, когда замѣнимъ ихъ другими, которыя разнятся отъ нихъ на безконечно малое относительно ихъ.

Примѣры. При $x = 0$, получимъ

$$1\text{-й} \quad \lim \frac{x}{\tan x} = \lim \frac{\sin x}{\tan x} = \lim \cos x = 1,$$

$$2\text{-й} \quad \lim \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3},$$

$$3\text{-й} \quad \lim \frac{\sin x}{\sin^2 3x} = \lim \frac{x}{9x^2} = \infty.$$

15. ТЕОРЕМА II. — *Предѣлъ суммы безконечно малыхъ не измѣняется, когда замѣнимъ ихъ другими, отношенія которыхъ къ первымъ соответственно имѣютъ предѣломъ единицу или которыя разнятся отъ первыхъ на безконечно малая относительно ихъ.*

Пусть $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ будутъ безконечно малы, которыя слѣдуютъ одинъ за другимъ по опредѣленному закону и число которыхъ увеличивается все болѣе и болѣе. Означимъ черезъ S ихъ сумму и предположимъ, что эта сумма имѣетъ конечный предѣлъ. Пусть $\beta, \beta', \beta'', \dots; \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$ будутъ такіа безконечно малы, что

$$\beta = \alpha + \alpha\varepsilon, \quad \beta' = \alpha' + \alpha'\varepsilon', \quad \beta'' = \alpha'' + \alpha''\varepsilon'' \dots;$$

тогда получимъ

$$\beta + \beta' + \beta'' + \dots = S + \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \dots$$

Но если черезъ η означимъ величину самую большую изъ величинъ $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \dots$, то получимъ въ абсолютной величинѣ

$$\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \dots < S\eta,$$

а такъ какъ η предѣломъ имѣетъ нуль, то ясно, что

$$\lim (\alpha + \alpha'\epsilon' + \alpha''\epsilon'' + \dots) = 0,$$

а слѣдовательно

$$\lim (\beta + \beta' + \beta'' + \dots) = S,$$

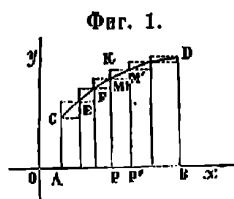
что и требовалось доказать.

16. Изъ уравненія

$$\lim (\alpha + \alpha'\epsilon' + \alpha''\epsilon'' + \dots) = 0$$

выводимъ такую теорему: если сумма *безконечно малыхъ*, число которыхъ *возрастаетъ неопредѣленно*, имѣетъ *конечный предѣлъ*, то *сумма произведений, получаемыхъ отъ перемноженія ихъ соответственно на другія безконечно малыя*, *будетъ имѣть предѣломъ нуль*.

Напримѣръ, рассмотримъ площадь, заключающуюся между плоской кривою CD, осью x и двумя ординатами CA и DB. Представимъ, что AB раздѣлено, по какому-нибудь закону, на безконечно малыя части,



какъ напр: PP' . Очевидно, что сумма прямоугольниковъ, какъ $ММ'К$, построенныхъ на разности двухъ смежныхъ ординатъ и на части PP' , имѣетъ предѣломъ нуль.

Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$\sum PP' = AB$$

и

$$\sum ММ'К = \sum PP'. КМ;$$

а такъ какъ $КМ$ есть величина безконечно малая, то по предыдущей теоремѣ получимъ

$$\sum ММ'К = 0.$$

Различные порядки бесконечно малых.

17. Когда рассматривают бесконечно малыя, находящіяся между собой въ зависимости, выбираютъ изъ нихъ одно, которое называютъ *главнымъ бесконечно малымъ* и съ нимъ сравниваютъ другія. Тогда всѣ бесконечно малыя, отношенія которыхъ къ главному бесконечно малому имѣютъ предѣлы конечныя, называютъ *бесконечно малыми перваго порядка*. *Бесконечно малыми втораго порядка* называютъ тѣ, отношенія которыхъ къ бесконечно малымъ перваго порядка суть бесконечно малыя перваго порядка, и такъ далѣе.

Такимъ образомъ, если α будетъ бесконечно малое перваго порядка, то всякое другое бесконечно малое этого порядка будетъ имѣть видъ $\alpha(p + \beta)$, гдѣ p есть конечное, а β бесконечно малое. Вообще $\alpha^n(p + \beta)$ выразитъ бесконечно малое n -го порядка.

Примѣры. Если дуга x есть перваго порядка, то $\sin x$ будетъ перваго порядка, ибо $\frac{\sin x}{x}$ имѣетъ предѣломъ 1; $1 - \cos x$ будетъ втораго порядка, потому что $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$.

ТЕОРЕМЫ I и II (§§. 13 и 15) можно выразить такъ:

Когда отыскиваемъ предѣлы отношенія двухъ величинъ, составленныхъ изъ бесконечно малыхъ различныхъ порядковъ, то въ каждой изъ этихъ величинъ можно рассматривать только бесконечно малыя низшаго порядка.

*Когда отыскиваемъ предѣлы суммы нѣсколькихъ бесконечно малыхъ, то можно рассматривать бесконечно малыя только низшаго порядка *).*

(*) «Большое преимущество этихъ теоремъ состоитъ въ томъ, что съ помощію ихъ можно часто пренебрегать, въ бесконечно малыхъ

Примѣримъ для первой теоремы имѣемъ

$$\lim \frac{\sin x + 3\sin^2 x}{x + 2x^2} = \lim \frac{\sin x}{x} = 1;$$

въ числитель пренебрегаемъ $3\sin^2 x$, какъ безконечно малымъ второго порядка; а въ знаменателѣ $2x^2$, какъ безконечно малымъ третьяго порядка.

П Р И М Ѣ Р Ы.

1) Двѣ точки помѣщены на кривой одна отъ другой на разстояніи безконечно маломъ перваго порядка; разстояніе первой изъ этихъ точекъ отъ касательной, проведенной къ кривой черезъ другую точку, есть безконечно малое втораго порядка.

2) Двѣ кривыи имѣютъ общую касательную; разность ихъ ординатъ, находящихся на разстояніи безконечно маломъ перваго порядка отъ точки прикосновенія, по крайней мѣрѣ втораго порядка.

3) Подобныя теоремы для поверхностей.

тою частію, которая дѣлаетъ затруднительнымъ вычисленіе и сравненіе. Для этого достаточно, чтобы эта часть была безконечно мала относительно самаго количества; тогда въ результатахъ, въ которыхъ разсматриваются только предѣлы отношеній или суммъ этихъ безконечно малыхъ, не произойдетъ никакой ошибки.» *Duhamel*, *Éléments de Calcul infinitésimal*.